FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
23. årgang, nr. 3, februar 2014

Portræt af Thor Baatrup Kampmann: løser af fire ekstraopgaver på stribe!

Redaktion

- ⋆ Nilin Abrahamsen,
- ⋆ Søren Wengel Mogensen,
- ⋆ Jonathan Mills,
- ⋆ Jingyu She,
- ⋆ Martin Patrick Speirs

Indhold

Skriv løs til Famøs

Redaktionen

Famøs lever af og for de studerende og ansatte ved instituttet. Her på redaktionen værdsætter vi derfor de bidrag, vi får, da redaktionen langt fra kan lave lige så mange og lige så gode artikler på egen hånd, som hele puljen af Famøs-skribenter kan tilsammen.

Famøs er og skal være mange ting. Der skal være plads til forskellige typer af artikler, hvilket nærværende udgave også er et eksempel på. Der skal være plads til det faglige, det sociale, det debatterende og det fjollefaglige. Og endda også til en leder i ny og næ.

Inden man skriver et bidrag, spørger man måske sig selv, om man virkelig kan skrive noget, der er interessant at læse. Det kan man. De bidrag, vi modtager, er af høj kvalitet, og redaktionen vil gøre sit yderste for i god tid at give eventuel feedback, så artiklen, når den bliver bragt, vil være så lækker som muligt - både indholds- og formmæssigt.

Man skal huske på, at Famøs' største målgruppe er de studerende. Derfor skal artikler kunne læses og forstås uden ualmindelig stor forhåndsviden. Det vigtigste ved en faglig Famøs-artikel er ikke at bringe et fuldstændigt bevis. En reference til et sted i litteraturen, hvor resten af beviset kan ses, er også en mulig løsning. Det giver forhåbentlig mulighed for at undgå, at man fortaber sig i små detaljer, der fjerner fokus fra det store billede.

Vi forstår, og det gør alle andre også, at de studerende, der skriver artikler, herunder vi selv, ikke er eksperter med årelang erfaring i det, vi skriver om. Hvis man imidlertid har fundet noget, man synes er spændende, så taler al sandsynlighed for, at mange andre vil finde det interessant.

Som en praktisk bemærkning kan det nævnes, at FAMØS skifter både web- og e-mailadresse som følge af IT-saneringen på instituttet. Find os fremover på famosweb.org og redaktion@famosweb.org.

Endelig skal der lyde en opfordring til at slutte sig til redaktionen, hvis man har lyst til det. Vi rekrutterer altid nye redaktionsmedlemmer, og vi kan godt lide nye mennesker.

Sådan smager dit nærmiljøs nærmiljø

– Vi afprøver diverse caféer og madsteder i nærheden af nærheden af HCØ, så du tør tage chancen og prøve noget nyt

Rie Jensen og Katrine Gravesen

Julen er dyr en tid! Der skal både købes julegaver, snaps og snaps. Vi har derfor valgt denne gang at vælge lidt, men godt. Så I får kun en enkelt anmeldelse, men hvilken en af slagsen. Vi har fundet et sted for den søde tand, som måske kan hjælpe lidt på det ellers triste vintervejr. Fat en gaffel og bevæg dig ud i ostekagens paradis.

Bertels kager, ★★★★☆

På larmende Falkoner Allé ligger en lille perle af en kagebutik (Falkoner Allé 54). *Bertels kager* er ikke et ukendt sted for kageelskende københavnere, men derfor skal I ikke snydes for en anmeldelse her. Så snart du træder ind af døren er det som om, at nogen slukker for trafiklarmen og lader de gravide damer nyde en lille dosis fred og ro (er babyen ude, så er amning tilladt). Og kagen selvfølgelig - en skøøøn cheesecake! Som navnet på stedet antyder, så er her flere af slagsen. Faktisk kunne vi vælge mellem ti slags: Pære/ingefær, kirsebær, irish coffee, chokolade/kirsebær, solbær, key lime, mix berry, lakrids, oreo og brownie/mix berry. Det tog os lidt tid at vælge, men heldigvis var der en sød norsk pige bag disken, som gerne fortalte og forklarede om kagerne. Vi fik også historien om de to damer på Nørrebro og laver cheesecakes hele dagen (nogen der kender dem?). Vi valgte de sidste to på listen og fik dem serveret på romantisk bloomville porcelæn. Synet af en cheesecake til 48 kr. skuffede først. Kagestykkerne er ikke store og slet ikke, når man netop har lagt en lille halvtredser på disken. Efter en overvejelse og skepsis om skævt forhold mellem størrelse og pris, besluttede vi os for at smage, hvorefter mismodet forsvandt fra vores sind med det samme. De smager virkelig godt! Og endnu bedre blev det, da også øjnenes lyst til mere blev gjort til skamme. Begge kager er en tung oplevelse, men det er turen til nærmiløets nørmiljø værd. Man kunne overveje at vælge nolge lidt lettere udgaver af cheesecaken eller undlade frokosten eller dele med en ven eller skylle ned med en kaffe (til almindelige cafépriser - ca. 35 kr.). Af andre goder kan vi nævne gratis internet og brætspil og sjove tapeter i både café og på toilet. Stedet er ikke stort og velbesøgt, men vi havde ikke problem med at dele langbord med to andre gæster (og det havde de forhåbentlig heller ikke). Så glæd dig selv eller en ven med en tur eller et gavekort til Frederiksberg, hvor cheesecakens hyggelige himmerige findes.

Lad σ være en cykel…

Cantors sætning v.2

Dan Saattrup Nielsen

De fleste af os kender Cantors sætning, som siger, at der ikke er nogen surjektiv afbildning fra en given mængde A til $\mathcal{P}(A)$, hvor $\mathcal{P}(A)$ er potensmængden af A. Ækvivalent kan det siges at $|\mathcal{P}(A)| > |A|$, hvor $|X|$ er kardinaliteten af X, som medfører $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$. En generalisering af denne sætning vil her vises, som bevist af Julius König i den anden halvdel af det 19. århundrede. Først starter vi med en definition.

Definition 1 Givet et uendeligt kardinaltal λ, defineres *kofinaliteten* $cf(\lambda)$, til at være det mindste kardinaltal κ således, at der eksisterer en afbildning $f : \kappa \to \lambda$, som opfylder, at $\sup(f(\kappa)) = \lambda$.

Man kan se kofinaliteten som en form for størrelsesbetragtning. Som et eksempel vil $\aleph_\omega$, foreningen af de ω første uendelige kardinaltal $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$, virke uoverskueligt stort, og det vil være svært at have en intuition omkring størrelsesforskellen mellem $\aleph_\omega$ og $\aleph_{\omega+1}$ f.eks. Men da vi kan konstruere en funktion $f : \aleph_0 \to \aleph_\omega$ givet ved $f(n) := \aleph_n$, vil det netop være tilfældet at $\sup(f(\aleph_0)) = \aleph_\omega$, så $cf(\aleph_\omega) \leq \aleph_0$; på den anden side kan nævnes at $cf(\aleph_{\omega+1}) = \aleph_{\omega+1}$. Pludselig virker $\aleph_{\omega+1}$ derfor meget større end $\aleph_\omega$, som også afspejler sig ift. forskellige egenskaber ved de to, som vi dog ikke vil komme ind på her. Det bemærkes også at $cf(\lambda) \leq \lambda$, da vi altid som minimum kan tage identitetsafbildningen $f : \lambda \to \lambda$ med $\sup(f(\lambda)) = \lambda$. Vi kan herefter formulere sætningen som

Sætning 2 (Königs sætning) *Hvis λ er et uendeligt kardinaltal, gælder $\lambda^{cf(\lambda)} > \lambda$.*

Bevis. Lad $\kappa := cf(\lambda)$ og konstruér $f : \kappa \to \lambda$, så billedet af f er ubegrænset i λ. Betragt nu en arbitrær afbildning $G : \lambda \to {}^{\kappa}\lambda$.[1] Det er nok at vise, at G ikke er surjektiv. For alle $\alpha < \kappa$, lad

$$A_\alpha = \{G_\eta(\alpha) \mid \eta < f(\alpha)\}.$$

Da gælder det for alle $\alpha < \kappa$ at $A_\alpha \subseteq \lambda$ og $|A_\alpha| \leq f(\alpha) < \lambda$. Specielt gælder det for $\alpha < \kappa$ at $\lambda \backslash A_\alpha \neq \emptyset$. Definér nu $h(\alpha)$, til at være det mindste element af $\lambda \backslash A_\alpha$ for alle $\alpha < \kappa$. Da gælder det, for alle $\alpha < \kappa$ og $\eta < f(\alpha)$, at

$$h(\alpha) \neq G_\eta(\alpha).$$

Derudover ses det klart ud fra vores konstruktion af f, at der for enhvert $\eta < \lambda$ findes et $\alpha < \kappa$ således at $\eta < f(\alpha)$. Derfor gælder det, at $h \neq G_\eta$, for alle $\eta < \lambda$. Altså er G ikke surjektiv, og $|{}^{\kappa}\lambda| > |\lambda|$. Men da κ var defineret til at være $cf(\lambda)$, samt at $|{}^{cf(\lambda)}\lambda| = |\lambda|^{|cf(\lambda)|}$ ved hjælp af kardinaltalsregning, fås at $|\lambda|^{|cf(\lambda)|} > |\lambda|$. Men da λ og $cf(\lambda)$ begge er kardinaltal, gælder $|\lambda| = \lambda$ og $|cf(\lambda)| = cf(\lambda)$, så vi har at $\lambda^{cf(\lambda)} > \lambda$. $\square$

Korollar 3 *Hvis κ er et uendeligt kardinaltal, gælder $cf(2^\kappa) > \kappa$.*

Bevis. Benyt König's sætning med $\lambda := 2^\kappa$, til at få uligheden

$$(2^\kappa)^{cf(2^\kappa)} > 2^\kappa.$$

Men, hvis $\mu \leq \kappa$, gælder det at

$$(2^\kappa)^\mu = 2^{\kappa \otimes \mu} = 2^\kappa,$$

hvor regneregler for kardinaltal blev benyttet undervejs. Dette medfører, at $cf(2^\kappa) \not\leq \kappa$, som dermed giver $cf(2^\kappa) > \kappa$, fordi ordinaltallene er totalt ordnede. $\square$

[1] ${}^{\kappa}\lambda$ er mængden af funktioner fra κ til λ.

Hermed kan Cantors sætning bevises, som et korollar.

Korollar 4 (Cantors sætning) *$|\mathcal{P}(A)| > |A|$ for alle mængder A.*

Bevis. Det er klart for endelige A, så antag A er uendelig. Lad $\kappa := |A|$. Da det vides, at $|\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa$ og, at det per definition gælder, at $2^\kappa \geq cf(2^\kappa)$, fås, ved brug af Korollar 3, at

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa \geq cf(2^\kappa) > \kappa = |A|.$$

□

Litteratur

[1] Schimmerling, Ernest. *A Course on Set Theory*. Cambridge University Press, 2011.

Ultrafiltre og umulighed

Martin Speirs

Arrows umulighedssætning fortolkes som et udsagn om at en bestemt klasse af funktioner er tom, og et bevis ved hjælp af ultrafiltre gives.

Fælles prioritering

I et demokrati er vi (ideelt set) alle med til at bestemme. Men det er ikke altid vi kan blive enige. Så må man prøve at finde en *fair* måde at træffe beslutninger. Hvis man for eksempel skal fordele penge ud i samfundet kan det være svært at blive enige. Nogle vil prioritere SU højere end offentlig transport, og prioritere disse højere end ældrepleje. Andre vil mene at den omvendte prioritering er den bedste.

Den amerikanske økonom Kenneth Arrow viste i 1950 at der ikke findes nogen *fair* måde hvorpå en masse prioriteringer kan samles sammen til én fælles prioritering[2]. Denne artikel giver et bevis af en version af Arrows umulighedssætning.

En vigtig antagelse er at der skal prioriteres mellem mindst tre alternativer. Det vil sige, der er ikke tale om en afstemning mellem to kandidater f.eks. Obama vs. Romney.

En fælles prioritering siges at være **fair** hvis den opflyder følgende krav.

Ingen diktator: Der er ikke én person som altid bestemmer.

Pareto efficiens: Hvis alle vælgerene er enige om prioriteringen af to af alternativerne så skal den endelige beslutning

[2]Se [Arrow] for Arrows egne udgave af emnet. Se [Geanakoplos] for tre korte beviser af sætningen.

respektere dette.

Uafhængighed af irrelevante alternativer: Den endelige prioritering blandt to af alternativerne må kun afhænge af vælgerenes prioriteringer af disse to alternativer. F.eks. må valget mellem $a > b$ eller $b > a$ ikke afhænge af c's placering i ordningen.

Upartisk: Alle alternativerne $a, b, c, \ldots$ behandles på lige fod. Dvs. den fælles prioritering ændres ikke hvis vi permuterer alternativerne[3].

Det virker som fire rimelige krav at stille når man gerne vil "aggregere folks præferencer" som en økonom nok ville sige. Men ak! Arrows sætning siger at der ikke findes nogen fair fælles prioritering.

Condorcets eksempel

"Condorcets paradoks" er et godt eksempel på besværligheden ved at tælle stemmer på en fair måde. Antag at samfundet har tre borgere $\{1, 2, 3\}$ og de skal vælge mellem tre alternativer $\{a, b, c\}$. Lad P_1, P_2, P_3 være prioriteringerne som hhv. borger $1, 2$ og 3 vælger. For eksempel kunne vi have

$$\begin{aligned} P_1 : &\qquad a > b > c \\ P_2 : &\qquad b > c > a \\ P_3 : &\qquad c > a > b \end{aligned}$$

Hvordan skal stemmerne tælles op? Man kunne argumentere for at a burde være prioriteret højere end b siden to ud af tre vælgere

[3] Her følger vi Terence Tao i hans korte artikel [Tao] om Arrows sætning. Denne antagelse er ikke strengt nødvendig, men gør beviset noget enklere

mener $a > b$. Men ligeledes finder man at $b > c$ og at $c > a$. Men så får vi jo $a > b > c > a$ altså er ordningen slet ikke en ordning!

Setuppet og sætningen

Lad os nu vende tilbage til formuleringen af Arrows resultat. Givet en endelig mængde af alternativer A, med mindst tre elementer, er en **prioritering** af A en total ordning af A. Mængden af mulige prioriteringer er altså mængden af totale ordninger af A. Denne mængde betegnes $T(A)$. En prioritering $P \in T(A)$ ser således ud:

$$P: \qquad a_1 > a_2 > \cdots > a_k.$$

Lad N være et naturligt tal som betegner antallet af vælgere. En funktion

$$f : T(A)^N \longrightarrow T(A)$$

tager en "afstemning" $(P_1, \ldots, P_n) \in T(A)^N$ og giver en fælles beslutning, $P = f(P_1, \ldots, P_N) \in T(A)$. Funktionen f kaldes **fair** hvis den tilfredstiller følgende krav:

Ingen diktator: Der findes ingen koordinat $1 \leq i \leq N$ således at $f(P_1, \ldots, P_N) = P_i$ for alle $(P_1, \ldots, P_N) \in T(A)^N$.
Pareto efficiens: Hvis der for $(P_1, \ldots, P_N) \in T(A)^N$ og $a, b \in A$ gælder at $a > b$ i for alle ordningerne $P_1, \ldots, P_N$, så gælder der også at $a > b$ i ordningen $P = f(P_1, \ldots, P_N)$.
Uafhængighed af irrelevante alternativer: Givet $a, b \in A$ og $(P_1, \ldots, P_N), (Q_1, \ldots, Q_N) \in T(A)^N$ således at, for alle $i = 1, \ldots, N$, er P_i og Q_i enige om ordningen af a og b, så er $P = f(P_1, \ldots, P_N)$ og $Q = f(Q_1, \ldots, Q_N)$ også enige omkring ordningen af a og b.
Upartisk: f er invariant under alle permutationer af mængden A.

Bemærk at hvis f er Pareto efficient så er f automatisk surjektiv. Dette giver god mening: hvis alle er enige om en prioritering P så må det helst være tilfældet at $f(P, \dots, P) = P$.

Vi kan nu formulere Arrows sætning.

Sætning 1 (Arrow 1950) *Der findes ingen fair funktion*

$$f : T(A)^N \longrightarrow T(A).$$

Beviset er ikke svært og kan findes mange steder, f.eks. i [Geanakoplos]. Men, det kan være lidt forvirrende. Hovedidéen med denne artikel er at se hvordan ultrafilter-maskineriet kan bruges til at bevise Arrows umulighedssætning.

Ultrafiltre

Et "ultrafilter" lyder dyrt! De bedste koster skam også en svag udgave af udvalgsaksiomet.

Lad I være en mængde og $\mathcal{P}(I)$ være potensmængden af I. Et **filter** på I er en delmængde $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(I)$ således at

- $\emptyset \notin \mathcal{D}$ og $I \in \mathcal{D}$.
- Hvis $X, Y \in \mathcal{D}$ så er $X \cap Y \in \mathcal{D}$.
- Hvis $X \in \mathcal{D}$ og $X \subseteq Y \subseteq I$ så er $Y \in \mathcal{D}$.

Et filter på I kan med fordel tænkes på som en specifikation af de "store" delmængder af I. Under den fortolkning synes aksiomerne at være rimelige.

Bemærk at ethvert filter har følgende vigtige egenskab: Hvis $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{D}$ gælder der at $X_1 \cap \dots \cap X_n \neq \emptyset$. Dette følger umiddelbart af de to første aksiomer.

Et **ultrafilter** på I er et filter som tilmed har følgende egenskab

- For enhver delmængde $X \subseteq I$ gælder enten at $X \in \mathcal{D}$ eller $I \setminus X \in \mathcal{D}$.

Et ultrafilter er altså et filter der, for hver delmængde $X \subseteq I$, tager stilling til om X eller $I \setminus X$ er "stor".

Eksempel 2 Enhver delmængde $X \subseteq I$ frembringer et filter

$$\langle X \rangle := \{Y \subseteq I : X \subseteq Y\}.$$

Et filter af denne form kaldes for et **principalfilter**.

Principalfiltre er ret kedelige. De siger ikke andet end at mængden X er "stor". Det giver ikke særligt meget information[4]. Hvis mængden I er uendelig findes der altid et filter på I som ikke er et principalfilter.

Eksempel 3 Lad $\mathcal{D} := \{X \subseteq I : I \setminus X \text{ er endelig}\}$. $\mathcal{D}$ kaldes for det **kofinite** filter på I og er ikke et principalfilter. Det er dog heller ikke et ultrafilter.

Sætning 4 *Lad I være en uendelig mængde. Da findes en udvidelse af det kofinite filter som gør det til et ultrafilter.*

Et par ord om beviset: Det viser sig at et ultrafilter er et filter som er maksimalt i den forstand at det ikke er indeholdt i noget andet filter. Ved brug af udvalgsaksiomet (i form af Zorns lemma) kan man altid finde en maksimal udvidelse af det kofinite filter.

En vigtig pointe med hensyn til Arrows sætning er følgende lemma.

[4] En præcisering af dette meget løse udsagn for dem der kender til modelteori: I modelteori bruger man ultrafiltre til at konstruere nye modeler, såkaldte ultraprodukter. For hvert ultrafilter kan man konstruere et ultraprodukt. Begynder man med et ultrafilter som er et principalfilter frembragt af $\{i\}$ ender man (op til isomorfi) blot med den i'te model.

Lemma 5 *Ethvert ultrafilter $\mathcal{D}$ på en* endelig *mængde I er et principalfilter. Envidere er $\mathcal{D}$ frembragt af en et-punktst mængde, dvs. $\mathcal{D} = \langle\{i\}\rangle$ for et $i \in I$.*

Bevis. Hvis vi kan vise at der er ét element $i \in I$ således at $\{i\} \in \mathcal{D}$ da må $\mathcal{D} = \langle\{i\}\rangle$. Dette er fordi hvis $X \in \mathcal{D}$ så må $X \cap \{i\}$ være i $\mathcal{D}$, men $\emptyset \notin \mathcal{D}$ så $X \cap \{i\} = \{i\}$. Med andre ord $\{i\} \subseteq X$.

Antag at $\mathcal{D}$ ikke er et principalfilter. Så for all $i \in I$ gælder der at $\{i\} \notin \mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}$ er et ultrafilter må $I \setminus \{i\}$ være i $\mathcal{D}$. Men dette gælder for alle de *endeligt* mange elementer $i \in I$. Så

$$\bigcap_{i \in I} I \setminus \{i\} = \emptyset \in \mathcal{D}$$

hvilket er en modstrid. Altså må $\mathcal{D}$ være et principalfilter.

Slutteligt skal vi vise at $\mathcal{D}$ er frembragt af en et-punktsmængde $\{i\}$. Lad $\mathcal{D} = \langle Y \rangle$, og antag at $i, j \in Y$ er forskellige. Se nu på mængden $\{i\} \subseteq I$. Da hverken $\{i\}$ eller $I \setminus \{i\}$ indeholder Y er de ikke medlemmer af $\mathcal{D} = \langle Y \rangle$. Men det er i modstrid med antagelsen om at $\mathcal{D}$ er et *ultra*filter[5]. □

Vi har nu nok værktøj til at bevise Arrows sætning og for den sags skyld til at gøre en masse andre spændende ting!

Beviset for Arrows sætning

Lad os sige at en funktion $f : T(A)^N \longrightarrow T(A)$ er **pseudo-fair** hvis den opfylder alle krav for en fair funktion, bortset fra

[5]Bemærk at anden del af lemmaet ikke afhænger af at I er endelig. Dvs. ethvert ultrafilter som er et principalfilter må være frembragt af en et-punktsmængde, også selvom I er uendelig.

diktatorkravet. Dvs. f er Pareto efficient, har ufhængighed af irrelevante alternativer og er invariant under alle permutationer af A, men det kan ske at der findes en diktator. Strategien for beviset vil være at vise at f *må* have en diktator.

Lad nu f være en vilkårlig pseudofair funktion. Betragt mængden $I_N = \{1, 2, \ldots, N\}$ af vælgere. En delmængde $X_{a/b} \in \mathcal{P}(I_N)$ vil siges at være en **koalition for** a **over** b hvis

- hver gang alle prioriteringerne P_i for medlemmerne $i \in X_{a/b}$ enstemmigt vælger $a > b$ så vil $P = f(P_1, \ldots, P_N)$ også have $a > b$.

En koalition for a over b kan altså tvinge den fælles prioritering med hensyn til a og b.

Lemma 6 *Hvis X er en koalition for a over b så er X en koalition for c over d for alle andre elementer $c, d \in A$.*

Bevis. Antag gerne at alle P_i for $i \in X$ vælger $c > d$. Vi skal vise at $P = f(P_1, \ldots, P_N)$ også prioriterer $c > d$. Da f er upartisk er f invariant overfor permutationen der bytter hhv. a med c, og b med d, og alt andet forbliver som det er. Da X er en koalition for a over b ser vi at $a > b$ og dermed at $c > d$ tvinges for P. □

Lemmaet betyder at en koalition X altid kan afgøre valget hvis $P_i = P_j$ for all $i, j \in X$. Vi siger nu at X er en **koalition** hvis X er en koalition for a over b $(a, b \in A)$.

Lad $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(I_N)$ være samlingen af alle koalitioner. Bemærk at $\mathcal{D}$ afhænger af funktionen f.

Lemma 7 *$\emptyset \notin \mathcal{D}$ og $I_N \in \mathcal{D}$. Hvis $X \in \mathcal{D}$ og $X \subseteq Y \subseteq I_N$ så er $Y \in \mathcal{D}$.*

Bevis. Følger umiddelbart af at f er Pareto efficient. □

Lemma 8 *Hvis X og Y tilhører $\mathcal{D}$ så tilhører $X \cap Y$ også $\mathcal{D}$.*

Bevis. Vælg tre alternativer, a, b og c fra A. Antag gerne at P_i for alle $i \in X \cap Y$ enstemmigt vælger $a > b$ og at alle andre P_j for $j \notin X \cap Y$ vælger $b > a$. Vi skal altså vise at $P = f(P_1, \ldots, P_N)$ også prioriterer $a > b$.

Da f er pseudofair er den specielt uafhængig af irrelevante alternativer. Så c's placering i $P_1, \ldots, P_N$ har ingen inflydelse på hvorvidt $a > b$ eller $b > a$ i den samlede $P = f(P_1, \ldots, P_N)$. Antag derfor gerne at alle medlemmerne af X vælger $a > c$. Antag videre at alle medlemmer i Y vælger $c > b$. Da $X \in \mathcal{D}$ må $P = f(P_1, \ldots, P_N)$ nødvendigvis vælge $a > c$. Ligelede må P nødvendigvis vælge $c > b$ da $Y \in \mathcal{D}$. Men da P er en ordning gælder der så at $a > c > b$. Specielt har vi $a > b$. Så $X \cap Y \in \mathcal{D}$. □

Lemma 9 *Hvis $X \subseteq I_N$ da er enten X eller $I_N \setminus X$ et element i $\mathcal{D}$.*

Bevis. Antag $I_N \setminus X \notin \mathcal{D}$. Dvs. at selv hvis alle medlemmer $j \in I_N \setminus X$ prioriterer på samme måde så kan medlemmerne af X tvinge en anden prioritering. Men det betyder netop at $X \in \mathcal{D}$. □

Af de ovenstående tre lemmaer følger nu:

Sætning 10 *$\mathcal{D}$ er et ultrafilter på I_N.*

Korollar 11 (Arrows umulighedssætning) *Hvis f er pseudofair da er f ikke fair.*

Bevis. Vi ved fra Sætning 10 at $\mathcal{D}$ er et ultrafilter på I_N. Da mængden I_N er endelig ved vi fra Lemma 5 at $\mathcal{D}$ er et principalfilter frembragt af en person $i \in I_N$. Dvs. at $\{i\}$ udgør en koalition, og dermed er i en diktator. □

Afslutning og afveje

Den samfundsmæssige fortolkningen af Arrows sætning i forhold til (u)muligheden for en fair aggregering af folks præferencer giver naturligvis anledning til en masse andre spørgsmål. Nogle af disse spørgsmål studeres indenfor den såkaldte "social choice theory".

Til sidst bør det nævnes at ultrafiltrets *raison d'être* er mere end bare at give et noget højniveau bevis for Arrows sætning. Ultrafiltre kan bruges til at give et mere konceptuelt bevis for kompakthedssætningen i modelteori. De kan bruges til at formalisere Leibniz' udgave af infinitisimalkalkulen således at $\frac{dx}{dy}$ rent faktisk er en brøk. Ifølge MathOverflow (`mathoverflow.net/`) spiller de endda en rolle i geometrisk gruppeteori i forbindelse med amenable grupper!

En stor del af denne artikel er inspireret af Wikipedias artikel om Arrows sætning. Ideen til det vigtige Lemma 8 kommer fra Taos lille notat [Tao]. For en god og spændende introduktion til ultrafiltre og ultraprodukter se [Eklof]. [6]

[6] Mange tak til Frederik Möllerström Lauridsen for ideer, nærlæsning, korrektur og foreslag til forbedringer! Alle de resterende mangler og fejl er selvfølgelig mine egne.

Litteratur

[Tao] Tao, Terence. *Arrow's Theorem*, math.ucla.edu/~tao/arrow.pdf.

[Eklof] Eklof, Paul C. *Ultraproducts for Algebraists*, fra *Handbook of Mathematical Logic* (ed. J. Barwise) North-Holland Pub. 1977

[Arrow] Arrow, Kenneth J. *A Difficulty in the Concept of Social Welfare*, udgivet i *The Journal of Political Economy* Vol. 58, No. 4, 1950

[Geanakoplos] Geanakoplos, John. *Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem*, Cowles Foundation for Research in Economics, Paper No. 1116., Yale Uni. 2005

Tegnet af Maria Bekker-Nielsen Dunbar

Opgaver for minimalisten

Nilin Abrahamsen

Blokkens præmieopgave (23. årgang nr. 3)

De reelle tal x, y, z opfylder:

$$x + y + z = 3$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 5$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 7$$

Hvad er $x^4 + y^4 + z^4$?

Blandt de korrekte besvarelser med dertil følgende bevis udtrækkes en vinder. Præmien lyder på et gavekort på 100 kr til GAMES.

Blokkens ekstraopgave (23. årgang nr. 3)

Vi siger, at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en løsning til den ***autonome*** *differentialligning*

$$x' = v(x) \tag{1}$$

hvis $f'(t) = v(f(t))$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

Sætning 1 *Hvis $v \in C^1$ (dvs. kontinuert differentiabel) på $f(\mathbb{R})$, så er to forskellige løsninger f og g til (1) faktisk forskellige i hvert eneste punkt t.*

Således løser $f(t) = t^3$ ikke (1) hvis $v \in C^1(\mathbb{R})$, for så skulle funktionen $g(t) = 0$ også løse (1), og de to ville være sammenfaldende i $t = 0$ i modstrid med sætningen.

Man har ofte en differentialligning og spørger efter en løsning f.
I dag vil vi stille det "modsatte"spørgsmål:
Opgave: *Hvilke begrænsede funktioner på $\mathbb{R}$ er løsning til en ligning som (1), hvor v er C^1 på **hele** $\mathbb{R}$?*
Du kan nøjes med at betragte $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. [7]

Svar bedes indsendt til `redaktion@famosweb.org` senest 1. april.

Løsninger til sidste bloks opgaver (23. årgang nr. 2)

Tusind tak til Janus Rønn Lind for hans besvarelse af præmieopgaven! Du har vundet et gavekort til GAMES eller en GBP efter eget valg. Og mange tak til Thor Baatrup Kampmann for hans svar på både præmie- og ekstraopgaven. Vi bringer et referat af hans flotte løsning af sidstnævnte.

[7] Bemærk, at besvarelse af denne opgave ikke udløser nogen præmie. Til gengæld får de læsere, der indsender en fyldestgørende besvarelse, deres navne offentliggjort i næste Famøs-blad i den rækkefølge, vi modtager jeres svar! Enhver af vores kære læsere, der korrekt besvarer fire på hinanden følgende opgaver, kan vælge at få trykt sit ansigt på forsiden af Famøs.

På besøg hos studenterambassadøren

Jingyu She

Som studerende kan du kontakte studenterambassadøren, hvis du er kommet i klemme i administrative sager om fx snyd eller dispensation. Tina er uddannet jurist fra Københavns Universitet og agerer som uafhængig part i disse sager, så hun er bestemt den rette at spørge til råds.

> "Jeg var ude og lave en måling, hvor jeg spurgte de studerende: "Kender I til, at der er en studenterambassadør?". Og der var der 9%, der svarede ja.
> Det, jeg altid siger, er: Brug funktionen. Der er ikke noget, der er for stort, der er ikke noget, der er for småt. Jeg skal nok give min ærlige vurdering. Så brug den, hvis du synes, du er kommet i en eller anden form for klemme, eller hvis du ikke rigtig ved, hvad du skal gøre. Det her er fuldstændig fortroligt. Man kan også komme for at få en snak i fortrolighed. Så kan man bagefter tage stilling til, hvad man selv vil gøre."
>
> Tina Kaare, Studenterambassadør

Profil

Navn:	Tina Kaare
Stilling:	Studenterambassadør
Telefon:	35 32 28 13
Kontortid:	Tirsdag, 12-15
Adresse:	Fiolstræde 1
Mail:	`studambassador@adm.ku.dk`
Hjemmeside:	`http://studenterambassadoer.ku.dk`
Facebook:	`facebook.com/Studenterambassadoer`

Indtryk

Jeg sidder på Tina Kaares kontor på Fiolbiblioteket over for Paludan Bogcafe. Hun sidder over for mig med et glad og forventningsfuldt smil. Tina har været studenterambassadør på Københavns Universitet i over et år og fungerer som en slags ombudsmand for de studerende. Der går høje reoler op langs to af væggene på kontoret. På en af hylderne står en samling af over tyve flodhestefigurer, ordnet efter størrelse. Det hjælper de studerende til at føle sig bedre tilpas, siger hun. Særligt, hvis de er mødt op for at tale om følsomme emner. Og så er de også meget hyggelige.

Studenterambassadøren i arbejde

Du er måske en smule i tvivl om, hvad det vil sige, at noget er en "sag". Hvad kan man henvende sig til studenterambassadøren med, og hvordan foregår det? Tina Kaare forklarer:

> De studerende kommer med rigtig mange forskellige spørgsmål og bekymringer, så det er rigtig svært at sige, hvad den typiske sag er. Man kan sige, jeg har haft

> flere henvendelser om snyd, altså folk, der er blevet mistænkt for at have snydt, eller der er en sag i gang omkring: har de snydt? Og så har jeg haft en del sager om dispensationsansøgninger. Det har været dispensation til ekstra eksamensforsøg, til at få lov til at læse på kandidaten samtidig med, at man er indskrevet på bachelor. Så selvom der har været flere dispensationssager, så har det været inden for forskellige områder. Og så har der også været flere udskrivningssager. Og det er jo fint, tænker jeg, fordi snyd og udskrivning er noget, der er virkelig indgribende for den studerende. Og så har der været alt muligt andet, spørgsmål omrking tilrettelæggelsen af uddannelse, omkring studieordninger.
>
> Jeg tror med studiefremdriftsreformen, kan man sagtens forestille sig, at der er flere, der kommer i klemme. Det er lidt svært at sige, men de studerende får rigtig travlt. Så alle de her dispensationsansøgninger, som man kunne forudsige – hvis sagsbehandlingstiden trækker ud, eller hvis de synes, de er blevet uretfærdigt behandlet og ikke får det, de søger, så er det oplagt at komme her.

Studenterambassadøren kan kontaktes gennem mail og telefon, og har desuden åbent kontor om tirsdagen mellem 12-15.[8] *Afhængig af sagens natur kan længden af en korrespondance variere mellem få timer til flere måneder:*

[8] Se venligst kontaktoplysninger øverst i artiklen.

Nogle sager kan klares ved mailkorrespondance. Nogle tager en uges tid. Med andre kommer de ind til et møde, og så er der noget, jeg skal undersøge. Jeg stiller måske den studerende nogle spørgsmål, de skal finde ud af. Det kan i virkeligheden godt køre over nogle måneder. Så det kommer an på spørgsmålet, de kommer med, og hvor indviklet det er. Nogle gange kan man også sidde og vente på for eksempel et svar fra administrationen. De har også mange ting, og sagerne skal jo behandles ordentligt. Så det er meget forskelligt, hvordan de enkelte sager forløber.

I fuld fortrolighed

I fritiden nyder Tina familie og venners gode selskab og at lave mad. Hun kan lide at løbe, vinterbade og dyrke yoga. På arbejdspladsen har Tina et mindre aktivt socialliv. Hun forklarer, at dette skyldes arbejdets særlige natur.

Jeg er uafhængig af universitetet, af den administrative ledelse, af de studerende, af bestyrelsen, af den daglige ledelse. Det skal jeg også værne om på en eller anden måde. Så jeg har ikke nogen kollegaer. Jeg er inviteret med til fællesadministrationens julefrokost. Jeg er tilknyttet Uddannelsesservice, som er en del af fællesadministrationen, og jeg refererer personalemæssigt til direktøren. Og så i øvrigt til bestyrelsen. Så mere uafhængig er jeg jo heller ikke, men jeg er jo ikke bundet af, at jeg skal mene det samme som rektoratet. Jeg vil ikke kalde det ensomt, men jeg står meget alene. Det er der ikke nogen, der har bedt mig

> om at være. Men det er meget vigtigt for mig, at jeg ikke lige pludselig bliver set som en del af Uddannelsesservice, eller en del af fællesadministrationen.
>
> Der er nogle, der kommer og siger: "Jeg vil gerne høre, hvad du har at sige om mine muligheder. Jeg vil ikke have, at du går videre med det." For eksempel hvis det er noget med en vejleder på et speciale. Det er helt ok. Hvis jeg henvender mig til fakultetet, så er det altid noget, jeg aftaler med den studerende, så den studerende ved, hvad det er, jeg henvender mig om.

For studenterambassadøren er det dog også vigtigt, hun er fuldstændig uafhængig. Dette indebærer også, at hun er uafhængig af de studerende.

> Jeg synes ikke, at min opgave er at udfordre systemet på, om vi kan gøre noget andet end det, der står i reglerne. Jeg er også uafhængig af de studerende. Men når en studerende kommer her, så ser jeg sagen fra den studerendes perspektiv i stedet for et lidt mere systemmæssigt perspektiv. Det betyder, at når jeg læser reglerne, så kan der være undtagelser, hvis der er særlige omstændigheder. Så kan det godt være, jeg ser anderledes på det, end administrationen normalt gør. Er der muligheder, som kan hjælpe den studerende her? Kan det gøres på en anden måde?

Når jeg spørger yderligere ind til, hvordan de studerende skal benytte sig af funktionen, er hun klar i mælet: Studenterambassadøren er ikke en ekstra klageinstans. Tina uddyber, hvilken funk-

tion, hun har:

> Jeg vil gerne have nogle værdier omkring det der med, at jeg altid ser sagen fra den studerendes perspektiv. At her er der altid tid til, at man kan lytte, og min opgave er at sende den studerende videre på en god måde. Og så også det med, at det jeg er optaget af, er at få sagerne løst. Og det er jeg i et godt samarbejde med fakulteterne. Det kan godt være, vi ikke altid kan blive helt enige, men måske kan vi finde en eller anden løsning, som vi alligevel er tilfredse med, alle sammen, og som måske kan lade sig gøre inden for administrationens rammer. Så det er det, jeg synes, funktionen her skal stå for. En af de ting, jeg også tænker omkring værdi, er, at den studerende altid skal have et ærligt svar. Det kan godt være, jeg ikke altid kan give dem det, de vil have, men så skal de have det at vide. Det er desværre rigtigt nok.

Vejen til KU

Man kunne undre sig over, hvilken karrierresti, der fører til arbejdet som studenterambassadør. Er det en særlig linje, man vælger på sit studie?

> Jeg læste jura, da jeg startede, og jeg har undervist på jura i mange år. De fleste vil enten gøre noget godt for verden, eller også så vil man være advokat og har en ide, som jeg selv havde, om, at så skulle man tjene enormt mange penge. Når det kommer til stykket, finder man ud af, at man er drevet af noget helt andet, og

så betyder lønnen ikke så meget. Jeg fandt hurtigt ud af, at det offentligretlige var meget mere interessant for mig. Det, jeg syntes var sjovt på udlændingeområdet, var, at det, vi lavede, betød så meget for vores brugere, som for eksempel dem, der havde søgt om forlængelse af opholdstilladelse. Det kan godt være, at vi lavede mange tusinde forlængelser om året. Man kunne godt få det indtryk, at det ikke var den store sag. Men den enkelte bruger, der sad og ventede på den, var enormt optaget af det. Og det er jo også det, jeg synes er sjovt. Det synes jeg også er sjovt her. Det der med, at der er nogle studerende i den anden ende, som jeg forhåbentlig gør en eller anden forskel for, eller hjælper videre på en god måde. Det, synes jeg, er super. Det er det, der driver mig.

Funktionen som studenterambassadør er noget, Studenterrrådet har bedt om i mange, mange år. Og så var det Penkowa-sagen, der gav mulighed for det. Der var en studerende, som kom i klemme. Så fik universitetet ikke taget rigtig godt hånd om den her studerende. Og det var det, der udløste den her funktion. Jeg så opslaget og tænkte, "Det lyder jo fuldstændig som mig." Jeg synes efter et år i stillingen, at funktionen udfylder et tomrum. Fordi der er nogle, der spørger: "Har vi virkelig brug for det?" Der er masser af andre: studenterpræster, studievejledere.

Spørgsmålet om, hvorvidt en funktion som studenterambassadørens er nyttig, besvares nemt ved at se på statistikkerne. Antallet af henvendelser er steget støt i løbet af 2013, og Tina fornemmer *også fra de studerendes tilbagemeldinger, at der er et behov:*

> Nu er det 134 studerende, jeg har talt med, men om et år så har jeg talt med forhåbentlig dobbelt så mange. Det med, at der lige pludselig er en person, der får det der indblik i: hvad er det, der foregår hos de studerende på tværs. Vi taler meget om den konkrete sag. Det, jeg oplever, som går igen, er, at de studerende synes, det er vanskeligt – de føler sig meget alene over for et stort system. Jeg har nogle tilbagemeldinger fra de studerende hængende på væggen. Det er min motivation. Der er en, der skriver: "Tusind tak, fordi du vil gå videre med min klage. Det er sin sag at slås med systemet alene". Og: "Det er rart at blive hørt, når man føler sig magtesløs". Det oplever jeg meget. At de studerende ikke føler sig hørt i den konkrete sag, og de føler sig meget magtesløse og lidt alene. Jeg oplever også, at det fylder enormt meget for dem at have den sag, de har med universitetet. Nogle gange også så meget, at det går ud over, hvad de i øvrigt skal lave.

Studenterambassadøren på campus

I løbet af 2013 er antallet af sager steget støt, men studenterambassadøren er den første af sin slags i Danmark, og det er ikke altid lige nemt at gøre de studerende opmærksom på, at funktionen eksisterer. I et forsøg på at synliggøre funktionen har studenterambassadøren bevæget sig ud på campus:

> I år vil jeg prøve at være ude på et campusområde hver torsdag. Der kan jeg rigtig godt tænke mig, at

studerende bare kom forbi og spørger: "Hey, jeg har tænkt over det og det, kan det virkelig passe?", så det bare bliver meget uformelt. Ude på Universitetsparken har jeg siddet i bygning E.

Jeg har en hjemmeside og en facebookside. Her omkring eksamensperioden har jeg lagt nogle retningslinjer ud for, hvad hvis du gerne vil klage over en eksamen, har du ret til en begrundelse, osv. Og så lægger jeg også alt muligt andet ind. I går lagde jeg en henvisning til studenterpræsterne, at man kunne bruge dem. Jeg tænker, at der heller ikke er så mange, der ved, at de er der, og hvad man kan bruge dem til. Jeg har været rundt med plakater og foldere, men det er rigtig svært, synes jeg, at få skabt den der bevidsthed hos de studerende om, at funktionen findes. Jeg håber, at hvis folk står og har behov for hjælp, så er der et eller andet, der ringer i baghovedet om: var der ikke et eller andet med en studenterambassadør? Hvis det hele bare kører, så skal man ikke spekulere så meget på det.

Ressourcestærke unge mennesker

Min samtale med Tina Kaare begynder at køre mere og mere ud af en tangent – en tangent, der ikke omhandler funktionen som studenterambassadør. Men jeg synes, det er spændende at tale med en person, der har været i kontakt med så mange forskellige fakulteter og deres studerende. Så jeg graver efter guldkorn og spørger Tina, om hun har gjort sig nogle generelle observationer, hvad angår nutidens studerende:

Da jeg var i styrelsen og ansatte nyuddannede jurister, når jeg så på deres CV og hvad de havde lavet, det var vildt imponerende. De havde været i udlandet, og dyrkede al mulig forskellig slags sport, og de havde frivilligt arbejde, og de havde også studiejob. I dag tror jeg ikke en kandidat har nok i alene at have en uddannelse. Og det synes jeg også er rigtig, rigtig fornuftigt. Alle de der ting, samlet set, tror jeg kunne være med til at presse de studerende.

Men det er jo også en meget stor opgave for nogen, der kommer på universitetet, som måske er 18-19-20 år. Jeg synes det hele er spændende, og jeg vil også gerne se alle de mennesker, jeg skal se, og jeg tror ikke, jeg er den eneste, der har det på den måde. Så lige pludselig har man for lidt tid. For lidt tid til sig selv, for lidt tid til at slappe af, får ikke lige tid til at læse det, man skulle læse. Nu har jeg jo en 37-timers arbejdsuge, og så kan jeg sidde her og sådan noget, men som studerende skal man virkelig kunne strukturere sin tid, på en helt anden måde.

Jeg oplever ikke, at de studerende kommer til mig og klynker. Jeg oplever tværtimod, at de tager et stort ansvar, også når der er noget der er gået galt: "Jeg ved godt, at jeg skulle have tænkt mig bedre om, men det gjorde jeg altså ikke, og hvordan kan jeg nu komme videre?" Al respekt for det. Det er ressourcestærke unge mennesker, der er glade for deres uddannelse.

Vores møde ophører efter en times udbytterig samtale. Med sin imødekommende personlighed har Tina Kaare bragt en masse på bordet, men kun halvdelen kan presses ind i den endelige artikel. Jeg takker hende for hendes tid, siger farvel og bevæger mig udenfor. Vi afslutter denne artikel med en opfordring og et løfte fra studenterambassadøren:

> Det er vigtigt at læse studieordningen, sætte sig ind i, hvordan den er bygget op, hvad det er, man skal, og planlægge sit studie, selvom jeg godt ved, det ikke lyder specielt sexet. Dog er min holdning stadigvæk, uanset om man ikke har sat sig ind i det, at når en studerende står i klemme, så vil jeg selvfølgelig prøve at hjælpe dem videre alt det, jeg overhovedet kan. Der vil jeg uanset hvad altid se det fra den studerendes perspektiv.

Induktion: fra naturlige tal til generaliseret skønhed

Dan Saattrup Nielsen

En artikel om induktion, hvordan er det overhovedet muligt? Det er jo trivielt!

Bevis ved induktion er en af de ældste matematiske bevismetoder – selv Euklids bevis for, at der findes uendelig mange primtal, benytter metoden. Normalt er induktionsbeviser udelukkende introduceret for naturlige tal, som f.eks. fra [1]:

Sætning 1 (Princippet om simpel induktion) *Lad $p(x)$ være et prædikat, hvor den frie variabel kan løbe over de naturlige tal $\mathbb{N}$. Såfremt $p(x)$ har følgende 2 egenskaber:*

1. *$p(1)$ er sand,*
2. *for hvert $m \in \mathbb{N}$, kan man af $p(m)$ slutte $p(m+1)$,*

da gælder $p(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Grundlaget for, at sådanne principper oftest kun defineres for de naturlige tal, er fordi de udspringer af *induktionsaksiomet*, som er en del af Peanos aksiomer for de naturlige tal, her taget fra [1] igen:

Definition 2 (Induktionsaksiomet) Hvis det om en delmængde $A \subseteq \mathbb{N}$ gælder, at $1 \in A$ og $m \in A \Rightarrow S(m) \in A$, så gælder at $A = \mathbb{N}$.[9]

Fra dette aksiom bevises princippet om simpel induktion, ved blot at benytte aksiomet på mængden $\{x \in \mathbb{N} \mid p(x)\}$. Men allerede her begynder vi at bevæge os *væk* fra tallene, da vores aksiom

[9] Her er $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ efterfølgerfunktionen givet ved forskriften $S(n) := n + 1$.

omhandler *mængder* og ikke tal. Burde dette princip så ikke kunne formuleres anderledes, så det også gælder for andre mængder end lige delmængder af $\mathbb{N}$?[10] Da aksiomet omhandlede mængder, vil vi prøve at gå i denne retning. Vi husker, at mængdelæren kan danne grundlaget for al matematik, så der må være aksiomer inden for mængdelærens aksiomer ZFC, der medfører induktionen. Ganske rigtigt finder vi *uendelighedsaksiomet*:

Definition 3 (Uendelighedsaksiomet) Der findes en mængde x, således at $\emptyset \in x$ og hvis $y \in x$, gælder også at $\{y\} \cup y \in x$.

Her er $\emptyset$ og $\{y\} \cup y$ mængdelærens svar på hhv. 0 og $y + 1$ (forklaring følger om lidt). Altså ses det med denne konvention, at aksiomet medfører at de naturlige tal findes, som vi definerer til at være den mindste mængde, som opfylder de to betingelser.[11] Herfra kan det bevises, at hvis $X \subseteq \mathbb{N}$ og X opfylder de to krav i uendelighedsaksiomet, må $X = \mathbb{N}$, da $\mathbb{N}$ som sagt er den mindste mængde, der opfylder kravene.

Men igen, vi er ikke rigtig kommet videre; vi arbejder stadig kun med de naturlige tal. Dette kan dog generaliseres til de "generaliserede" naturlige tal, kaldet *ordinaltallene*. Inden den formelle definition, forsøger jeg først med en intuitiv forståelse. De naturlige tal forstår vi som tallene $0, 1, \ldots$, men hvis vi i stedet vælger, at se dem som mængder $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ osv., ses det, at $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ *selv* må være et "tal", da den består af alle tidligere tal – dette tal $\mathbb{N}$ bliver normalt indenfor mængde-

[10] Den opmærksomme læser har måske allerede spottet et plausibelt positivt svar efter at have nærlæst artiklens overskrift.

[11] Det skal lige nævnes, at aksiomet ikke medfører, at der findes mere end én mængde, der opfylder det – dette kommer fra et andet aksiom i ZFC (potensmængdeaksiomet).

læren kaldt ω.[12] Hvis vi nu fortsætter af samme mønster, kan vi konstruere mængden $\omega+1 = \{0, 1, \ldots, \} \cup \{\omega\}$, altså alle de naturlige tal efterfulgt af mængden af alle de naturlige tal, og ligeledes $\omega + 2 = \{0, 1, \ldots\} \cup \{\omega, \omega + 1\}$. Det ses, at vi kan fortsætte i en uendelighed på denne måde - men selv "efter" uendelig lang tid når vi bare til $\omega + \omega$, og så kan vi begynde forfra igen. På samme vis kan vi opnå tal såsom $\omega \cdot \omega$, ω^ω og såvel tal som

$$\epsilon_0 := \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}},$$

der har specielle vigtige egenskaber.[13] Alle disse nævnte tal er ordinaltal. For at definere generelt, hvad et sådan tal (eller rettere, mængde) er, definerer vi først et par småting:

Definition 4 En mængde X kaldes *transitiv*, hvis $x \in y \in X$ medfører $x \in X$. Ækvivalent er X transitiv hvis $x \in X$ medfører $x \subseteq X$.[14]

Definition 5 En relation R kaldes *velordnet* på X hvis det er en lineær ordningsrelation på X, samt at enhver ikke-tom delmængde $x \subseteq X$ har et R-minimalt element x_0. Altså at der ikke findes $y \in X$, som opfylder yRx_0.

Herfra defineres vores ordinaltal som transitive mængder, der er velordnet efter relationen $\in$. F.eks. kan vi se eksempler på

[12] Dette gøres for at adskille den fra algebraiske strukturer over de naturlige tal, da vi ikke har operationer såsom $+$ og $\cdot$ i denne mængde.

[13] Dette tal har vigtige egenskaber inden for en del af bevisteorien, som prøver at analysere præcis hvor kraftige konsekvenser induktionsaksiomet (i talteoretisk forstand) har; denne gren kaldes *ordinal analysis*.

[14] Beviset for at disse definitioner er ækvivalente udgør en god øvelse for læseren til en bedre forståelse af konceptet.

transitiviteten ved at $0 \in 1 \in 2$ og samtidig også at $0 \in 2$. Denne ordningsrelation skrives også ofte som $<$; altså eksempelvis $0 < 1 < 2$.

Men det var et lille sidespring, det var jo induktionen vi kom fra! Vi prøver nu, at generalisere vores induktion fra at vise noget gælder for alle naturlige tal, til at noget gælder for alle ordinaltal. Det kommer ret naturligt ved følgende sætning, oversat fra [2]:

Sætning 6 (Generalisering 1: Induktion på ordinaltal) *Lad $P(x)$ være et prædikat omkring en variabel x. Antag at der for alle ordinaltal β gælder*

$$(\forall \alpha < \beta : P(\alpha)) \Rightarrow P(\beta).$$

Da gælder $P(\gamma)$ for alle ordinaltal γ.

Det ses, at hvis $\beta = \omega$, er det vores velkendte induktion over de naturlige tal. Man kan undre sig, hvordan at sætningen kan gøres så meget pænere ved "normal" induktion, hvor man slipper for, at vise, at det gælder for alle β *og* alle $\alpha < \beta$, hvor vi normalt bare kan fikse β og kun udføre sidste trin. Grunden til dette er, at samlingen af alle ordinaltal ikke er en mængde - dette modstrider ZFC, hvorfor vi ikke bare kan bruge dette argument.

Man kan dog simplificere denne induktionssætning lidt, så beviserne er mere overskuelige. Det drejer sig om en generaliseret egenskab ved de naturlige tal: disse tal kan alle deles op i to typer: enten er $n = 0$, ellers findes $m \in \mathbb{N}$ så $n = m + 1$. Ordinaltal har foruden disse to også en tredje type, som sker, når $n = \bigcup_{m<n} m$. Det ses f.eks. at ω er af denne tredje type. Et induktionsbevis kan derfor udføres, hvor at prædikatet vises for de tre typer.

Vi har altså nu generaliseret vores induktionsargument fra de små små naturlige tal til en uendelig gange større samling af ordinaltal – det er noget af et skridt! Men kan vi gøre det endnu bedre? Ordinaltal er jo blot specielle mængder, så kan vi generalisere det til endnu mere generelle mængder? Svaret er JA, men det bliver faktisk endnu vildere: vi kan generalisere det til samlinger, der ikke engang er i nærheden af, at være mængder.[15] Igen skal vi lige have en definition på plads:

Definition 7 En relation R er velfunderet på A, hvis enhver ikke-tom delmængde $X \subseteq A$ har et R-minimalt element.

Bemærk at A ikke behøver, at være en mængde selv. Vi bemærker også, at en velordnet relation er en velfunderet lineær ordningsrelation. Nu kan vi nå til den store finale, og opskrive vores elegante generaliserede induktionssætning, oversat fra [3]:

Sætning 8 (Generalisering 2: Induktion på velfunderede relationer) *Antag, at relationen R er velfunderet på A, og at $X \subseteq A$ er en ikke-tom delklasse. Så har X et R-minimalt element.*

Ved første øjenkast virker det slet ikke som noget, der har relevans for induktion. Men der er to måder, induktion kan virke på: enten viser man, at et prædikat holder for alle elementer i sin samling, eller også viser man, at hvis der fandtes et prædikat i samlingen, som *ikke* opfylder prædikatet, giver dette en modstrid. Her er vi ude i sidste mulighed, da vores samlinger ikke er ordnet på nogen måde (ikke engang partielt ordnede). Et induktionsbevis for et prædikat $P(x)$ på denne måde vil foregå ved, at antage at samlingen $X := \{x \in A \mid \neg P(x)\}$ ikke er tom, lade $a \in X$ være

[15] Som nævnt er ordinaltallene ej heller en mængde, men de er lige på grænsen. Dette kommer til udtryk ved, at hvis der tages et vilkårligt ordinaltal α, vil $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$, hvor β er ordinaltal, være en mængde. Man siger, at ordinaltallene er *mængdeagtige*.

et R-minimalt element, givet fra sætningen, og så vise, at dette giver modstrid.

Kan vi generalisere dette endnu mere? Svaret er nej, ikke inden for vores aksiomer. Faktisk eksisterer A, R og X ikke nødvendigvis, hvis disse ikke er mængder.[16] Dette løser vi, ved at sige, at vi kun bruger disse bogstaver som *forkortelser* for logiske formler $\rho(x, y)$ (der definerer R), $\alpha(x)$ (der definerer A) og $\chi(x)$ (der definerer X) – disse vil bare give nogle ret uoverskuelige sætninger, så vi foretrækker vores forkortelser, og behandler dem som om, de eksisterer.

For at afslutte dette, kan vi gå helt overkill, og bevise følgende sætning fra [1]:

Sætning 9 *For ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder, at summen af de første n ulige tal er lig med n^2, altså:*

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Bevis. Vi bemærker, at relationen $<$ er velfunderet på $\mathbb{N}$. Konstruér nu

$$X := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) \neq n^2\},$$

og antag at $X \neq \emptyset$. Lad x være et $<$-minimalt element af X. På grund af minimalitet gælder sætningen for alle $n < x$. Vi ved, at enten er $x = 0$ ellers findes $n \in \mathbb{N}$ så $x = n + 1$. Hvis $x = 0$ er de første 0 naturlige tal ikke lig med 0, modstrid; så lad $x = n + 1$.

[16] Her defineres eksistens som at samlingen kan bevises fra ZFC – dvs. kun mængder eksisterer.

Nu ser vi, at

$$
\begin{aligned}
&1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2\\
\Rightarrow &1+3+5+\ldots+(2(n+1)-1)=1+3+5+\ldots+(2n+1)\\
&\overset{(*)}{\neq}(n+1)^2=n^2+2n+1\\
\Rightarrow &1+3+5+\ldots+(2n-1)\neq n^2
\end{aligned}
$$

Ved (*) brugte vi, at $x = n+1$ og at sætningen ikke gælder for x. Men nu modstrider den første og sidste linje hinanden, og vi konluderer, at $X = \emptyset$, hvilket beviser sætningen. $\square$

Altså kan vi se, at selvom det generelle induktionsprincip virker, er vi stadig ude i noget basistilfælde og efterfølgertilfælde – så det gør det ikke ligefrem lettere at bevise ting vedrørende de naturlige tal på denne måde. Men nu ved vi i hvert fald, at lige meget hvad vi får smidt i hovedet (næsten), kan vi bevise prædikater induktivt på dem. Endnu vigtigere, så ved vi, at bag det knap så pæne princip om induktion på de naturlige tal, ligger et elegant princip om generel induktion. Inducér alt hvad du ser!

Litteratur

[1] J. Lützen. *Diskrete Matematiske Metoder*. Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, 2012

[2] E. Schimmerling. *A Course on Set Theory*. Cambridge University Press, 2011.

[3] K. Kunen. *Set Theory*, revised edition. College Publications, 2013.

Løsning på sidste bloks præmieopgave

Janus Rønn Lind

Opgaven: Du har brug for en pakke smøger og betaler med 8 mønter, hvoraf netop én er falsk og dermed vejer mindre end en ægte mønt. Kantinedamen fatter mistanke om, at den ene mønt er falsk. Hun har en vægt med to skåle, som kan vise hende, hvilken skål har det tungeste indhold. Kan kantinedamen finde den falske mønt ved at veje kun to gange? Kunne hun gøre det samme, hvis smøgerne havde kostet hhv. 9 eller 10 mønter?

Givet 3 mønter, hvor kantinedamen ved, at den ene er falsk, kan hun med én vejning identificere den falske mønt: Først vælger hun to vilkårlige mønter, og sammenligner deres vægt. Vejer de ikke det samme, kan hun uden videre udpege den letteste af mønterne som falsk. Vejer de det samme, må den tredje mønt være falsk.
Det er klart, at hun efter vejningen ikke må risikere at stå med en bunke, som indeholder 2 eller flere mønter, hvis ægthed hun ikke har bestemt. Hun kan derfor ikke være sikker på at finde den falske mønt med én vejning, hvis der er 4 eller flere mønter, da der ifølge skuffeprincippet vil være 2 eller flere mønter i enten vægtskålene eller i rest-bunken.
Givet 8 mønter, hvoraf netop én er falsk, kan hun vælge 2 bunker med 3 mønter i hver og ved vejning bestemme, om den falske mønt er i én af de to bunker. Er den det, kan hun finde den falske mønt med metoden beskrevet ovenfor. Vejer de lige meget,

må den falske mønt være blandt de resterende to mønter, og den kan dermed findes ved vejning. Svaret på første del af opgaven er altså: Ja!
Givet 9 mønter kan hun naturligvis igen dele mønterne i 3 bunker med 3 mønter i hver. Den eneste forskel fra tilfældet med 8 mønter er, at hun nu risikerer at have 3 mønter tilbage, hvis de to bunker, hun vejer, vejer det samme. Igen kan hun bruge metoden beskrevet ovenfor og finde den falske mønt blandt de tre resterende mønter.
Givet 10 mønter, kan hun ikke være sikker på at finde den falske mønt med 2 vejninger. Ved hver vejning (af to lige store bunker mønter) bestemmer hun jo, om den falske mønt ligger i den ene bunke, den anden bunke eller blandt de resterende mønter. Hun bliver altså (igen jvf. skuffeprincippet) nødt til at have mere end 3 mønter enten på vægtskålene eller i rest-bunken. (Generelt kan hun altså med sikkerhed finde den falske mønt blandt op til $3m$ mønter ved hjælp af m vejninger).

Bemærkning fra redaktionen:
Vores lidt vage formulering af opgaven tillader også den tolking, at kantinedamen ikke på forhånd er sikker på eksistensen af en falsk mønt. I dette tilfælde giver ovenstående metode både svar på, om der er en falsk mønt blandt de 8 og i så fald hvilken. For 9 mønter eller derover vil der være over 10 muligheder, mens to vejninger som bemærket ovenfor kun giver 9 mulige udfald, så her skal hun på forhånd vide, at der er en falsk mønt.

Løsning på sidste bloks ekstraopgave

løst af Thor Baatrup Kampmann

> Opgaven: Du har nu fået dig et studiejob i kantinen. I mellemtiden er de andre studerende blevet mere udspekulerede, så et vilkårligt antal af deres mønter er falske. En falsk mønt vejer 22/7 gram, og en ægte vejer π gram. Først efter en hel time i kassen kommer du i tanker om, at der er falske mønter i omløb. Du skal nu bestemme, hvor meget af kassebeholdningen udgøres af falske mønter. Du smider derfor hele kassebeholdningen på digitalvægten. (Vægten afrunder til nærmeste heltal) Du aflæser: $1084,247$ gram. (afrundet) Hvor mange mønter er falske?

De falske mønter er lidt tungere end de ægte: $\pi < 22/7$. Kantinedamen har r ægte mønter og f falske, hvilket giver ligningen:

$$\pi r + \frac{22}{7} f = 1084,247 + \epsilon \tag{1}$$

hvor $|\epsilon| \leq 0,5/1000$. Hun gætter på, at hun har $345 \approx 1084/\pi$ mønter. Dette er rigtigt, da:

$$344 \times \frac{22}{7} < 1084 \text{ og } 346 \times \pi > 1086$$

hvor venstresiden maksimerer vægten under antagelse af, at hun havde færre end 345 mønter, mens højresiden minimerer vægten

under antagelse af flere end 346.
Dette reducerer1 til den lineære ligning i f

$$345\pi + (\frac{22}{7} - \pi)f = \pi(345 - f) + \frac{22}{7}f = 1084,247 + \epsilon$$

med løsningen

$$f = \frac{1084,247 - 345\pi + \epsilon}{22/7 - \pi} = 314,38... + \frac{\epsilon}{22/7 - \pi}...$$

Men $22/7 - \pi > 1/1000$, så det sidste led er mindre end $\frac{0{,}5/1000}{1/1000} = 0.5$. Men så er f det eneste heltal med $|f - 314,38..| < 0.5$, dvs. der ligger 314 falske månter på vægten. Som Thor konstaterer: “kantinedamer er gode til hovedregning... :P”

FAMØS

FAMØS februar 2014
Fagblad for Aktuar, Matematik,
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Illustrationer:
Nilin Abrahamsen (Forside)
Maria Bekker-Nielsen Dunbar (På en øde ø)
Nilin Abrahamsen (σ-cykel)

Deadline for næste nummer:
1. april 2014

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til redaktion@famosweb.org – gerne i LaTeX
og gerne baseret på skabelonen
som kan hentes på hjemmesiden.

FAMØS er et internt fagblad.
Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
http://www.famosweb.org

Oplag: 400 stk.
Tryk: Frydenberg A/S ISSN: 1395-2145

23. årgang, nr. 3, februar 2014