FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
22. årgang, nr. 3, marts 2013

Fra serien 'Statistics Movies that never made it to the big screen'

Redaktion

Indhold

Sådan smager dit nærmiljø

– Vi afprøver diverse caféer og madsteder i nærheden af HCØ, så du tør tage chancen og prøve noget nyt

Rie Jensen og Katrine Gravesen

Har du nogensinde tænkt på, om græsset er grønnere på den anden side (af Fælledparken)? Det har vi testet og du vil i denne udgave kunne finde en guide til billig morgenmad og vinterkedelig caféstemning på Østerbro.

Café Bopa, ★★★★★★

Morgenmaden er, som I ved, dagens vigtigste måltid, men som studerende med en SU-reform i vente skal vi naturligvis tænke på økonomien. Frygter du, at du aldrig kan gå ud og spise lækker morgenmad igen, så fat mod! På Café Bopa på Bopa Plads (Løgstørgade 8) er morgenmad BILLIG! For 35 kr. kan du mandag-fredag fra 9-11.30 få en morgenmadsbuffet bestående af yoghurt med hjemmelavet (nice) müsli, frisk frugt, ost, skinke, chorizo, lækre hjemmelavede pandekager, smør, marmelade og hjemmebagt lunt brød. Det er ikke den velkendte brunch med æg og bacon, men vi blev mætte og manglede bestemt ikke noget. Vi fik juice og the til, som vi måtte slippe henholdsvis 27 kr. og 22 kr. for. Café Bopa er nok mest kendt som en bar/diskotek med lille dansegulv, og når man kommer til pladsen, frygter man et kort sekund, at nattens udskejelser stadig hænger i luften, men det er slet ikke tilfældet. Stemningen er hyggelig, betjeningen sød, og vi blev gerne siddende længe. Caféen tilbyder gratis Wifi, og vi har helt bestemt tænkt os at besøge Café Bopa igen. Specielt til sommer, hvor der er mulighed for at få en plads i solen. Billig morgenmad kan man jo aldrig få nok af!

Kafe Kapers, ★★★☆☆☆

På Gunner Nu Hansens Plads 2 finder du et glasbur. Her bor Kafe Kapers, som er en helt klassisk café (med c) med alt hvad det indebærer. Her kan du altså bl.a. få varme drikke, burger, salat, sandwich og nachos. Vi fik sidstnævnte (89 kr.), en café latte (37 kr.) og en husets luksus the (29 kr.). Mad og drikke var helt som det skulle være. Priserne er sat efter beliggenheden, og der gives ikke studierabat. Stedet er midt på dagen velbesøgt af områdets mange pensionister og mødregrupper. Der var også en enkelt jobsamtale ved nabobordet. Mange mennesker på glasburets lille areal medførte en god omgang larm og en ikke særlig intim stemning. Det er selvfølgelig en personlig holdning om dette er negativt eller ej. Er du til glas, højt til loftet og fancy frokost (og fancy navn), så er Kafe Kapers ikke noget dårligt bud. Der er mulighed for at sidde udendørs. Her har Kapers opstillet varmelamper, og du kan få et tæppe til benene. Så lige så snart temperaturen stiger en smule, og det ikke er nødvendigt at søge ind i buret for at få varmet fingrene, kunne antallet af stjerner til Kafe Kapers sikkert også se anderledes ud.

Vi glæder os til varme, sommerstemning og mere mad i det fri.

Kuratowskis afslutnings- og komplementopgave

Rune Esdahl-Schou

> Da jeg forleden en dag befandt mig i en lænestol forsynet med noget letlæst litteratur, i dette tilfælde Kelleys General Topology, faldt jeg over en interessant opgave, som jeg gerne vil dele med jer.

Før selve formuleringen af opgaven kommer her et par sætninger fra punktmængdetopologien der har motiveret idéen til opgaven. Givet en mængde A i et topologisk rum kan vi betragte afslutningen af A, denne mængde er som regel forskellig fra A selv. Men hvis vi betragter afslutningen af afslutningen af A ender vi blot med afslutningen af A. Sagt lidt mere præcist (og mindre forståligt), Kuratowskis afslutningsoperator er idempotent. Vi kan dog beskrive afslutningen af A ved at benytte os af komplementærdannelse og indre punkter, noget man ofte ser brugt i litteraturen. Således ser vi altså at komplementet til de indre punkter i A præcis er afslutningen af A's komplement. Dette leder til følgende opgave, oprindeligt formuleret af Kuratowski tilbage i 1920'erne:

Givet et topologisk rum og en delmængde A heri, hvor mange forskellige mængder kan man da konstruere udelukkende ved at benytte sig at afslutning- og komplementærdannelse?

De fleste kan nok hurtigt finde frem til en fem eller seks forskellige mængder, men her er det topologien der sætter grænsen, og ikke fantasien. Såfremt du ønsker selv at regne dig frem til svaret, bør du vente med at læse resten af artiklen.

I det følgende vil vi få brug for lidt notation for at gøre udregningerne lidt lettere. Til enhver delmængde A af et topologisk rum benytter vi derfor cA til at betegne komplementet til A og

aA til at betegne afslutningen af A. Som det allerede er nævnt gælder følgende to identiteter:

$$ccA = A,$$
$$aaA = aA.$$

Der gælder dog også en tredje og måske knap så åbenlyst identitet, nemlig følgende:

$$acacacacA = acacA.$$

For at indse at den tredje identitet gælder, lader vi iA betegne de indre punkter i A. Vi ser nu at

$$iA = cacA,$$

og dermed ved at tage afslutningen på begge sider

$$aiA = acacA.$$

Det er altså derfor nok at indse følgende identitet, som følger direkte fra definitionen af indre punkter og afslutning.

$$aiaiA = aiA.$$

Vi ser nu at vi kan besvare opgaven ved at se, hvor mange forskellige ord vi kan danne på de to bogstaver a og c uden at der optræder to a'er eller to c'er efter hinanden når $acacacac = acac$. Dette giver os følgende liste hvor vi er startet med c:

$$cA, acA, cacA, acacA, cacacA, acacacA, cacacacA$$

Tager vi afslutningen af den sidste, får vi som bekendt ikke noget nyt, så der er altså højst 7 nye mængder som er mulige på denne måde. Vi ser nu på listen hvor vi er startet med a:

$$aA, caA, acaA, cacaA, acacaA, cacacaA$$

Tager vi afslutningen af den sidste, ser vi at

$$\begin{aligned} acacacaA &= acacaca(ccA) &&= acacacac(cA) \\ &= acac(cA) &&= aca(cc)A &&= acaA. \end{aligned}$$

Vi ser altså at vi højst kan opnå 14 forskellige mængder. Dette leder dog hurtigt til et nyt spørgsmål: Findes der overhovedet så mærkelige topologiske rum hvor det kan lade sig gøre at konstruere 14 forskellige mængder på denne måde, og hvor syret en mængde skal man starte med?

Det er heldigvis ikke særlig svært at finde et topologisk rum og en mængde med de ønskede egenskaber. Faktisk kan vi finde en delmængde af de reelle tal der har den ønskede egenskab og det er selv om de reelle tal er udstyret med den euklidiske topologi! Mængden behøver faktisk heller ikke engang være specielt grim eller besværlig at skrive op, f.eks. virker følgende:

$$(0,1) \cup (1,2) \cup \{3\} \cup ([4,5] \cap \mathbb{Q}).$$

Det overlades som en opgave til læseren at vise denne mængde rent faktisk giver anledning til 14 forskellige mængder ved at benytte ovenstående.

Litteratur

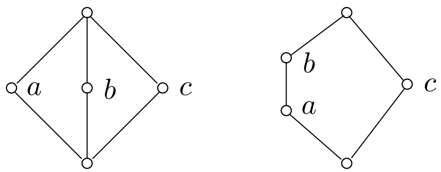
[1] John Kelley *General Topology*. Van Nostrand, 1955.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Kuratowski%27s_closure-complement_problem

$\mathbf{M}_3$-$\mathbf{N}_5$ sætningen
– Et dyk ned i gitterteorien

Dan Saattrup Nielsen

I denne artikel vil det vise sig, hvordan gitre kan klassificeres som ikke-distributive ud fra gitterdiagrammet alene, et fascinerende resultat fundet af Birkhoff [3]. Det viser sig, at man blot skal tjekke, om et af de to nedenstående gitre $\mathbf{M}_3$ eller $\mathbf{N}_5$ kan indlejres i det pågældende gitter.



$\mathbf{M}_3$ $\mathbf{N}_5$

Til at vise dette, skal der først bruges et lemma omkring modulære gitre:

Lemma 1 *Et gitter $\boldsymbol{L}$ er ikke-modulært, hvis og kun hvis der findes et delgitter $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{L}$ med $\boldsymbol{N}_5 \cong \boldsymbol{S}$.*

Bevis. $'\Leftarrow'$: I $\mathbf{N}_5$ ses det, hvor a, b, c er defineret ift. relationerne angivet i ovenstående hassediagram, at $a \leq b$, men $a \vee (b \wedge c) \neq b \wedge (a \vee c)$, som medfører at $\mathbf{N}_5$ er ikke-modulært. Dermed vil et gitter, med et delgitter isomorft til $\mathbf{N}_5$, heller ikke være modulært.

$'\Rightarrow'$: Antag at $\mathbf{L}$ ikke er modulær. Så vil der findes $a, b, c \in L$, som opfylder $a \leq b$, men $a \vee (b \wedge c) < b \wedge (a \vee c)$. Lad $a_1 := a \vee (b \wedge c)$

og $b_1 := b \wedge (a \vee c)$. Da gælder:

$$c \wedge b_1 = c \wedge (b \wedge (a \vee c)) = c \wedge (c \vee a)) \wedge b = c \wedge b$$
$$c \vee a_1 = c \vee (a \vee (b \wedge c)) = (c \vee (c \wedge b)) \vee a = c \vee a$$

Da $c \wedge b \leq a \vee (b \wedge c) = a_1 \leq b_1$ gælder at $c \wedge b \leq c \wedge a_1 \leq c \wedge b_1 = c \wedge b$, som betyder at $c \wedge a_1 = c \wedge b_1 = c \wedge b$. Analogt gælder at $c \vee b_1 = c \vee a_1 = c \vee a$. Det ses nu, at dette netop beskriver et gitter, isomorft til $\mathbf{N}_5$, bestående af c, a_1, b_1, $c \wedge a_1$ og $c \vee a_1$. $\square$

Sætningen kan da formuleres som:

Sætning 2 **($\mathbf{M}_3$-$\mathbf{N}_5$ sætningen)** *Et gitter $\boldsymbol{L}$ er ikke-distributivt, hvis og kun hvis der findes et delgitter $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{L}$, med enten $\boldsymbol{M}_3 \cong \boldsymbol{S}$ eller $\boldsymbol{N}_5 \cong \boldsymbol{S}$.*

Bevis. $' \Leftarrow '$: Da det hverken for $\mathbf{M}_3$ eller $\mathbf{N}_5$ gælder at $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, er begge ikke-distributive og med samme argument som i beviset for Lemma 1 følger det, at $\mathbf{L}$ er et ikke-distributivt gitter.

$' \Rightarrow '$: Antag at $\mathbf{L}$ er ikke-distributivt. Antag endvidere, at $\mathbf{L}$ er ikke-modulært. Per Lemma 1 kan $\mathbf{N}_5$ da indlejres i $\mathbf{L}$, og vi er færdige. Antag nu, at $\mathbf{L}$ er modulært. Ved ikke-distributiviteten findes elementer $a, b, c \in L$, som opfylder $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) < a \wedge (b \vee c)$. Definér nu:

$$\begin{aligned} d &:= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\ e &:= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) \\ a_1 &:= (a \wedge e) \vee d \\ b_1 &:= (b \wedge e) \vee d \\ c_1 &:= (c \wedge e) \vee d. \end{aligned}$$

Det ses let, at $d \leq a_1, b_1, c_1 \leq e$. Det vil vises at $d < e$. Først ses det fra absorptionsloven at

$$a \wedge e = a \wedge (b \vee c)$$

og ved brug af den modulære lov (bruges ved understregninger)

$$\begin{aligned}
a \wedge d &= \underline{a} \wedge (\underline{(a \wedge b) \vee (a \wedge c)} \vee (b \wedge c)) \\
&= ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) \vee (a \wedge (b \wedge c)) \\
&= (a \wedge b) \vee (a \wedge c)
\end{aligned}$$

følger det at $d < e$, ud fra ikke-distributivitetsantagelsen og den tidligere ulighed. Det vil nu vises, at diagrammet for $\mathbf{L}$ indeholder en kopi af diagrammet for $\mathbf{M}_3$, med $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, bund d og top e. For at vise dette, er det nok at vise at $a_1 \wedge b_1 = a_1 \wedge c_1 = b_1 \wedge c_1 = d$ og $a_1 \vee b_1 = a_1 \vee c_1 = b_1 \vee c_1 = e$. Vi viser at $a_1 \wedge b_1 = d$, resten forløber analogt. Modulære lov understreges igen:

$$\begin{aligned}
a_1 \wedge b_1 &= ((a \wedge e) \vee \underline{d}) \wedge (\underline{(b \wedge e) \vee d}) \\
&= ((a \wedge e) \wedge ((b \wedge \underline{e}) \vee \underline{d})) \vee d \\
&= ((a \wedge e) \wedge ((b \vee d) \wedge e)) \vee d \\
&= ((a \wedge e) \wedge e \wedge (b \vee d)) \vee d \\
&= ((a \wedge e) \wedge (b \vee d)) \vee d \\
&= (a \wedge \underline{(b \vee c)} \wedge (\underline{b} \vee (a \wedge c))) \vee d \\
&= (a \wedge (b \vee ((b \vee c) \wedge (a \wedge c)))) \vee d \\
&= (\underline{a} \wedge (b \vee \underline{(a \wedge c)})) \vee d \\
&= (a \wedge c) \vee (b \wedge a) \vee d \\
&= (a \wedge d) \vee d \\
&= d.
\end{aligned}$$

$\square$

Litteratur

[1] B.A Davey, H.A. Pristley. *Introduction to Lattices and Order, Second Edition*. Cambridge University Press, 2002.

[2] Stanley Burris, H.P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra, Millenium Edition*. Springer-Verlag, 2009.

[3] Garrett Birkhoff. *Lattice Theory, Third Edition*. American Mathematical Society, Colloquium Publications, 1967.

Abefest
– Løsninger til sidste bloks ekstraopgave

Sune Precht Reeh og Thor Kampmann Baastrup

Opgaveformulering for sidste bloks ekstraopgave

Peter Pedal og hans fire venner har været ude at plukke bananer. Da de er trætte, beslutter de sig for at vente med at fordele bananerne og lægger sig til at sove. I løbet af natten står Peter Pedal op og deler bananerne op i fem lige store bunker. Der er en banan tilovers, som han spiser. Han gemmer derefter sin egen bunke og lægger resten tilbage. Efter han har lagt sig til at sove, står en af vennerne op og gør det samme. Dette gentager sig for alle fem aber. Om morgenen deler de sammen bananerne op i fem lige store bunker, igen med en banan i rest, som går til manden med den gule hat[1]. Spørgsmålet er så: Hvor mange bananer kan der mindst have været i den oprindelige bunke?

Løsning af ekstraopgaven ved Sune

Lad b være antallet af bananer i bunken ved nattens begyndelse. Peter Pedal spiser en banan og deler resten i 5 bunker af størrelse n_1, dvs. $b = 1+5n_1$, hvorefter Peter Pedal skjuler n_1 af bananerne. Herefter er der $4n_1$ bananer i bunken.

Abe nummer 2, spiser en banan og deler resten i 5 bunker af størrelse n_2, dvs. $4n_1 = 1 + 5n_2$, og aben efterlader $4n_2$ bananer i bunken (og skjuler n_2 bananer). Således fortsætter natten: Abe 3 skjuler n_3 bananer, abe 4 skjuler n_4 bananer og abe 5 skjuler n_5 bananer; hvor vi har $4n_i = 1 + 5n_{i+1}$ for $i = 1, 2, 3, 4$.

[1] Peter Pedals adoptivfar

Da det bliver morgen, er der $4n_5$ bananer i bunken, og de bliver fordelt i 5 bunker af k bananer hver – samt en enkelt banan til "manden med den gule hat". Altså $4n_5 = 1 + 5k$.

Ved gentagen substitution udtrykker vi nu b ved k og får

$$b = 1 + \tfrac{5}{4}[1 + \tfrac{5}{4}(1 + \tfrac{5}{4}\{1 + \tfrac{5}{4}[1 + \tfrac{5}{4}(1 + 5k)]\})].$$

Vi forlænger med 4^5 og får en heltalsligning:

$$\begin{aligned} 4^5 b &= 4^5 + 4^4 5^1 + 4^3 5^2 + 4^2 5^3 + 4^1 5^4 + 5^5 + 5^6 k \\ &= \frac{5^6 - 4^6}{5 - 4} + 5^6 k = 5^6 - 4^6 + 5^6 k \\ &= 5^6(1 + k) - 4^6. \end{aligned}$$

Vi forkorter derefter straks med 4^5 igen:

$$b = 5^6 \cdot \frac{1 + k}{4^5} - 4.$$

Såfremt vi vil have en heltalsløsning, skal $5^6 \cdot \frac{1+k}{4^5}$ nødvendigvis være et heltal. 4 og 5 er dog indbyrdes primiske, så $c := \frac{1+k}{4^5}$ skal være heltallig. Omvendt vil enhver værdi af $c \in \mathbb{Z}$ give en heltallig løsning med $k = 4^5 c - 1$ og $b = 5^6 c - 4$. Det mindste ikke-negative løsningspar, fås ved $c = 1$ hvor $k = 4^5 - 1 = 1023$ og $b = 5^6 - 4 = 15621$.

Der var altså mindst 15621 bananer i bunken oprindeligt, og næste mulighed er 31246 bananer.

I tilfældet med 15621 bananer til start kan vi desuden oplyse, at Peter Pedal får tilraget sig $1 + n_1 + k = 1 + 3124 + 1023 = 4148$ bananer, mens abe nummer 5 kun får $1 + n_5 + k = 1 + 1279 + 1023 = 2303$ bananer, og stakkels "manden med den gule hat" får kun en enkelt banan (men han har trods alt heller ikke hjulpet med at plukke bananerne).

Løsning af ekstraopgaven ved Thor

Af oplysningerne fremkommer følgende ligninger, hvor b er antallet af bananer til start, og x_i, $i = 1, ..., 5$ er antallet af bananer, som abe nr i lægger til side, og x_6 er antallet af bananer, som hver abe får til slut:

$$\begin{aligned}
b &= 5x_1 + 1 \\
b &= 5x_2 + x_1 + 2 \\
b &= 5x_3 + x_2 + x_1 + 3 \\
b &= 5x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + 4 \\
b &= 5x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + 5 \\
b &= 5x_6 + x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 + 6
\end{aligned}$$

Det giver anledning til at skrive ligningssystemet op på matrixform efter at have rykket lidt rundt:

$$\begin{bmatrix}
1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
1 & -1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 4 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -5 & 0 & 5 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -5 & 6
\end{bmatrix}$$

Denne matrix kan ved rækkeoperationer omdannes til:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{15625}{1024} & \frac{11529}{1024} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3125}{1024} & \frac{2101}{1024} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{625}{256} & \frac{369}{256} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{125}{64} & \frac{61}{64} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{25}{16} & \frac{9}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Af den øverste række har vi altså:

$$b = \frac{11529}{1024} + \frac{15625}{1024} x_6$$

Siden både b og x_6 skal være heltal, skal der gælde at:

$$11529 + 15625 x_6 \equiv 0 \mod 1024,$$

dvs. at

$$265 + 265 x_6 = 265(x_6 + 1) \equiv 0 \mod 1024$$

Vi kan faktorisere 265 og 1024 for at se, om de har nogen fælles primfaktorer, for at tjekke om $x_6 + 1$ kan være mindre end 1024. Da $265 = 5 \cdot 53$ og $1024 = 2^{10}$, har de ikke nogen fælles primfaktorer, så der må gælde, at:

$$x_6 + 1 \equiv 0 \mod 1024, \text{ hvorved } x_6 \equiv 1023 \mod 1024.$$

1023 er altså mindste heltallige bud[2] på x_6, og sætter vi dette ind får vi:

[2] Vi ved endnu ikke, om denne værdi for x_6 giver heltallige værdier for øvrige x_i

$$\begin{aligned}
b &= \tfrac{11529}{1024} + \tfrac{15625\cdot 1023}{1024} &&= 15621\\
x_1 &= \tfrac{15621-1}{5} &&= 3124\\
x_2 &= \tfrac{15621-2-3124}{5} &&= 2499\\
x_3 &= \tfrac{15621-3-3124-2499}{5} &&= 1999\\
x_4 &= \tfrac{15621-4-3124-2499-1999}{5} &&= 1599\\
x_5 &= \tfrac{15621-5-3124-2499-1999-1599}{5} &&= 1279
\end{aligned}$$

Alle bunkerne er altså heltal. Dermed må $b = 15621$ være det mindste antal bananer, der var fra start.
Der er nogle aber, som får hård mave i morgen (manden med den gule hat er ret beskeden).

Præmieopgave

– nu med et twist!

Jingyu She

Blokkens præmieopgave (22. årgang nr. 3)

a) Find alle $x,\ y \in \mathbb{R}$, der opfylder $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$.
b) For vilkårlige $x,\ y > 0$ defineres $s = \min(x, y, \frac{1}{x} + \frac{1}{y})$. Find $\max(s)$.

Det sædvanlige gavekort til Games udloddes nu med et stokastisk præmiebeløb [3].

Blokkens ekstraopgave (22. årgang nr. 3)

Definer funktionen:

$$f : x \mapsto \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor,\ x \in \mathbb{R}$$

Hvor mange af de første 100 naturlige tal kan udtrykkes på denne form?[4].

Vores postkasse famos@math.ku.dk holder døgnåbent til og med 3. maj.

[3] Blandt de indsendte svar udtrækkes en potentiel vinder. Har personen indsendt en korrekt besvarelse af både *a)* og *b)*, udloddes et gavekortbeløb på 120 kr. Hvis den udtrukne kun har besvaret et af spørgsmålene, og dette svar er korrekt, udloddes et gavekortbeløb på 50 kr. Er der fejl i den udtruknes besvarelse, udloddes en gratis cookie i kantinen eller en terning...

[4] $\lfloor x \rfloor$ betegner værdien af floorfunktionen i x

Tilbagemelding fra sidst (22. årgang nr.2)

I sidste blok blev læseren bedt om at finde massen af en 120 g banan, efter procentdelen, som vand udgør af dens masse, er aftaget fra 75% til 70%. Det korrekte svar er 100 gram. Beviset overlades som en let øvelse til læseren. Endnu en gang vinder en førsteårsstuderende præmien – stort tillykke til Anders Druedahl ('12)! Du vil modtage dit gavekort på 103 kr snarest. Blokkens ekstraopgave, der bl.a. omhandlede bananspisning en masse, blev korrekt besvaret i følgende rækkefølge: Sune ('05)[5], Anders Druedal ('12) og Thor Kampmann ('12). Vi takker for den flotte indsats og medtager Sunes og Thors besvarelser som en separat artikel, se venligst næste side.

[5] Vi gør opmærksom på, at Sune er godt på vej til at få printet sit ansigt på forsiden af bladet [Præmieopgave FAMØS 12.4, og kun såfremt han ønsker det, red.]

Hvad vil videnskabsteori sige?
– Et uundværligt svar til de i ånden endnu fattige

Frederik Möllerström Lauridsen

> *Men - hvem, der ved et filosofisk spørgsmål endnu ikke er blevet taget af svimmelhed, har endnu ikke spurgt filosoferende.* – Martin Heidegger

I denne artikel vil vi *forsøge* at besvare spørgsmålet: Hvad vil videnskabsteori sige?

Hvad er videnskabsteori?

Til enhver videnskab[6] knytter sig en videnskabsteori. Dette skal ikke forstås som én teori om videnskaben, men som et mangfoldigt kompleks af spørgsmål til (og svar på) alle aspekter af denne videnskab. Som eksempler på disse kan nævnes:

Ontologiske spørgsmål Hvad er den ontologiske status af objekterne for videnskaben? D.v.s. eksisterer disse objekter og hvis ja, på hvilken måde eksisterer da disse objekter?

Epistemiske spørgsmål Hvilken epistemisk status har den videnskabelige viden? D.v.s. hvilken type viden er det videnskaben giver. Herunder kan - og bør - spørges til hvor sikker denne type viden er? Og hvordan denne type viden kan opnås?

Metodologiske spørgsmål De metodologiske spørgsmål deles traditonelt set ind i to kategorier: De *deskriptive spørgsmål*, altså spørgsmål til hvordan den pågældende videnskab faktisk bedrives og de *normative spørgsmål*, altså spørgsmål til hvordan den pågældende videnskab bør bedrives.

[6] Eller mere generelt til enhver akademisk disciplin, måske med undtagelse af filosofien selv.

Sociologiske spørgsmål Hvordan påvirkes videnskaben, de videnskabelige instutioner og ikke mindst videnskabsmænd- og kvinder af forskellige sociologiske og samfundsmæssige faktorer?

Antropologiske spørgsmål Påvirker den måde mennesker *er* på *i* verden den videnskabelige viden, og hvis ja hvordan og i hvilken grad?

Didaktiske spørgsmål Hvordan læres den pågældende videnskab og ikke mindst hvordan bør denne videnskab læres?

Fænomenologiske spørgsmål Hvordan opleves og udvikles den pågældende videnskabs enmefelt og objekter? Der spørges således til den *måde* hvorpå denne videnskab træder frem for os. Herunder kan også gøres neurovidenskabelige overvejelser.

Etiske spørgsmål Hvordan forpligter den opnåede viden den vidende moralsk? Og hvordan spiller etiske overvejelser ind på muligheden af at opnå viden inden for den pågældende videnskab?

Visse af ovenstående vil givetvis være mere relevante at stille til visse videnskabelige discipliner frem for andre. Desuden kan stilles almene spørgsmål som hvad konstituerer i det hele taget en videnskab og hvordan afgør man om noget er en videnskab eller ej, d.v.s man kan forsøge at opstille såkalte *demarkationskritererier* for videnskab.

Videnskabsteorien er således en spekulationens og empiriens bastard. Historisk set er de første typer spørgsmål blevet opfattet som den egentlige videnskabsteori, men de sidste 50 år har videnskabsteorien stillet sine spørgsmål bredere, særligt til hvordan en videnskab udvikles og praktiseres.

Hvordan bedrives videnskabsteori?

Det bør nævnes at de fleste hvis ikke alle af de ovenstående spørgsmål kan formuleres som almene filosofiske spørgsmål. Der vil således oftest være tale om at man som bedriver af videnskabsteori overvejer hvordan forskellige almene filosofiske positioners syn på for eksempel et begreb som viden eller eksistens påvirker den enkelte videnskab. Omvendt kan man også benytte sin forståelse af de enkelte videnskaber som eksempel på, eller modeksempler til, almene filosofiske positioner.

Man kan opfatte videnskabsteori som en art anvendt filosofi. Altså må den der ønsker at stille videnskabsteoretiske spørgsmål gøre sig bekendt med filosofien - i alle dens afskygninger - og være velbevandret inden for den enkelte videnskabelige disciplin. Dette betyder dog også at der ligesom inden for filosofien ikke findes nogen konsensus om hvordan videnskabsteori bør bedrives. D.v.s videnskabsteorien som sådan har ingen metode. Det kan således hævdes - og bliver her hævdet - at videnskabsteori ikke er en videnskab. Videnskabsteoriens eneste egentlige værktøjer er ligesom filosofiens: *tækning* og *spørgen*. Dens fornemmeste opgave er ej at give svar men at stille spørgsmål. Man må således som bedriver af videnskabsteori indstille sig på at blive taget af svimmelhed i mødet med spørgsmål der tiltrods for deres tilsyneladende ufravigelige vigtighed ikke synes at lade sig besvare tilfredsstillende.

Hvorfor bør videnskabsteori bedrives?

Slutteligt vil vi her forsøge at besvare det eneste egentligt relevante spørgsmål i denne artikel; nemlig hvorfor bør vi i det hele taget kere os om videnskabsteoretiske spørgsmål? Dette vil forhåbentligt også besvare spørgsmålet om hvorfor det fra universitetets side kan forsvares at afsætte 7.5 ECTS-point til et kursus som Videnskabsteori for de Matematiske Fag.[7]

Som nævnt handler videnskabsteori primært om spørgsmål ikke om svar. Og god videnskabsteori handler om ubehagelige spørgsmål hvortil der ikke umiddelbart gives tilfredsstillende svar. Videnskabsteori handler således ikke, som den uskyldige kunne foranledes til at tro, om viden, men derimod om usikkerhed og tvivl. Dermed er det umiddelbart også vanskeligt at argumentere for at et kursus som Videnskabsteori for de Matematiske Fag gør universitets dimittender til bedre matematikere, aktuarer etc. Dette mener jeg heller ikke at det gør - måske snarere tværtimod.

Det som videnskabsteori derimod gør er at myndiggøre de studerende *som* matematikere, aktuarer etc.. Det vil sige det gør det muligt for dem at tage ejerskab over deres eget fag og dermed muligt for dem at tage beslutninger - der kun da for alvor kan kaldes selvstændige - *inden for*, *uden for* og ikke mindst *med* deres fag. Dermed er det også en myndiggørelse af de studerende som mennesker i en tid der nu som altid er betænkelig.

Videnskabsteori skal således i denne betænkelige tid åbne op for før-, under- og eftertanke hos den der lærer og bedriver videnskab. Jeg ser således ikke videnskabsteori som en disciplin der med sin påpegning af diverse filosofiske problemer skal afholde en fra at bedrive videnskab, men nærmere sætte en i stand til at bedrive videnskab i dette problemfyldte far(e)vand. Videnskabsteori handler i sidste ende ligesom videnskaben om problemer, forklaringer og argumenter.

Fornuften tilstår alene det, der kan stå for dens frie og offentli-

[7] Et fag hvis eksistens i skrivende stund er med til at betale forfatteren til nærværende artikles husleje. Således skulle der ikke være tvivl om eventuelle interessekonflikter.

ge prøvelse, uforstillet agtelse. En prøvelse som ingen videnskab i kraft af sin hellighed eller overhøjhed bør unddrage sig.[8] Som et forsøg på besvarelse af spørgsmålet hvad er videnskabsteori, kunne man således hævde at videnskabsteori netop er denne prøvelse. I dette tilfælde må videnskabsteori siges at være et positivt formuleret projekt der - forhåbentligt - gør det muligt for os uforstillet at agte på ulige menneskelige bedrifter.[9]

[8] Her en skamløs parafrasering af Kant.

[9] Her skal lyde en stor tak til Stud.fil. Søren Axel Petersen for uundværlig korrekturlæsning på denne artikel, samt for en mængde konstruktive forslag til forbedringer af helt igennem håbløse formuleringer.

Har du lyst til at holde et studenterkollokvium?

– Hvis ikke så overvej at få det!

Marcus Dorph de Chiffre & Kristian Knudsen Olesen

Et studenterkollokvium er et foredrag for studerende, der som oftest holdes af studerende. Har du lige skrevet bachelorprojekt, er du i gang, eller har du et emne der interesserer dig, så overvej at holde et studenterkollokvium, hvor du kan fortælle andre matematikstuderende om dit emne, til et hyggeligt og afslappet arrangement.

Studenterkollokvier retter sig mod alle, der har noget på hjerte, og kan handle om nærmest hvad som helst; det kan være på et hvilket som helst niveau. Efter arrangementer vil der blive serveret øl i køkkenlokalet ES01 i matematikbygningen, til studentervenlige priser. Desuden vil foredragsholderen modtage et par flasker specialøl af arrangørerne.

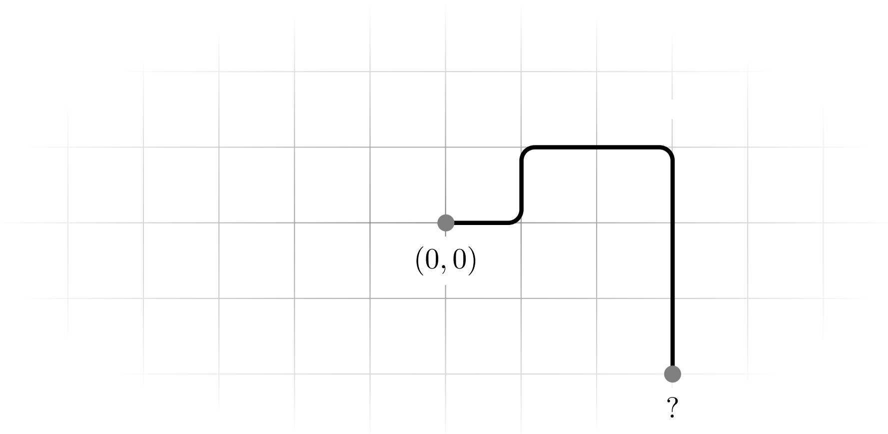
Arrangementerne foregår typisk en fredag eftermiddag, og der bliver hængt sedler op omkring matematkkantinerne, circa en uge i forvejen. Er det noget for dig at holde et studenterkollokvium, så skriv en email til `sk@math.ku.dk`, så står vi for at arrangere kollokviet. Mere information kan findes på `math.ku.dk/sk`.

En central grænseværdisætning for den fri gruppe

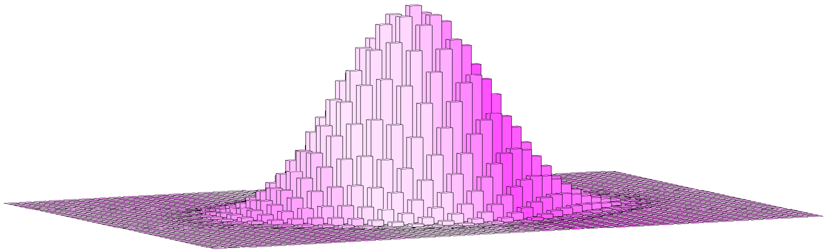
Nilin Abrahamsen

Denne artikel giver en forenklet udgave af en central grænseværdisætning [PR05] af Petridis og Risager for den fri gruppe på $m \geq 2$ frembringere.

Forestil dig, at du sidder på din cykel ved vejkrydset $(0, 0)$ i byen $\mathbb{Z}^2$. Hvert punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ er et vejkryds, og fra hvert (x_1, x_2) går en 1 km lang vej til hvert af de fire kryds $(x_1 \pm 1, x_2)$ og $(x_1, x_2 \pm 1)$. Du vil nu køre en tur rundt i $\mathbb{Z}^2$, og ved hvert kryds vælger du tilfældigt, om du vil fortsætte mod højre, venstre eller ligeud. Ingen u-vendinger er tilladt!
Hvor mon du ender efter en sådan tilfældig tur?



Bemærk, at valgene af retning væk fra første, andet, tredje osv. kryds på ruten ikke er indbyrdes uafhængige: F.eks. kan du ikke køre mod øst og derpå mod vest ved det følgende kryds.[10]
Med en smule omhu kan man udforme en algoritme, som lader en computer udregne sandsynligheden for at ende i et givet punkt efter n kilometer. Det kræver dog, at n ikke er for stor. Vi kan visualisere sandsynligheden for at ende et givet sted efter 20km:



Figur 1 (tæthed for) sandsynlighedsfordelingen for din position i $\mathbb{Z}^2$ efter at have kørt 20km tilfældigt rundt.

Men hov, sikke en fin klokkeform! Har dette noget at gøre med normalfordelingen?
Vi viser i denne artikel, at endepunkterne for de beskrevne ruter er *asymptotisk normalfordelte*, når ruternes længder går mod ∞.

Lad os navngive hver mulig (endelig) rute fra $(0,0)$ i $\mathbb{Z}^2$. Vi skriver a_1 for retningen øst og a_2 for nord. Vest og syd er hhv. a_1^{-1} og a_2^{-1}. Vi lader et ord af bogstaver fra alfabetet $\{a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}\}$ svare

[10] Pga. denne afhængighed kan vi ikke anvende den klassiske centrale grænseværdisætning. Man kunne dog se cykelturen som en Markovproces, hvor vi nyder godt af en "asymptotisk uafhængighed". Se [ILK71]

til følgende rute: Begynd i punktet (0,0) og læs ordet igennem fra venstre – for hvert bogstav i ordet kører vi længden 1 i retningen angivet af bogstavet. Bemærk, at forbuddet mod u-vendinger forhindrer ord, hvor a_j og a_j^{-1} støder op til hinanden ($j = 1, 2$). Mængden af sådanne ord, hvor formationen $a_j a_j^{-1}$ og $a_j^{-1} a_j$ ikke optræder, kan påføres en gruppestruktur og kaldes den fri gruppe på 2 frembringere, som vi nu skal se:

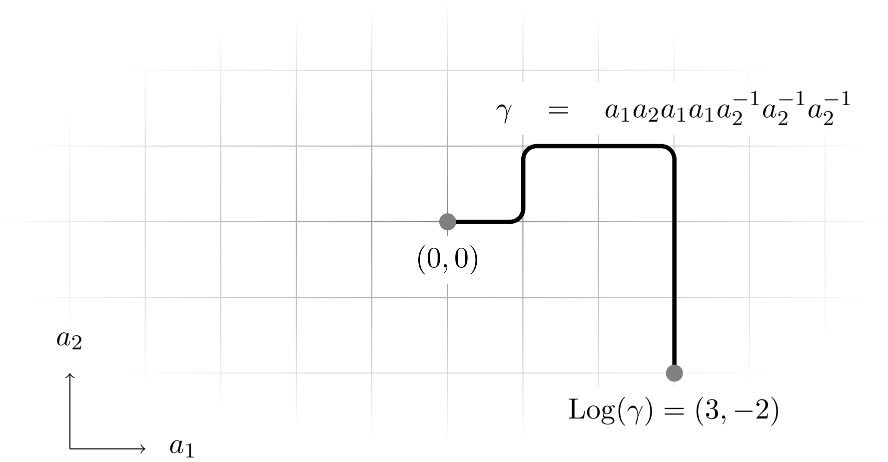
Den fri gruppe $\Gamma = F(a_1, \dots, a_m)$

Mere generelt kan vi, for $m \in \mathbb{N}$, konstruere den fri gruppe $F(a_1, \dots, a_m)$ på m frembringere som mængden af ord bestående af bogstaverne $a_1, \dots, a_m$ og $a_1^{-1}, \dots, a_m^{-1}$, hvor a_j og a_j^{-1} ikke støder op til hinanden for $j = 1, \dots, m$. Produktet $w_1 w_2 \in F(a_1, \dots, a_m)$ af elementerne $w_1, w_2 \in F(a_1, \dots, a_m)$ i gruppen er givet som det ord, der fremkommer ved at skrive ordet w_1 til venstre for w_2 og herefter fjerne alle par $a_j a_j^{-1}$ og $a_j^{-1} a_j$ i det resulterende ord. Det tomme ord $\mathfrak{e} \in F(a_1, \dots, a_m)$ er neutralelementet, og det inverse element til et ord fremkommer ved at skrive bogstaverne i omvendt rækkefølge og bytte a_j og a_j^{-1} ud med hhv. a_j^{-1} og a_j.
Vi vil betragte problemet for $m \geq 2$. Lad derfor $m \in \{2, 3, 4 \dots\}$ være givet. Vi indfører betegnelsen $\Gamma = F(a_1, \dots, a_m)$ for den fri gruppe på m frembringere.

Endepunktet for en rute

Vi kan definere en homomorfi fra $\Gamma = F(a_1, \dots, a_m)$ til den additive gruppe $\mathbb{R}^m$ ved

$$\mathrm{Log} : a_j \mapsto e_j \qquad \text{for} \quad j = 1, \dots, m, \tag{1}$$



hvor e_j er den j'te enhedsvektor i $\mathbb{R}^m$. Som før beskrevet betegner hvert ord i Γ en rute i $\mathbb{Z}^m$, hvor det k'te bogstav angiver retningen fra det k'te punkt på ruten. Den j'te koordinat af $\mathrm{Log}(\gamma)$ er lig med antallet af gange, a_j optræder, minus antallet af gange, a_j^{-1} optræder i ordet γ. Men dette er netop j'te koordinat for slutpunktet af ruten, hvis den begynder i $(0,\ldots,0)$. $\mathrm{Log}(\gamma)$ er hermed den vektor, som beskriver slutpunktet for ruten svarende til γ.
Vi betegner mængden af elementer i Γ med ordlængde n ved

$$\Gamma_n := \{\gamma \in \Gamma | wl(\gamma) = n\}$$

svarende til ruter af længde n. Vi lader Y_n være en ligefordelt stokastisk variabel på $\Gamma_n \subset \Gamma$, dvs. at Y_n repræsenterer en tilfældig rute af længde n. Det vises, at fordelingerne af de transformerede variable $\mathrm{Log}(Y_n)/\sqrt{n}$ *konvergerer* svagt mod normalfordelingen på $\mathbb{R}^m$ med variansmatrice $\Sigma = \frac{1}{m-1} I$, hvilket vil sige:

Sætning 1 (forenklet variant af [PR05], Petridis og Risager) *Lad Y_n være ligefordelt på Γ_n. For enhver Borelmængde $B \subset \mathbb{R}^m$, hvor Lebesgue-målet af ∂B er 0, gælder*

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{Log}(Y_n)}{\sqrt{n}} \in B\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{m-1}{2\pi}\right)^{r/2} \int_B e^{-\frac{m-1}{2}\|x\|^2} dx$$

Her kan venstresiden skrives

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{Log}(Y_n)}{\sqrt{n}} \in B\right) = \#\left\{\gamma \in \Gamma_n \middle| \frac{\mathrm{Log}(\gamma)}{\sqrt{n}} \in B\right\} \Big/ \#\Gamma_n$$

($\#S$ betegner antallet af elementer i S, mens $\mathrm{P}(U)$ står for sandsynligheden af udfaldet U.)

Ovenstående er en forenklet udgave af en sætning [PR05] af Petridis og Risager, som tæller *cyklisk reducerede* gruppeelementer i den fri gruppe ved at arbejde med *Iharas Zetafunktion*. En lignende sætning vises også i [Riv10].
Vi går nu i gang med at bevise sætning 1. Uden at afbryde sammenhængen kan man dog springe frem til side 47 for at se en anvendelse af sætningen.

Strategi

Vi vil forstå fordelingen ν af en stokastisk variabel X igennem dens *karakteristiske funktion* [Bil95] $f_\nu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, defineret ved:

$$f_\nu(t) = \mathrm{E}\left[\exp(it \cdot X)\right] \tag{2}$$

hvor $\mathrm{E}\exp(it \cdot X)$ betegner middelværdien af variablen $\mathrm{E}\exp(it \cdot X)$. Vi kalder også f_ν for den karakteristiske funktion for X.
Vi vil vise vores konvergensresultat vha. Lévys konvergenssætning, som behandles i [Bil95, s. 383]:

Sætning 2 (Lévy) *En følge ν_n af fordelinger konvergerer svagt mod en fordeling ν, netop hvis de karakteristiske funktioner f_{ν_n} konvergerer punktvis mod den karakteristiske funktion f_ν.*

Definition 3 At fordelingerne ν_n for stokastiske variable X_n *konvergerer svagt* mod ν betyder per definition, at $\mathrm{P}(X_n \in B) \to \nu(B), n \to \infty$ for Borelmængder B, hvor ∂B har Lebesgue-mål 0.

Vi håber på at kunne normalisere fordelingerne μ_n af $\mathrm{Log}(Y_n)$ med en funktion $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, således at fordelingerne ν_n for $\eta(n)\,\mathrm{Log}(Y_n)$ konvergerer for $n \to \infty$. Vi kan skrive den karakteristiske funktion f_{ν_n} som

$$f_{\nu_n}(t) \quad = \quad \mathrm{E}\left[\exp(it \cdot \eta(n)\,\mathrm{Log}(Y_n))\right] \quad = \quad f_{\mu_n}(\eta(n)t)$$

Konvergensen af de normaliserede fordelinger vil følge, hvis $f_{\nu_n}(t)$ konvergerer punktvis mod den karakteristiske funktion for en fordeling ν:

$$f_{\nu_n}(t) = f_{\mu_n}(\eta(n)t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_\nu(t) \ \forall t \in \mathbb{R}^m$$

Vi ønsker altså at forstå de karakteristiske funktioner $f_{\mu_n}(\epsilon)$ for fordelingerne af $\mathrm{Log}(Y_n)$, så vi kan substituere $\epsilon = \eta(n)t$.
Da Y_n er ligefordelt på Γ_n, giver (2) den karakteristiske funktion for $\mathrm{Log}(Y_n)$ som

$$f_{\mu_n}(t) = \mathrm{E}\left[\exp(it \cdot \mathrm{Log}(Y_n))\right] = \frac{1}{\#\Gamma_n} \sum_{\gamma\in\Gamma_n} \exp(it \cdot \mathrm{Log}(\gamma)) \quad (3)$$

Vi vil udregne ovenstående, så vi kan vise konvergensen af $f_{\nu_n}(t) = f_{\mu_n}(t/\sqrt{n})$ for $n \to \infty$. Det vil følge, at fordelingerne ν_n af følgen $\mathrm{Log}(Y_n)/\sqrt{n}$ konvergerer svagt mod en normalfordeling.

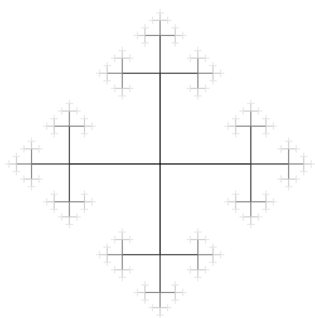
Spektralteori på et træ

Lad Y_n være ligefordelt på $\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma | wl(\gamma) = n\}$. Den karakteristiske funktion f_{μ_n} for $\mathrm{Log}(Y_n)$ bestemmes ud fra summen

$$\#\left(\Gamma_n\right) f_{\mu_n}(\epsilon) = \sum_{wl(\gamma)=n} \exp\left(i\epsilon \cdot \mathrm{Log}(\gamma)\right) \tag{4}$$

Dette og følgende afsnit om $q+1$-regulære træer er en forenklet variant af idéer fra [VN94], hvor tilsvarende metoder bruges til blandt andet at give en formel for *Iharas Zetafunktion.*

Vi indfører Cayley-grafen $X(\Gamma, S)$ for Γ: Vi har defineret Γ som den fri gruppe på de m bogstaver i mængden $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Lad mængden af knuder i $X(\Gamma, S)$ være Γ, og lad hver knude $\gamma \in \Gamma$ være forbundet til de $2m$ knuder på formen $\gamma\delta$, hvor $\delta \in S := \{a_1, \ldots, a_m, a_1^{-1}, \ldots, a_m^{-1}\}$. $X(\Gamma, S)$ er et træ, dvs. grafen har ingen cykler eller løkker, og vi vil kalde neutralelementet $\mathfrak{e} \in \Gamma$ for træets rod. Generelt vil vi lade $\mathfrak{o}$ betegne roden i et træ.



Figur 2 Cayley-grafen for den fri gruppe $\Gamma = F(a_1, a_2)$ på 2 frembringere

Vi vil opbygge den følgende teori for et $q+1$-regulært træ X, dvs. et træ, hvor præcis $q+1$ kanter er forbundet til hver knude. Mængden af knuder i X betegnes $vert(X)$. Forskellen fra at arbejde direkte på Γ er, at vi ikke begrænser os til at $q+1$ er lige. Givet $v, w \in vert(X)$ skriver vi $d(v,w)$ for den geodætiske afstand mellem v og w, dvs. længden på den korteste sti fra v til w.
Vi skriver $\chi_\epsilon(\gamma) := \exp(i\epsilon \cdot \mathrm{Log}(\gamma))$. χ_ϵ er en karaktér på Γ, dvs. en gruppehomomorfi $\Gamma \to \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$:

$$\begin{aligned}\chi_\epsilon(w_1 w_2^{-1}) &= \exp(i\epsilon \cdot \mathrm{Log}(w_1 w_2^{-1})) \\ &= \exp(i\epsilon \cdot \mathrm{Log}(w_1) - i\epsilon \cdot \mathrm{Log}(w_2)) = \chi_\epsilon(w_1)\chi_\epsilon(w_2)^{-1}\end{aligned}$$

Vi indfører følgende notation:

Notation 1 Lad $\mathbb{C}^{vert(X)}$ være rummet af funktioner $vert(X) \to \mathbb{C}$.

Vi definerer nabooperatoren $\mathrm{T}_1 : \mathbb{C}^{vert(X)} \to \mathbb{C}^{vert(X)}$, der sender en funktion $\phi : vert(X) \to \mathbb{C}$ til $\mathrm{T}_1 \phi : vert(X) \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\mathrm{T}_1 \phi : v \longmapsto \sum_{d(v,w)=1} \phi(w)$$

Vi bemærker, at χ_ϵ er en egenfunktion for T_1. Der gælder nemlig, at

$$\begin{aligned}[\mathrm{T}_1 \chi_\epsilon](\gamma) &= \sum_{wl(\delta)=1} \chi_\epsilon(\gamma\delta) \\ &= \sum_{wl(\delta)=1} \chi_\epsilon(\gamma)\chi_\epsilon(\delta) = \left(\sum_{wl(\delta)=1} \chi_\epsilon(\delta)\right)\chi_\epsilon(\gamma) \qquad (5)\end{aligned}$$

så χ_ϵ er en egenfunktion svarende til egenværdien $\sum_{wl(\delta)=1} \chi_\epsilon(\delta)$. Vi vil bruge denne egenskab ved χ_ϵ til at summere den over en "cirkel med radius n" som i udtrykket (4) for den karakteristiske funktion.
Scenariet er altså følgende: Lad X være et $q+1$-regulært træ, og lad operatoren T_1 være givet som ovenfor. Givet en egenfunktion ϕ for T_1 ønsker vi at udregne

$$\sum_{d(\mathfrak{o},w)=n} \phi(w) \tag{6}$$

Summen (6) specialiserer til (4), når vi lader X være Cayley-grafen for Γ, så $vert(X) = \Gamma$, og vi vælger $\phi(\gamma) = \chi_\epsilon(\gamma) = \exp\left(i\epsilon \cdot \mathrm{Log}(\gamma)\right)$.

Integraloperatorer

Vi generaliserer T_1 med følgende familie af operatorer:

Definition 4 ([VN94]) For $n = 0, 1, \ldots$ definerer vi operatoren $\mathrm{T}_n : \mathbb{C}^{vert(X)} \to \mathbb{C}^{vert(X)}$ ved:

$$\left[\mathrm{T}_n(\phi)\right](v) := \sum_{d(v,w)=n} \phi(w) \qquad \text{for} \quad \phi : vert(X) \to \mathbb{C} \tag{7}$$

Vi vil vise, at enhver funktion ϕ med $\mathrm{T}_1(\phi) = \lambda\phi$ er egenfunktion for *alle* operatorerne T_n. Denne egenskab tillader os at finde den ønskede sum

$$\sum_{d(\mathfrak{o},w)=n} \phi(w) = \left[\mathrm{T}_n(\phi)\right](\mathfrak{o}) = \lambda_n \phi(\mathfrak{o})$$

hvis vi kan finde egenværdien λ_n hørende til ϕ under operatoren T_n. Vi begynder med at vise, at T_n kan konstrueres ud fra T_1:

Lemma 5 ([VN94]) *Givet $n \in \mathbb{N}_0$ findes koefficienter $c_n^1, \dots, c_n^n \in \mathbb{Z}$ så*

$$\mathrm{T}_n = \sum_{j=0}^{n} c_n^j \, \mathrm{T}_1^j$$

Bevis. Påstanden gælder for $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_1^0$ og for T_1. Vi finder et rekursivt udtryk for T_{n+1} ud fra T_{n-1} og T_n og viser lemmaet ved induktion. Lad os først betragte sammensætningen $\mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_n$.

$$\begin{aligned}
[\mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_n(\phi)](v) &= \sum_{d(v,v')=1} [\mathrm{T}_n(\phi)](v') \\
&= \sum_{d(v,v')=1} \left(\sum_{d(v',w)=n} \phi(w) \right) = \sum_{\substack{d(v,v')=1 \\ d(v',w)=n}} \phi(w)
\end{aligned}$$

Vi evaluerer den sidste sum med antagelsen $n \geq 2$: Kald en sti fra v til w for en geodæt, hvis den har minimal længde blandt sådanne stier. Da X er et træ, er geodæten fra v til w entydig. $d(v,w)$ er enten $n+1$ eller $n-1$ – hvis ikke w ligger på geodæten fra v til v', har vi $d(v,w) = d(v,v') + d(v',w) = n+1$; hvis den gør, har vi $d(v,w) = d(v,v') - d(v',w) = n-1$. Hvis $d(v,w) = n+1$, findes netop ét valg af v' i ovenstående sum, nemlig hvor v' er den første knude efter v på geodæten fra v til w. Hvis derimod $d(v,w) = n-1$, løber v' gennem de q naboknuder til v, som ikke ligger på geodæten mellem v og w. Vi får altså:

$$\sum_{\substack{d(v,v')=1 \\ d(v',w)=n}} \phi(w) = \sum_{d(v,w)=n+1} \phi(w) + q \sum_{d(v,w)=n-1} \phi(w) \qquad \text{for} \quad n \geq 2 \tag{8}$$

Vi har derfor relationen

$$\mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_n = \mathrm{T}_{n+1} + q \, \mathrm{T}_{n-1} \qquad \text{for} \quad n \geq 2 \tag{9}$$

som giver os det rekursive udtryk

$$\mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_n - q\,\mathrm{T}_{n-1} \qquad \text{for} \quad n \geq 2 \tag{10}$$

Vi har nu etableret induktionsskridtet. Vi starter induktionen med $n = 1, 2$. T_2 findes ud fra $\mathrm{T}_1^2 = \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_1$ analogt til (9), men nu er $n = 1$, så tilfældet $d(v, w) = n - 1$ svarer til $v = w$, og alle $q + 1$ naboknuder v' til v opfylder $d(v, v') = 1, d(v', w) = n$. Dette giver:

$$\mathrm{T}_1 \circ \mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_2 + (q + 1)\,\mathrm{T}_0 \tag{11}$$

dvs.

$$\mathrm{T}_2 = \mathrm{T}_1^2 - (q + 1)\,\mathrm{T}_1^0 \tag{12}$$

og vi kan starte induktionen. □

Notation 2 Vi indfører polynomierne $P_0, P_1, \ldots$ ved

$$P_n(F) := \sum_{j=0}^{n} c_n^j F^j$$

Således at $\mathrm{T}_n = P_n(\mathrm{T}_1)$. Bemærk at F kan være en operator eller et tal i $\mathbb{C}$.

Enhver egenfunktion ϕ for T_1 svarende til egenværdien λ opfylder, at

$$\mathrm{T}_n(\phi) = \sum_{j=0}^{n} c_n^j\,\mathrm{T}_1^j(\phi) = \sum_{j=0}^{n} c_n^j \lambda^j \phi = P_n(\lambda)\phi$$

Dette giver os et redskab til at forstå T_n for en funktion ϕ med $\mathrm{T}_1\,\phi = \lambda\phi$: Vi skal blot forstå T_n for en vilkårlig egenfunktion $\sigma \in \mathbb{C}^{vert(X)}$ svarende til samme egenværdi $\mathrm{T}_1\,\sigma = \lambda\sigma$, for da vil T_n skalere ϕ og σ med samme faktor $P_n(\lambda)$. Vi opsummerer i nedenstående sætning og begynder derefter søgningen efter en egenfunktion σ, som tillader os at udregne faktoren $P_n(\lambda)$.

Korollar 6 *For $\phi \in \mathbb{C}^{vert(X)}$ gælder:*

$$\mathrm{T}_1(\phi) = \lambda\phi \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{T}_n(\phi) = P_n(\lambda)\phi \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{13}$$

□

Sfæriske funktioner

Givet $\lambda \in \mathbb{C}$ søger vi en egenfunktion σ for T_1 svarende til egenværdien λ, som tillader os at udregne $P_n(\lambda)$. Ved ovenstående korollar kan vi skrive $\mathrm{T}_n(\sigma) = P_n(\lambda)\sigma$. Specielt gælder $[\mathrm{T}_n(\sigma)](\mathfrak{o}) = P_n(\lambda)\sigma(\mathfrak{o})$. Kræver vi ydermere $\sigma(\mathfrak{o}) = 1$, bliver foregående ligning

$$P_n(\lambda) = [\mathrm{T}_n(\sigma)](\mathfrak{o}) = \sum_{d(\mathfrak{o},w)=n} \sigma(w)$$

Antag, at σ er rotationsinvariant om $\mathfrak{o}$, dvs. vi kan skrive $\sigma(w) = s(d(\mathfrak{o}, w))$. Så bliver alle led ens i ovenstående sum, så vi får

$$P_n(\lambda) = \#\left(C_n(\mathfrak{o})\right) s(n) \qquad \text{for} \quad n \in \mathbb{N} \tag{14}$$

hvor $C_n(v) = \{w \in vert(X) | d(v, w) = n\}$. Vi er interesserede i funktioner σ, der opfylder ovenstående betingelser. I [TW03] kaldes sådanne funktioner sfæriske:

Definition 7 ([TW03]) Lad $\lambda \in \mathbb{C}$. Funktionen $\sigma : \Gamma \to \mathbb{C}$ kaldes en *sfærisk funktion* svarende til λ, hvis den opfylder:

1. σ er invariant ved rotation om $\mathfrak{o}$

2. $T_1(\sigma) = \lambda\sigma$
3. $\sigma(\mathfrak{o}) = 1$

Vi vil nu finde en forskrift for en sfærisk funktion. Fremgangsmåden er antydet i [TW03]. Vi begynder med at betragte eksponentialfunktionen $\exp_r : vert(X) \to \mathbb{C}$ defineret ved $\exp_r(w) = r^{d(\mathfrak{o},w)}$. Bemærk, at $\exp_r$ er rotationsinvariant, og $\exp_r(\mathfrak{o}) = 1$. Udregner vi $[T_1(\exp_r)]$ i et $v \neq \mathfrak{o}$ får vi

$$\begin{aligned}
[T_1(\exp_r)](v) &= \sum_{d(v,w)=1} r^{d(\mathfrak{o},w)} \\
&= qr^{d(\mathfrak{o},v)+1} + r^{d(\mathfrak{o},v)-1} \\
&= (qr + r^{-1}) \exp_r(v), \qquad (15)
\end{aligned}$$

da v har q naboer w, så $d(\mathfrak{o},w) = d(\mathfrak{o},v) + 1$, og én nabo, så $d(\mathfrak{o},w) = d(\mathfrak{o},w) - 1$. Udregnet i $\mathfrak{o}$ får vi:

$$\begin{aligned}
[T_1(\exp_r)](\mathfrak{o}) &= \sum_{d(\mathfrak{o},w)=1} r^{d(\mathfrak{o},w)} \\
&= (q+1)r \qquad (16)
\end{aligned}$$

Hvis r opfylder $\lambda = qr + r^{-1}$, vil transformationen T_1 skalere $\exp_r$ med faktoren λ i alle punkter $v \neq \mathfrak{o}$. For at have en sfærisk funktion mangler vi kun, at funktionen også skaleres med λ i $\mathfrak{o}$. Ligningen $\lambda = qr + r^{-1}$ er ækvivalent med $qr^2 - \lambda r + 1 = 0$. Vi skriver $\{r_+, r_-\}$ for mængden af rødder i $qu^2 - \lambda u + 1$, således at $[T_1(\exp_{r_\pm})](v) = \lambda v$ for $v \neq \mathfrak{o}$. Vi finder den sfæriske funktion som en linearkombination

$$\sigma = a_+ \exp_{r_+} + a_- \exp_{r_-} \qquad (17)$$

En sådan linearkombination er rotationsinvariant og opfylder

$$[\mathrm{T}_1(\sigma)](v) = \lambda\sigma(v) \qquad \text{for} \quad v \neq \mathfrak{o} \tag{18}$$
$$[\mathrm{T}_1(\sigma)](\mathfrak{o}) = (q+1)(a_+ r_+ + a_- r_-) \tag{19}$$
$$\sigma(\mathfrak{o}) = a_+ + a_- \tag{20}$$

Hvis vi afstemmer koefficienterne a_+ og a_-, så $(q+1)(a_+ r_+ + a_- r_-) = \lambda$ og $a_+ + a_- = 1$, vil σ være en sfærisk funktion som ønsket. Vi finder passende $a_\pm$ ved at skrive disse to ligninger som

$$\begin{pmatrix} (q+1)r_+ & (q+1)r_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

For $r_+ \neq r_-$ eller tilsvarende $\lambda \notin \{\pm 2\sqrt{q}\}$ kan dette inverteres til

$$\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \frac{1}{(q+1)(r_+ - r_-)} \begin{pmatrix} 1 & -(q+1)r_- \\ -1 & (q+1)r_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi konkluderer for $r_+ \neq r_-$, at $\sigma = a_+ \exp_{r_+} + a_- \exp_{r_-}$ er en sfærisk funktion svarende til λ med a_+ og a_- givet ved:

$$a_+ = \frac{\lambda - (q+1)r_-}{(q+1)(r_+ - r_-)} \qquad a_- = \frac{\lambda - (q+1)r_+}{(q+1)(r_- - r_+)}$$

Da $r_\pm$ er rødderne i $qu^2 - \lambda u + 1 = q(u - r_+)(u - r_-)$, har vi $\lambda = q(r_+ + r_-)$, så koefficienterne bliver til

$$a_+ = \frac{qr_+ - r_-}{(q+1)(r_+ - r_-)} \qquad a_- = \frac{qr_- - r_+}{(q+1)(r_- - r_+)}$$

Vi kan nu give en forskrift for en sfærisk funktion ved at indsætte $\exp_r(w) = r^{d(\mathfrak{o},w)}$ i (17):

Sætning 8 *Antag* $\lambda \notin \{\pm 2\sqrt{q}\}$ *og lad* $\{r_+, r_-\}$ *betegne rødderne i polynomiet* $qu^2 - \lambda u + 1$*. Da er* $\sigma : v \mapsto s_{q,\lambda}(d(\mathfrak{o}, v))$ *en sfærisk funktion svarende til egenværdien* λ*, hvor* $s_{q,\lambda}(n)$ *er givet ved*

$$s_{q,\lambda}(n) = a_+ r_+^n + a_- r_-^n$$

med koefficienterne

$$a_+ = \frac{1}{q+1}\left(\frac{qr_+ - r_-}{r_+ - r_-}\right) \qquad a_- = \frac{1}{q+1}\left(\frac{qr_- - r_+}{r_- - r_+}\right) \tag{21}$$

Middelværdi over en cirkel

Vi antager nu, at $\phi : vert(X) \to \mathbb{C}$ opfylder $\mathrm{T}_1\,\phi = \lambda\phi$. Ved korollar 6 har vi $\mathrm{T}_n(\phi) = P_n(\lambda)\phi$, så for at forstå $\mathrm{T}_n(\phi)$ skal vi bare kende $P_n(\lambda)$. I beviset for følgende korollar bestemmes denne værdi vha. den netop udregnede sfæriske funktion σ:

Korollar 9 *Antag, at* $\phi \in \mathbb{C}^{vert(X)}$ *opfylder* $\mathrm{T}_1(\phi) = \lambda\phi$ *med* $\lambda \notin \{\pm 2\sqrt{q}\}$*. Da gælder*

$$\mathrm{T}_n(\phi) = \#C_n(\mathfrak{o}) s_{q,\lambda}(n)\phi \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

hvor $s_{q,\lambda}(n)$ *er som i ovenstående sætning, og*

$$C_n(v) = \{w \in vert(X) | d(v,w) = n\}$$

Bevis. Lad $n \in \mathbb{N}_0$ være givet. Det følger af korollar 6 at $\mathrm{T}_n(\phi) = P_n(\lambda)\phi$. Vi konstruerer den sfæriske funktion σ svarende til λ som beskrevet i sætning 8. Da $\mathrm{T}_1(\sigma) = \lambda\sigma$, har vi $\mathrm{T}_n(\sigma) = P_n(\lambda)\sigma$, og ved udregning i $\mathfrak{o}$ ser vi:

$$\sum_{d(\mathfrak{o},w)=n} \sigma(w) = P_n(\lambda)\sigma(\mathfrak{o}) = P_n(\lambda)$$

Da $\sigma(v) = s_{q,\lambda}(d(\mathfrak{o}, v))$, bliver ovenstående til

$$P_n(\lambda) = \#\left(C_n(\mathfrak{o})\right) s_{q,\lambda}(n)$$

. $\square$

Vi kan nu skrive den gennemsnitlige værdi af egenfunktionen ϕ over en "cirkel med radius n og centrum i $\mathfrak{o}$", dvs. over alle knuder i afstanden n til $\mathfrak{o}$. Vi har nemlig ved (22), at

$$\frac{1}{\#\left(C_n(\mathfrak{o})\right)} \sum_{d(\mathfrak{o},w)=n} \phi(w) = \frac{\left[\mathrm{T}_n(\phi)\right](\mathfrak{o})}{\#C_n(\mathfrak{o})} = s_{q,\lambda}(n)\phi(\mathfrak{o}) \tag{23}$$

Ved at specialisere til Cayley-grafen for den fri gruppe og vælge

$$\phi = \chi_\epsilon : \gamma \mapsto \exp(i\epsilon \cdot \mathrm{Log}(\gamma))$$

får vi den karakteristiske funktion for $\mathrm{Log}(Y_n)$:

Korollar 10 *Den karakteristiske funktion f_{μ_n} for fordelingen af $\mathrm{Log}(Y_n)$ kan udregnes ved flg. procedure: Skriv $q+1 = 2m$ og lad*

$$\lambda(\epsilon) \quad = \quad 2\sum_{j=1}^{m} \cos(\epsilon_j)$$

Hvis $\lambda(\epsilon) \notin \{\pm 2\sqrt{q}\}$, lader vi r_+ og r_1 være rødderne i $qu^2 - \lambda(\epsilon)u + 1$ og skriver

$$a_+ = \frac{1}{q+1}\left(\frac{qr_+ - r_-}{r_+ - r_-}\right) \qquad a_- = \frac{1}{q+1}\left(\frac{qr_- - r_+}{r_- - r_+}\right) \tag{24}$$

Da er den karakteristiske funktions værdi i ϵ givet ved

$$f_{\mu_n}(\epsilon) \quad = \quad a_+ r_+^n + a_- r_-^n \tag{25}$$

Bevis. χ_ϵ er multiplikativ, så vi har

$$[\mathrm{T}_1(\chi_\epsilon)](\gamma) = \left(\sum_{wl(\delta)=1} \chi_\epsilon(\delta) \right) \chi_\epsilon(\gamma)$$

Egenværdien i parentesen til højre kan skrives

$$\sum_{j=1}^{m} \chi_\epsilon(a_j) + \chi_\epsilon(a_j^{-1}) = \sum_{j=1}^{m} \exp(\epsilon_j) + \exp(-\epsilon_j)$$

Hvilket giver udtrykket for $\lambda(\epsilon)$. Vi har nu $\mathrm{T}_1(\chi_\epsilon) = \lambda(\epsilon)\chi_\epsilon$, så ved ligning (23) kan vi skrive udtrykket for den karakteristiske funktion som

$$f_{\mu_n}(\epsilon) = \frac{1}{\#\Gamma_n} \sum_{wl(\gamma)=n} \chi_\epsilon(\gamma) = s_{q,\lambda(\epsilon)}(n)\chi_\epsilon(\mathfrak{e}) = s_{q,\lambda(\epsilon)}(n)$$

for $\lambda \notin \{\pm 2\sqrt{q}\}$. Konklusionen følger ved at udregne $s_{q,\lambda(\epsilon)}(n)$ med proceduren i sætning 8. □

Konvergens af logaritmen i den fri gruppe

Vi er nu klar til at vise, at fordelingerne $\eta(n)\mu_n$ konvergerer mod en normalfordeling for en passende normalisering $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Vi går frem ved at vise den punktvise konvergens af de karakteristiske funktioner f_{ν_n} for $\nu_n = \eta(n)\mu_n$, dvs. at

$$f_{\nu_n}(t) = f_{\mu_n}(\eta(n)t)$$

konvergerer for alle t. Jo længere ord γ vi har, desto større kan $\mathrm{Log}(\gamma)$ blive. For at få en normaliseret stokastisk variabel $\eta(n)\,\mathrm{Log}(Y_n)$

vil vi derfor søge η blandt funktioner med $\eta(x) \to 0$ for $x \to \infty$. Korollar 10 giver en procedure for at udregne $f_{\mu_n}(\epsilon = \eta(n)t)$. Bemærk, at $r_\pm$ og $a_\pm$ i dette udtryk afhænger af n, og at vi vælger vores variable i rækkefølgen:

$$n \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \eta(n)t \quad \Rightarrow \quad \lambda(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad r_\pm \quad \Rightarrow \quad a_\pm$$

Vi vil nu undersøge, hvordan hvert led i kæden opfører sig for $n \to \infty$ og fastholdt t. Da $\eta(n) \to 0$, vil $\epsilon = \eta(n)t \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathfrak{e}$ for alle t, og for $\epsilon \to \mathfrak{e}$ har vi

$$\lambda(\epsilon) = 2\sum_{j=1}^{m} \cos(\epsilon) \to 2m = q+1$$

Korollar 10 specificerer ikke, hvilken rod navngives r_+ og hvilken er r_-. Rødderne i $qu^2 - \lambda u + 1$ er $\{1, q^{-1}\}$ for $\lambda = q+1$, så vi kan navngive rødderne $r_+(\lambda)$ og $r_-(\lambda)$ for hvert λ, sådan at:

$$r_+(\lambda) \to 1 \qquad r_-(\lambda) \to q^{-1} \qquad\qquad \text{for} \quad \lambda \to q+1 \tag{26}$$

Mere præcist bruger vi rodformlen og skriver $r_\pm(\lambda) = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4q}}{2q}$. Vi definerer funktionerne a_+, a_- af en variabel λ ved formlen (24), hvor vi lader r_+, r_- betegne de netop omtalte funktioner af λ. Da $r_+(\lambda) \to 1, r_-(\lambda) \to q^{-1}$ konvergerer koefficienterne:

$$a_+(\lambda) \to 1 \qquad\qquad a_-(\lambda) \to 0 \qquad\qquad \text{for} \quad \lambda \to q+1$$

Da λ vil afhænge af $\epsilon = \eta(n)t$, indfører vi flg. notation:

Notation 3

$$r_\pm\{\epsilon\} = r_\pm \circ \lambda(\epsilon)$$

$$r_\pm[n] = r_\pm\{\eta(n)t\} \qquad a_\pm[n] = a_\pm \circ \lambda(\eta(n)s)$$

så vi kan skrive

$$f_{\mu_n}(\eta(n)s) = \Big(a_+[n]\,(r_+[n])^n + a_-[n]\,(r_-[n])^n\Big) \tag{27}$$

De relevante grænseovergange er

$$\begin{array}{ccccc} \eta(n)t & \to & 0 & & n \to \infty \\ \lambda(\epsilon) & \to & q+1 & & \epsilon \to 0 \\ (r_+(\lambda), r_-(\lambda)) & \to & (1, q^{-1}) & & \lambda \to q+1 \\ (a_+(\lambda), a_-(\lambda)) & \to & (1,0) & & \lambda \to q+1 \end{array}$$

Ovenstående giver specielt $|r_-[n]| \leq 0.9|r_+[n]|$ for n tilstrækkeligt stor, så vi har $(r_-[n])^n = o\left[(r_+[n])^n\right]$ for $n \to \infty$.
For samme grænseovergang har vi $a_+[n] \to 1$, $a_-[n] \to 0$, så (27) bliver asymptotisk:

$$f_{\mu_n}(\eta(n)t) \quad \sim \quad (r_+[n])^n = (r_+\{\eta(n)t\})^n \tag{28}$$

for $n \to \infty$. Bemærk ligheden af $(r_+[n])^n$ med udtrykket $(1 + c/n)^n$, som opfylder

$$(1 + c/n)^n \to e^c \qquad\qquad \text{for} \quad n \to \infty$$

Ligning 30 nedenfor generaliserer dette for at finde $\lim_{n\to\infty}(r_+[n])^n$:

Lemma 11 *For en differentiabel funktion g defineret på $(0,\delta)$ med $g(x) \to 1$ og $g'(x) \to \partial_0$ for $x \to 0$ gælder, at*

$$g(x)^{\frac{1}{x}} \to e^{\partial_0} \qquad\qquad x \to 0 \tag{29}$$

Specielt får vi ved valget $x = 1/n$, at

$$g(1/n)^n \to e^{\partial_0} \qquad\qquad n \to \infty \tag{30}$$

Bevis. Skriver vi logaritmen af venstresiden, får vi

$$\log(g(x)^{1/x}) = \frac{\log g(x)}{x} \sim \frac{(\log g(x))'}{x'} = \frac{g'(x)}{g(x)} \to \partial_0$$

hvor vi bruger l'Hôpitals regel. $\square$

Funktionen g i lemmaet skal nu vælges, så

$$g(1/n) = (r_+[n])^n = (r_+ \circ \lambda(\eta(n)t))^n \qquad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}$$

Vi skriver definitionen af den indre funktion $\lambda(\eta(n)t)$ ud:

$$\lambda(\eta(n)t) = 2\sum_{j=1}^{m} \cos(\eta(n)t) = 2\sum_{j=1}^{m}\left[1 - \frac{t_j^2}{2}\eta(n)^2 + \frac{t_j^4}{4!}\eta(n)^4 \cdots\right]$$

og bemærker, at det lignende udtryk

$$\tilde{\lambda} : x \quad \longmapsto \quad = 2\sum_{j=1}^{m}\left[1 - \frac{t_j^2}{2}x + \frac{t_j^4}{4!}x^2 \cdots\right]$$

er kontinuert differentiabel med $\tilde{\lambda}'(0) = -\sum_{j=1}^{m} t_j^2$. Da $\tilde{\lambda}(x) = \lambda(\sqrt{x}t)$ for $x > 0$, får vi

$$\lambda(\sqrt{x}t)' \to -\sum_{j=1}^{m} t_j^2 = -\|t\|^2$$

for $x \to 0$. Dette antyder valget

$$g(x) = r_+ \circ \lambda(\sqrt{x}t)$$

Vi kan differentiere $\lambda \mapsto r_+(\lambda)$ via rodformlen, så på området $\lambda \notin \{\pm 2\sqrt{q}\}$ har vi:

$$r_+'(\lambda) = \frac{1}{2q} + \frac{\lambda}{2q\sqrt{\lambda^2 - 4q}} \to \frac{1}{q-1} \qquad \text{for} \quad \lambda \to q+1$$

Ved kædereglen kan vi skrive

$$\left[\partial_x r_+ \circ \lambda(\sqrt{x}t)\right]_{x=x_0} \longrightarrow -\frac{\|t\|^2}{q-1} \qquad \text{for} \quad x_0 \to 0$$

Da $r_+\{\sqrt{x}t\} \to 1$ for $x \to 0$, giver lemma 11

$$\left(r_+\left\{\frac{t}{\sqrt{n}}\right\}\right)^n \to \exp\left(-\frac{\|t\|^2}{q-1}\right) \qquad \text{for} \quad n \to \infty$$

Det følger af (28), at den karakteristiske funktion f_{ν_n} for $\mathrm{Log}(Y_n)/\sqrt{n}$ opfylder

$$f_{\nu_n}(t) = f_{\mu_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(-\frac{\|t\|^2}{q-1}\right) = \exp\left(-\frac{\|t\|^2}{2}\frac{1}{m-1}\right)$$

Grænsefunktionen på højre side er den karakteristiske funktion for normalfordelingen med variansmatrice $I/(m-1)$. Vi konkluderer ved Lévy (sætning 2), at fordelingen af $\mathrm{Log}(Y_n)/\sqrt{n}$ konvergerer svagt mod denne normalfordeling. Vi husker definitionen 3 af svag konvergens og konkluderer:

Sætning 1 (forenklet variant af [PR05]) Lad Y_n være ligefordelt på Γ_n. For Borelmængder $B \subset \mathbb{R}^m$, hvor Lebesgue-målet af ∂B er 0, gælder

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{Log}(Y_n)}{\sqrt{n}} \in B\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \left(\frac{m-1}{2\pi}\right)^{r/2} \int_B e^{-\frac{m-1}{2}\|x\|^2} dx$$

$\square$

Anvendelse

Vi lader nu $m = 2$ og vender tilbage til byen $\mathbb{Z}^2$ fra begyndelsen af artiklen. Hvad er mon sandsynligheden for at ende længere end 10km væk fra startpunktet efter at have kørt en 100km lang tur uden u-vendinger i $\mathbb{Z}^2$? Husk, at den stokastiske variabel Y_n repræsenterer en tilfældig n kilometer lang rute med start i (0,0). $\operatorname{Log}(Y_n)$ er slutpunktet for denne rute. Det ønskede udfald kan derfor skrives som

$$\|\operatorname{Log}(Y_{100})\| \geq 10$$

Hvis vi lader $m = 2$ og vælger $B = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| \geq 1\}$, giver sætning 1

$$\mathrm{P}\left(\|\operatorname{Log}(Y_n)\| \geq \sqrt{n}\right) = \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{\|x\|\geq 1} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx$$

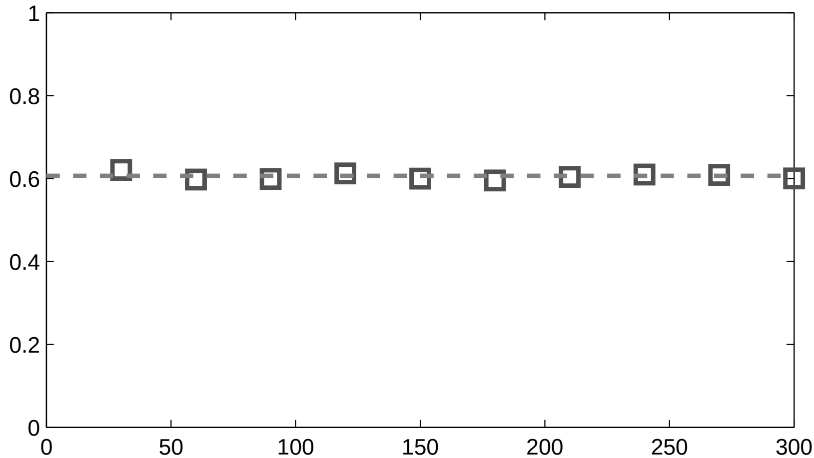
$\mathrm{P}(\|Log(Y_{100})\| \geq 10)$ er det 100. led i denne følge, så vi gætter på, at det ligger tæt på grænseværdien på højresiden. Integralet kan udregnes ved at gå over til polære koordinater med radius betegnet ved R og derpå substituere $S = R^2/2$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\|x\|\geq 1} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx = \int_{R=1}^{\infty} e^{-\frac{R^2}{2}} R\, dR = \int_{S=1/2}^{\infty} e^{-S} dS = e^{-1/2}$$

Vores tilnærmede sandsynlighed for at ende længere end 10km væk fra startpunktet er altså:

$$\mathrm{P}\left(\|\operatorname{Log}(Y_{100})\| \geq 10\right) \quad \approx \quad e^{-1/2} \quad \approx \quad 0,607$$

At dette overslag er præcist kan ses på nedenstående plot, hvor vi sammenligner med de eksakte værdier af $\mathrm{P}\left(\|\operatorname{Log}(Y_n)\| \geq \sqrt{n}\right)$ udregnet med computer.



Figur 3 plot med n på førsteaksen og $\mathrm{P}\left(\|\operatorname{Log}(Y_n)\| \geq \sqrt{n}\right)$ på andenaksen. Den stiplede linje er $e^{-1/2}$.

Computeren begynder så småt at give op for n større end 300 med den algoritme, vi anvender – her kan vores grænseværdisætning heldigvis tage over.

Litteratur

[Bil95] P. Billingsley, *Probability and measure*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, 1995.

[Han09] E. Hansen, *Measure theory*, Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, 2009.

[ILK71] I.A. Ibragimov, I.U.V. Linnik, and J.F.C. Kingman, *Independent and stationary sequences of random variables*, Wolters-Noordhoff series of monographs and textbooks on pure and applied mathematics, Wolters-Noordhoff., 1971.

[PR05] Yiannis N. Petridis and Morten S. Risager, *Discrete logarithms in free groups*, Proceedings of the American Mathematical Society **134** (2005), no. 4, 1003–1012.

[Riv10] Igor Rivin, *Growth in free groups (and other stories)—twelve years later*, Illinois J. Math. **54** (2010), no. 1, 327–370.

[TW03] Audrey Terras and Dorothy Wallace, *Selberg's trace formula on the k-regular tree and applications*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **2003** (2003), 501–526.

[VN94] A. B. Venkov and A. M. Nikitin, *The Selberg trace formula, Ramanujan graphs, and some problems of mathematical physics*, St. Petersburg Math. J. **5** (1994), no. 3, 419–484.

FAMØS

FAMØS marts 2013
Fagblad for Aktuar, Matematik,
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Illustrationer:
Maria Bekker-Nielsen Dunbar (forside)

Deadline for næste nummer:
10. maj 2013

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til famos@math.ku.dk – gerne i LaTeX
og gerne baseret på skabelonen
som kan hentes på hjemmesiden.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
http://www.math.ku.dk/famos/

Oplag: 400 stk.
ISSN: 1903-2722

22. årgang, nr. 3, marts 2013