FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
23. årgang, nr. 4, Maj 2014

En uendelig række a_n'er

Redaktion

* ⋆ Nilin Abrahamsen,
* ⋆ Søren Wengel Mogensen,
* ⋆ Jonathan Mills,
* ⋆ Jingyu She,
* ⋆ Martin Patrick Speirs

Indhold

Sidste blad?

Redaktionen

Endnu et akademisk år er ved at være slut. I Famøs glæder vi os til sommerferien, men vi er også bekymrede for fremtiden. Vi kom nemlig for nylig til den erkendelse, at friske kræfter er nødvendige, hvis Famøs fortsat skal eksistere. Et par redaktionmedlemmer skal udenlands, andre bliver snart kandidater. Redaktionen er meget snart for lille til, at bladet fortsat er levedygtigt.

Vi håber, at nogle nye redaktører vil melde sig, så vi kan fortsætte Famøs. Hvis det skulle have din interesse, så henvend dig til redaktionen. Din hjælp vil være værdsat.

Det er tid til, at yngre årgange sætter deres præg på bladet. I redaktionen har vi gennem de sidste år haft mange tanker om, hvad Famøs kunne, skulle, ville og burde, og på det seneste har vi diskuteret muligheden for helt eller delvis at skifte over til et internetbaseret Famøs. Det ville den nuværende redaktion være begejstret for, men om et eller to år er ingen af os i redaktionen længere. Så hvem er?

Viètes formel

Jens Siegstad

Vi skal i denne artikel vise Viètes formel.

Theorem 1 *(Viètes formel)*

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2}\end{aligned}$$

hvor $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ *for* $n > 1$ *og* $a_1 = \sqrt{2}$.

Ovenstående formel blev vist i 1593 af Francois Viète (1540-1603). Formlen er interessant idet den er det første eksempel på et uendeligt produkt og derudover også er den første formel til at udregne π (kilde [1]). Viète gav et rent geometrisk bevis hvor han sammenlignede arealer af regulære polygoner, med hhv. 2^n og 2^{n+1} sider, indskrevet i en cirkel. For typer med hang til klassisk geometri anbefales det at kaste et blik på de sidste sider i kapitel 16 i [2] hvor man vha. en række opgaver guides til et geometrisk bevis der er tættere på Viètes oprindelige bevis. Derudover findes der i førnævnte kapitel et bevis for at π er irrational[1]. For de læsere der ikke før har stiftet bekendtskab med uendelige produkter vil vi i det følgende definere konvergens af et uendeligt produkt.

[1] I Famøs 22-2 kan du ligeledes finde et bevis for irrationalitet af π.

Definition 2 Lad (u_n) være en følge af komplekse tal. Betragt følgen af partielle produkter

$$p_n = u_1 u_2 \cdots u_n = \prod_{j=1}^{n} u_j.$$

Hvis følgen (p_n) har en grænseværdi, forskellig fra nul, når $n \to \infty$ da siger vi at det uendelige produkt $\prod_{j=1}^{n} u_j$ er konvergent med værdi p og vi skriver da at

$$p = \prod_{j=1}^{\infty} u_j.$$

Hvis et uendeligt produkt ikke er konvergent kaldes det divergent.

Inden vi viser Viètes formel viser vi et par påstande som viser sig at være pænt anvendelige i beviset for denne ædle formel.
Påstand 1

$$\sin x = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Bevis. Ved gentagen anvendelse af halveringsformlen for sinus finder vi at

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 4 \sin\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&\vdots \\
&= 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

som ønsket. Nøjeregnende typer gennemfører naturligvis et induktionsbevis[2]. □

Påstand 2
Der gælder at

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Bevis. Vi viser først at

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = x.$$

Vi ved at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Derved finder vi at

$$\frac{1}{x} \cdot \lim_{n\to\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = 1.$$

Heraf følger det at

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = x.$$

Ved at kombinere ovenstående med Påstand 1 finder vi at

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \tag{1}$$

som ønsket. □

[2]En frisk indføring i induktionsbeviser med udgangspunkt i *Caféen? Domino* kan du finde i FAMØS 22-1.

Sætter vi $x = \frac{\pi}{2}$ i (1) finder vi at

$$\frac{2}{\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi}{2^{j+1}}\right)\cdots.$$

Ved at bruge den trigonometriske additionsformel for cosinus samt idiotformlen vises det let at

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

for alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Specielt haves at

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\
\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ved at indsætte ovenstående værdier i (1) fås Viètes formel. Fedt nok! Et godt spørgsmål er så hvor hurtigt det uendelige produkt i Viètes formel konvergerer. Det konvergerer rent faktisk pænt hurtigt. Mere præcist gælder følgende

Theorem 3 *Definer følgen*

$$v_n := \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right).$$

Da gælder der at

$$0 < v_n - \frac{2}{\pi} < \frac{1}{\sqrt{48}}\sqrt{2}\pi^2\frac{1}{4^n} < \frac{3}{10}\frac{1}{4^n}.$$

Bevis. Se side i 144 i [3]. □

Betragtes værdierne af følgen $(2v_n^{-1})$ får man for $n = 21$ en værdi af π som er korrekt til 12. decimal (se s. 145 i [3]). Vi har således fundet en metode til at udregne π som er ret så effektiv. Ulempen er dog at man skal udregne ret så mange kvadratrødder, hvilket typisk vil være ret så trælst hvis man sidder på en øde ø uden strøm på computeren! Lad os sammenligne med 2 af de vel nok mest kendte rækkefremstillinger for π. Vi betragter først Leibniz's formel

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.\end{aligned}$$

Ovenstående formel kan geometrisk fortolkes således: En fjerdedel af forholdet mellem omkreds og diameter er det samme som summen af de reciprokke ulige tal med alternerende fortegn. En anden kendt rækkefremstilling der involverer π er Eulers række

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ovenstående rækkefremstilling udtrykker at summen af alle de reciprokke kvadrattal er endelig. Vi minder om at summen af de reciprokke naturlige tal samt summen af alle de reciprokke primtal er uendelig. Nok er der uendeligt mange kvadrattal, men de fordeler sig mindre tæt blandt de reelle tal end de naturlige tal samt primtallene. Begge disse formler har den umiddelbare fordel at de er relativt nemme at huske, fortolke og ikke mindst at vise. De har dog den umiddelbare ulempe at de konvergerer meget langsomt. For Leibniz's række gælder at, hvis man skal udregne π således at afvigelsen er af størrelsesordenen 10^{-k}, skal man medtage ca $\frac{1}{4}10^k$ led (se s 144 i [3]) og for Eulers række skal man medtage omkring omkring 100 millioner led for at finde en værdi af π der er korrekt op til 7 decimalers nøjagtighed (se s 148 i [3]). Skal man vha. computerkraft udregne π med drabeligt mange decimaler skal man have fat i nogle langt mere "harske" rækker. En af de hurtigt konvergerende rækkefremstillinger er Ramanujan[3]s rækkefremstilling

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}.$$

Puha!

Litteratur

[1] Kent E. Morrison *Cosine Products, Fourier Transforms, and Random Sum.* Amer. Math. Monthly, 102, 1995, 716-724

[2] Michael Spivak. *Calculus.* Third Edition, Publish or Perish Inc 1994.
Bogen kan findes her http://staff.washington.edu/freitz/Spivak_3rd_ed.pdf

[3] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M.Koecher, K.Mainzer, J.Neukirch, A.Prestel, R.Remmert. *Numbers.*, Springer 1991.

[3] Srinivasa Ramanujan (1887-1920): Relativt habil indisk matematiker!

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Approximations_of_%CF%80

Lærer på et handelsgymnasium

Kristian Peter Poulsen

Når sommerferien står får døren, kan jeg se tilbage på et ualmindeligt lærerigt år som gymnasielærer. Et år, hvor jeg føler jeg har gjort en markant forskel og taget mig tid til at stoppe op, zoome ud og overveje, hvor det er jeg vil hen med min uddannelse.

Min situation i juni 2013

Det hele startede tilbage i juni 2013, hvor jeg midt i den håbløse eksamenslæsning bliver kontaktet af handelsgymnasiet i min gamle hjemby Frederikshavn. De forklarer mig, at de har været udsat for en lidt pludselig opsigelse og derfor har brug for en matematiklærer til skoleåret 13/14. Jeg siger, at jeg vil overveje det og ringe tilbage dagen efter. De næste fem timer kommer jeg frem til en masse gode grunde til at jeg bør sige ja til jobtilbuddet:

1. Jeg er egentlig lidt træt af at tyre igennem det ene kursus efter den andet uden at stoppe op og overveje, hvad det egentlig er jeg lærer og hvorfor jeg lærer det.
2. Min morfar er syg og ham vil jeg meget gerne nå at være i nærheden af, thi min bror og jeg har et meget tæt bånd til vores morfar.
3. Jeg føler (på trods af, at jeg virkelig holder af mine medstuderende), at jeg trænger til noget frisk luft. Et pusterum fra de, synes jeg selv, mange ting jeg er en del af: Revyen, FAMØS, S01, madsøster samt diverse andre arrangementer jeg synes jeg bør deltage i.
4. Jeg trænger til nogle penge.

5. Jeg trænger til noget decideret frisk luft, hvor der ikke er bilos og over 10 km til den nærmeste skov.

Der er dog også noget, som går mig på. Jeg skal nemlig være rusvejleder for tredje gang, og jeg kan selvfølgelig godt se, at det bliver svært, hvis jeg render rundt oppe i Nordjylland, når de nye studerende starter her i København. Jeg får derfor talt med mine medvejledere samt studieintroduktionskoordinatoren og forklarer situationen. Jeg ender med at lave en aftale med handelsgymnasiet om, at jeg ikke kan undervise i uge 35, fordi jeg vil være til stede i København, når de nye studerende starter. Udover det aftaler vi, at jeg en gang i mellem må tage fri for at komme til de forskellige arrangementer i forbindelse med rusintroduktionen.

Udover det faktum at jeg var rusvejleder, så var der en anden ting, som gik mig meget på: Jeg tænkte på mine virkelig gode venner og veninder, som jeg ikke havde lyst til at forlade.

På trods af de lidt negative ting endte jeg med at sige ja til jobbet, og det har jeg været rigtig glad for.

Handelsgymnasiet vs. det almene gymnasium

På handelsgymnasiet er matematik C obligatorisk for alle. Den eneste forskel fra det almene gymnasium til handelsgymnasiet er, at der på C-niveau ikke er noget trigonometri. Til gengæld er der mere statistik, end der er i gymnasiet og derudover også et forløb om rentes- og annuitetsregning.[4] Når man kommer op på B-niveau er der mere fokus på teorien og vægt på at bevise sætninger. På handelsgymnasiet skal man på B-niveauet også beskæftige sig med lineær programmering, og der gås endnu mere i dybden

[4] Annuitetsregning, synes jeg er nice. Her kommer kvotientrækker ind i billedet.

med statistik.[5] Til gengæld har man ikke integralregning før man får matematik på A-niveau i handelsgymnasiet. På A-niveauet beskæftiger man sig også med vektorregning, differentialligninger samt en smule kvadratisk optimering.

Alt i alt minder de to gymnasiers matematikpensum uhyggeligt meget om hinanden. Trigonometrien rører man bare ikke rigtig ved på handelsgymnasiet. Det, mener jeg, er ganske rimeligt, eftersom ingen af eleverne formentlig regner med at blive ingeniør.

Jeg må indrømme, at jeg er svært glad for det gennemgående princip om brugbarhed, som er i handelsgymnasiet. Vi lærer ikke eleverne noget uden at fortælle, hvad det bruges til. Det kan godt være, at de ikke skal ud og lave lineær regression i en bank, men til gengæld ligger der noget meget dybere bag ved. Jeg mener det er sundt, at eleverne ved hvorfor de lærer det, de nu engang lærer.

I øvrigt ser jeg handelsgymnasiet som et springbræt til matematik-økonomi- eller aktuarstudiet.

Sammenlagt mener jeg, at handelsgymnasiet på mange punkter er mere forberedende til et universitetsstudium i matematik end gymnasiet er. De dele af det almene gymnasiestof, som man ikke har, er erstattet af noget bedre (efter min mening). Desuden kommer fagene på mange naturlige måder til at spille godt sammen, hvilket skaber en god synergi, så eleverne hurtigere forstår stoffet.

Handelsgymnasiet Frederikshavn

Handelsgymnasiet Frederikshavn er et forholdsvis lille handelsgymnasium med ca. 400 elever og lidt over 30 lærere. Handelsgymnasiet hører ind under virksomheden Frederikshavn Handels-

[5] Man arbejder bl.a. med konfidensintervaller for sandsynlighedsparameteren og χ^2-test.

skole, som også huser HG og en kursusafdeling. Der er en rigtig fin kantine, hvor man kan forsyne sig med et bredt udvalg af retter og sund mad. Jeg er rigtig glad for mine kolleger. Jeg fik en varm velkomst ved skoleårets start, hvor jeg blev taget rigtig godt imod. Udover at alle mine kolleger er yderst hjælpsomme, så er en af de to andre matematiklærere knyttet til mig som mentor. Når der er noget, jeg er i tvivl om, så spørger jeg i første omgang min mentor. Jeg spørger hende til råds, hvis jeg mangler et eksempel fra virkeligheden til at forklare et matematisk fænomen. Det er også hende, jeg spørger, angående diverse formelle ting omkring eksamen eller lønforhold, som jeg ikke er 100% inde i.

Hvad mener jeg der skal til?

Jeg er glad for, at jeg havde tre års studietid i bagagen. Selvom det er "nemt"stof, vi arbejder med, så er det klart en fordel, at jeg hurtigt kan gennemtænke dygtige elevers dybdegående spørgsmål til stoffet. Jeg er usædvanlig glad for at formidle, og jeg tænker tit over, hvordan jeg formulerer mig i undervisningen og uden for undervisningen.[6] Sidst men ikke mindst, mener jeg, at der skal en stor portion selvtillid til. Man står foran 30 unge mennesker i alderen 16-24 år, hvor de fleste af dem er vældig meget fremme i skoene. Jeg har derfor følt, at det har været rart (og sjovt på den gode måde), når jeg kunne svare eleverne igen, når de kommer med spydige og sjove kommentarer.[7]

[6] Da Frederikshavn med sine 25.000 indbyggere er forholdsvis lille sammenlignet med København, så møder jeg ind i mellem mine elever. Det kan selvfølgelig være en fordel, for så kan jeg gå hen til den travlt optagede ungarbejder i Netto og spørge, "Undskyld, hvad koster den her uden moms?".

[7] De skulle bare vide, hvad jeg kunne finde på at sige, hvis jeg ikke havde lærerkasketten på!

Kort sagt mener jeg, at man bør være skarp, god til at formidle/forklare og have en god portion selvtillid.

Fordele og ulemper

Af de mindre gode ting ved jobbet vil jeg nævne:

1. Rette afleveringer. Når man har rettet de første 10 afleveringer, så begynder det at ligne hinanden. Det er dog altid en fornøjelse at rette en rigtig god aflevering.
2. Sidde med matematikbøger, som man synes er noget bras og ikke nødvendigvis have tid til at lave alt materiale selv.
3. Være væk fra København og sine venner. Selvom man selvfølgelig kan besøge dem og omvendt.

Af de gode ting vil jeg nævne:

1. Jeg har fundet ud af, at lærerjobbet (eller lignende) passer rigtig godt til mig!
2. Jeg gør en forskel for nogle unge mennesker. Det er en fantastisk følelse, når C-niveauelever kommer over til en og spørger efter nogle flere beviser, fordi de synes det med beviser var ret fedt. Jeg har endda oplevet en elev, som surgte, hvad man kunne blive, hvis man læste matematik.
3. Jeg har en alsidig arbejdsdag, hvor jeg har forskellige slags arbejdsopgaver.
4. Jeg har været på to studieture. En til Bruxelles og en til København.
5. Jeg laver rent faktisk matematik i min hverdag.
6. Jeg har været på et par kurser og mødt ældre matematiklærere og talt med dem.
7. Jeg er blevet bedre til at TeX'e. Jeg TeX'er alle afleveringer, besvarelser og noter.

8. Jeg er blevet bedre til at skrive på tavle/whiteboard. Det gælder både skriften og ikke mindst overblik over, hvad der står hvor.
9. Jeg har været på en studie-/hyggetur med alle lærerene til Berlin, hvor "alt"var betalt.
10. Eleverne synes jeg er den vildeste lærer, de nogensinde har mødt. Jeg er overbevist om, at de aldrig glemmer deres matematiklærer fra skoleåret 13/14.
11. Der er et dejligt kollegialt sammenhold mellem lærerne, som jeg kommer til at savne.

Konklusion

Jeg vil klart anbefale et job som lærer på Handelsgymnasiet Frederikshavn. Især hvis man har gået med tanken om at blive gymnasielærer, men også hvis man vil have et job, hvor man stadig arbejder med matematik.

Efter sommerferien er jeg der ikke længere, og der er derfor en stilling som matematiklærer ledig. Ledelsen vil godt have en kandidat eller en studerende, som blot har mod på at prøve kræfter med et spændende og lærerigt job. De vil være behjælpelig med at finde bolig, hvis det skulle være et problem.

Kontakt mig, hvis du har spørgsmål.
mail: kpou@fhavnhs.dk

Sidste bloks præmie- og ekstraopgave

Nilin Abrahamsen

Tusind tak til Thor Baatrup Kampmann, Sune Precht Reeh og Jesper Baldtzer Liisberg for deres flotte besvarelser af sidste bloks præmieopgave! Til Jesper vanker et gavekort til GAMES. Mange tak også til Sune for hans løsning af ekstraopgaven. Inden vi går i gang med at mæske os i Sunes løsninger kan vi lige minde os selv om ordlyden af de to opgaver:

Sidste bloks præmieopgave (23. årgang nr. 3)

De reelle tal x, y, z opfylder:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 7 \end{aligned}$$

Hvad er $x^4 + y^4 + z^4$?

Se næste side for ekstraopgaven, der for øvrigt opstod som en misforståelse af en opgave i kurset *differentialligninger*.

Sidste bloks ekstraopgave (23. årgang nr. 3)

*Vi siger, at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en løsning til den **autonome** differentialligning*

$$x' = v(x) \tag{1}$$

hvis $f'(t) = v(f(t))$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

Sætning 1 *Hvis $v \in C^1$ (dvs. kontinuert differentiabel) på $f(\mathbb{R})$, så er to forskellige løsninger f og g til (1) faktisk forskellige i hvert eneste punkt t.*

Således løser $f(t) = t^3$ ikke (1) hvis $v \in C^1(\mathbb{R})$, for så skulle funktionen $g(t) = 0$ også løse (1), og de to ville være sammenfaldende i $t = 0$ i modstrid med sætningen.
Spørgsmål: *Hvilke begrænsede funktioner på $\mathbb{R}$ er løsning til en ligning som (1), hvor v er C^1 på **hele** $\mathbb{R}$?*
Du kan nøjes med at betragte $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Løsning af præmie- og ekstraopgave fra Famøs årgang 23, nr. 3

Sune Precht Reeh

Løsning af præmieopgaven

Et polynomium i n variable $p(x_1, \dots, x_n)$ er *symmetrisk* hvis enhver ombytning af de variable i p giver det samme polynomium p som vi startede med. F.eks. er $x^2 + y^2 + z^2$ symmetrisk i tre variable, mens $x^2 + y + z$ ikke er symmetrisk.

En speciel familie af symmetriske polynomier er de såkaldte *elementarsymmetriske* polynomier i n variable. For n faste variable er der n elementarsymmetriske polynomier $e_1, \dots, e_n$ som er defineret ved

$$e_k(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_k}.$$

For at danne e_k tager vi således hvert produkt af k af de variable og lægger alle produkterne sammen. Polynomiet e_k er oplagt symmetrisk i de n variable.

Eksempel 1 Med tre variable x, y, z har vi de følgende tre elementarsymmetriske polynomier: $e_1(x, y, z) = x + y + z$, $e_2(x, y, z) = xy + xz + yz$ og $e_3(x, y, z) = xyz$.

De elementarsymmetriske polynomier er gode at kende, idet en velkendt[8] sætning om symmetriske polynomier siger:

Sætning 2 *Ethvert symmetrisk polynomium i n-variable kan på entydig måde udtrykkes som et polynomium med hensyn til de elementarsymmetriske $e_1, \ldots, e_n$.*

Hvis p er symmetrisk i n variable, findes altså et andet (ikke nødvendigvis symmestrisk) polynomium q i n variable sådan at

$$p = q(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

Når man skal løse en opgave med symmetiske polynomier er det derfor typisk nok at opskrive alle udtryk ved hjælp af de elementarsymmetriske polynomier.

Eksempel 3 (generel løsning af præmieopgaven) I formuleringen af præmieopgaven indgår fire polynomier, lad os kalde dem $p_1, \ldots, p_4$, hvor $p_k(x, y, z) = x^k + y^k + z^k$. De fire polynomier er alle symmetriske.

Vi har med det samme at $p_1 = e_1$. Hvis vi dernæst udregner $(e_1)^2$, får vi

$$(e_1)^2 = (x + y + z)^2 = p_2 + 2e_2$$

og altså $p_2 = (e_1)^2 - 2e_2$ eller $e_2 = \frac{1}{2}(p_1)^2 - \frac{1}{2}p_2$.

[8] Wikipedia har på nuværende tidspunkt, d. 28/3 2014, intet mindre end tre forskellige beviser for sætningen. Se http://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_symmetric_polynomial

Hvis man husker sin Pascals pyramide[9], så er

$$\begin{aligned}(e_1)^3 &= (x+y+z)^3\\ &= (x^3+y^3+z^3)+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)\\ &\qquad +6xyz\\ &= p_3+3e_1e_2-3e_3.\end{aligned}$$

Dermed er $p_3 = (e_1)^3 - 3e_1e_2 + 3e_3$, eller alternativt

$$e_3 = \tfrac{1}{3}p_3 - \tfrac{1}{3}(e_1)^3 + e_1e_2 = \tfrac{1}{3}p_3 + \tfrac{1}{6}(p_1)^3 - \tfrac{1}{2}p_1p_2.$$

Til sidst ser vi på $(e_1)^4$ hvor vi (med nogle mellemregninger i hånden) får

$$(e_1)^4 = p_4 + 4e_2(e_1)^2 - 4e_3e_1 - 2(e_2)^2.$$

Nu isolerer vi p_4 og indsætter vores tidligere udregninger:

$$\begin{aligned}p_4 &= (e_1)^4 - 4e_2(e_1)^2 + 4e_3e_1 + 2(e_2)^2\\ &= (p_1)^4 - 4(\tfrac{1}{2}(p_1)^2 - \tfrac{1}{2}p_2)(p_1)^2\\ &\qquad + 4(\tfrac{1}{3}p_3 + \tfrac{1}{6}(p_1)^3 - \tfrac{1}{2}p_1p_2)p_1\\ &\qquad + 2(\tfrac{1}{2}(p_1)^2 - \tfrac{1}{2}p_2)^2\\ &= \tfrac{1}{6}(p_1)^4 - (p_1)^2p_2 + \tfrac{4}{3}p_1p_3 + \tfrac{1}{2}(p_2)^2.\end{aligned}$$

I opgaven ved vi nu at der for x, y, z gælder at $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ og $p_3 = 7$. Vi indsættelse ovenfor får vi dermed

$$p_4 = \tfrac{1}{6}\cdot 3^4 - 3^2\cdot 5 + \tfrac{4}{3}\cdot 3\cdot 7 + \tfrac{1}{2}\cdot 5^2 = 9.$$

[9] Ligesom Pascals trekant, bare for udregning af $(x+y+z)^k$ i stedet for $(x+y)^k$.

Løsning af ekstraopgaven

Antag først at $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en løsning til differentialligningen $x' = v(x)$, dvs. $f'(t) = v(f(t))$ for alle $t \in R$, for passende valg af C^1-funktion $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hvis dette skal give mening, må f i det mindste antages at være differentiabel.[10] Antag desuden at f er begrænset.

Udtrykket $v(f(t))$ er en sammensætning af to differentiable funktioner, og er derfor differentiabelt med hensyn til t i ethvert punkt. Funktionen f er altså 2 gange differentiabel, med

$$f''(t) = v'(f(t)) \cdot f'(t)$$

for alle $t \in R$. Da f' er differentiabel, er f' også kontinuert, så højresiden ovenfor er et produkt af kontinuerte udtryk; f er således en C^2-funktion.

Hvis der på noget tidspunkt gælder $f'(t_0) = 0$, så er $v(f(t_0)) = 0$, og dermed vil den konstante funktion $t \mapsto f(t_0)$ være løsning for samme v som f, og de to funktioner har punktet $(t_0, f(t_0)$ til fælles. Per entydighedssætningen i opgaven vil forskellige løsninger (for et givet valg af v) være forskellige i ethvert punkt. Den eneste mulighed er dermed at f er lig den konstante funktion $f(t) = f(t_0)$ overalt.

De konstante funktioner $t \mapsto a$ vil omvendt altid løse differentialligningen hvor $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er nulfunktionen $v(x) = 0$.

Vi antager derfor herefter at f ikke er konstant, og dermed at $f'(t) \neq 0$ overalt. Idet f' er kontinuert, må der således gælde at $f'(t) > 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$ eller $f'(t) < 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Lad os betragte tilfældet $f'(t) > 0$ idet det andet tilfælde behandles analogt.

[10] Opgaven tillader godt nok at vi antager at f er C^∞, men hvor er det sjove i det?

Funktionen f er begrænset, så både $a := \inf f(\mathbb{R})$ og $b := \sup f(\mathbb{R})$ definerer reelle tal. Fordi f er strengt voksende, ved vi desuden at

$$a = \lim_{t \to -\infty} f(t), \qquad \text{og} \qquad b = \lim_{t \to \infty} f(t).$$

Da v er antaget at være C^1 på hele $\mathbb{R}$, har vi yderligere grænseværdier:

$$f'(t) = v(f(t)) \to \begin{cases} v(a) \\ v(b) \end{cases} \quad \text{for } t \to \begin{cases} -\infty \\ \infty \end{cases}$$

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = v'(f(t)) \to \begin{cases} v'(a) \\ v'(b) \end{cases} \quad \text{for } t \to \begin{cases} -\infty \\ \infty \end{cases}$$

Da f er begrænset, må det desuden gælde at $f'(t)$ rent faktisk går mod 0 for $t \to \pm\infty$, dvs. at $v(a) = v(b) = 0$.

Vi påstår nu at vi har fundet de egenskaber der kendetegner en løsning f. Lad os derfor antage at vi er givet en vilkårligt funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der opfylder følgende krav:

Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *er begrænset* C^2*-funktion, og* $f'(t) > 0$ *for alle* $t \in \mathbb{R}$. *Der gælder* $\lim_{t \to \pm\infty} f'(t) = 0$ *og begge grænseværdier*

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{f''(t)}{f'(t)} \quad \textit{og} \quad \lim_{t \to \infty} \frac{f''(t)}{f'(t)}$$

eksisterer og er endelige.

Vi viser nu at under disse antagelser om f, vil f være en løsning til differentialligningen for passende valg af C^1-funktion $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

For det første, idet f er begrænset og strengt voksende, kan vi definere $a = \lim_{t \to -\infty} f(t)$ og $b = \lim_{t \to \infty} f(t)$ som tidligere.

Funktionen f afbilder så $\mathbb{R}$ bijektivt over på intervallet (a,b). Lad $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ være invers til f.

Fordi f er C^1 og $f'(t) > 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, vil g også være C^1, og $g'(x) = 1/f'(g(x)) > 0$ for alle $a < x < b$. Vi definer dernæst en funktion $\eta\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ givet ved

$$\eta(x) := \frac{1}{g'(x)} = f'(g(x)).$$

Funktionen η er tydeligvis kontinuert på (a,b), og idet f er C^2 får vi endda

$$\eta'(x) = f''(g(x)) \cdot g'(x).$$

Det ses at η' er kontinuert, så η er i det mindste C^1 på intervallet (a,b). Nu skal vi "bare" udvide η til resten af $\mathbb{R}$.

Nu kommer antagelserne om grænseværdier i spil, for når x går mod a eller b, vil $g(x)$ går mod henholdsvis $-\infty$ og ∞. Der gælder derfor at

$$\begin{aligned} &\eta(x) = f'(g(x)) \to 0 \text{ for } x \to a, b \\ &\eta'(x) = f''(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{f''(g(x))}{f'(g(x))} \to \begin{cases} c \\ d \end{cases} \quad \text{for } x \to \begin{cases} a \\ b \end{cases} \end{aligned}$$

hvor c og d er reelle tal. Vi kan således udvide η til en C^1-funktion v på hele $\mathbb{R}$:

$$v(x) := \begin{cases} c \cdot (x - a) & \text{for } x \leq a, \\ \eta(x) & \text{for } a < x < b, \\ d \cdot (x - b) & \text{for } x \geq b. \end{cases}$$

Af de udregninger vi allerede har lavet, ses at $f'(t) = \eta(f(t)) = v(f(t))$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

FAMØS

FAMØS Maj 2014
Fagblad for Aktuar, Matematik,
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Illustrationer:
Nilin Abrahamsen (Forside)
Deadline for næste nummer:
1. oktober 2014

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til redaktion@famosweb.org – gerne i LaTeX
og gerne baseret på skabelonen
som kan hentes på hjemmesiden.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
http://www.famosweb.org

Oplag: 300 stk.
Tryk: Frydenberg A/S ISSN: 1395-2145

23. årgang, nr. 4, Maj 2014