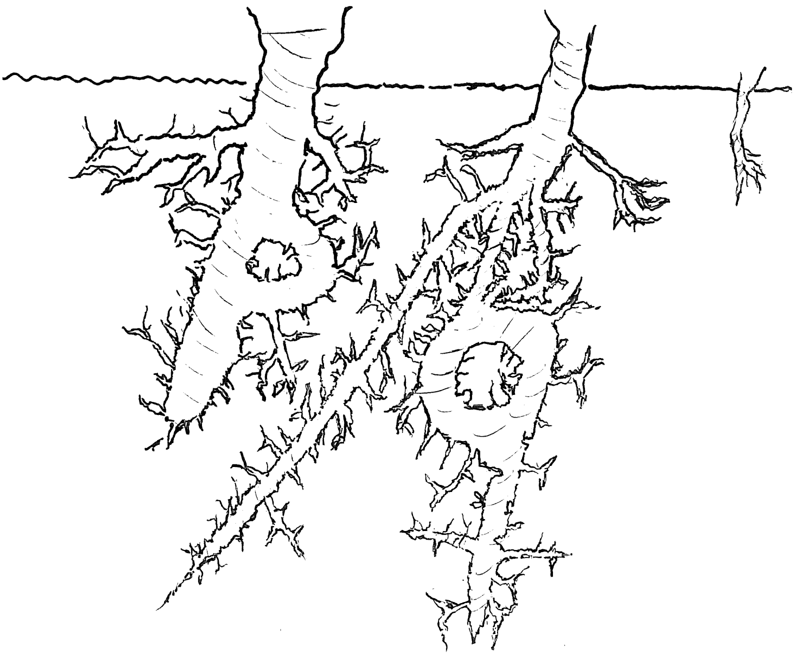
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
21. årgang, nr. 1, oktober 2011



FAMØS spirer igen og som man kunne forvente så har det slået rationale rødder.

Redaktion

- ⋆ Bo 'Maling' Malling Christensen,
- ⋆ Frederik Möllerström Lauridsen,
- ⋆ Jens Siegstad,
- ⋆ Jingyu She,
- ⋆ Kasper Fabæch Brandt,
- ⋆ Kristain Knudsen Olesen,
- ⋆ Kristian Peter Poulsen,
- ⋆ Maria Bekker-Nielsen Dunbar,
- ⋆ Martin Patrick Speirs,
- ⋆ Søren Knudby,
- ⋆ Søren Wengel Mogensen

Indhold

Wow! FAMØS er tilbage

Kristian Knudsen Olesen

Langt om længe er FAMØS tilbage. Mange kan nok stadig huske FAMØS, fra før det stoppede i 2007, men for dem som aldrig har stiftet bekendskab med bladet, er FAMØS[1] et fælles fagblad for Aktuar, Matematik, Matematik-Økonomi og Statistik. Bladet bliver kørt af studerende, og dets formål er hovedsageligt at underholde og at give en mulighed for at dele ting, man har på hjertet.

Hvordan startede FAMØS

FAMØS blev stiftet i 1987 af tre studerende på de matematiske fag, Ernst Hansen, David Lando og Marc Andersen. Nogle år før havde der været et andet fagblad på matematik kaldet 'Plus/Minus', som hørte under matematisk fagråd. Plus/Minus stoppede, fordi der ikke var kræfter nok i fagrådet til at holde sådan et blad kørende. De 3 studerende startede FAMØS, da de mente der var brug for et fagblad på matematik til at samle de studerende, specielt også på tværs af de matematiske fag.

Til at starte med var det de tre stiftere, der skrev alt indholdet selv, men senere kom andre studerende med i redaktionen, bl.a. Søren Eilers i 1988. I dag kommer bladet både i en trykt og en elektronisk version, men da bladet startede fantes det kun i en papirversion, der blev trykt på et studentertrykkeri i den gamle brandstation på den anden side af Jagtvej. I 1990 blev alle tre stiftere færdiguddannede og bladet blev overladt til resten af redaktionen. Siden da har FAMØS haft mange forskellige redaktioner, indtil det stoppede i 2007.

[1] Som titlen antyder (se forsiden).

Hvem kan skrive indlæg til FAMØS?

Så hvem er det, der kan få deres indlæg trykt i Famøs. Svaret er simpelt. Alle kan skrive et indlæg til Famøs – om man er førsteårsstuderende, kandidatstuderende, forelæser eller slet ikke har sin gang på Institut for Matematiske Fag mere – så kan man sende forslag ind til Famøs. Hvis du har noget på hjertet, hvis du har en beretning om et socialt arrangement, hvis du har et sjovt indslag, en tegning, noget nice matematik, eller noget helt sjette som du gerne vil dele med andre, så skriv et indslag i Famøs. Faktisk vil redaktionen kraftigt opfordre til, at folk sender forslag ind, da et blad uden indhold er *det tomme blad*.

Hvordan skriver jeg et indlæg til FAMØS?

Da bladet bliver sat op med pdfLaTeX er det en stor hjælp hvis man har skrevet sit indlæg i LaTeX og at det kan compile til pdf. Dette er selvfølgelig ikke noget krav, og redaktionen modtager også gerne indlæg skrevet i andre formater, fx ved brug af MS Word, Notepad, OpenOffice osv. Som hovedregel skal det bare være på elektronisk form.

Hvis man skriver et indlæg i LaTeX har Famøs sin helt egen klasse-fil, som vi opfordrer til at man bruger. Dette lyder meget teknisk, men det eneste det betyder er, at man kan benytte skabelonen

`http://www.math.ku.dk/famos/skabelon/skabelon.tex`

til at skrive sit indlæg. Ud over at det gør det nemmere for redaktionen på Famøs at inkludere indlægget i det færdige blad har det også den fordel, at det er muligt for forfatteren at se hvordan det endelige dokument kommer til at se ud. På den måde kan man kæle lidt for detaljerne, ved fx. at fikse upassende lineskift og sådanne. For at bruge skabelonen beskrevet ovenfor, skal man have klasse-filen `simplefamos.cls` liggende i samme mappe som skabelonen. Denne fil kan hentes fra

`http://www.math.ku.dk/famos/skabelon/simplefamos.cls`

Hvis man finder denne sidste del om klasse-filer meget forvirende, så vil vi gerne lægge vægt på, at man *ikke* behøver at skrive sine indlæg i LaTeX.

Spørgsmål og problemer

Hvis du har problemer med at få skabelonen til at virke, spørgsmål vedrørende opsætningen af dit dokument i LaTeX eller hvis du har generelle spørgsmål til Famøs, så skal du være velkommen til at kontakte Famøs på

`famos@math.ku.dk`

Tilbage er der kun at sige god fornøjelse med at skrive indlæg til fagbladet Famøs.

Blokkens spil

– 01-følger

Bo 'Maling' Malling & Martin Patrick Speirs

I blokkens spil præsenterer vi i hvert nummer af FAMØS et nyt matematisk spil, som vi synes er interessant. Spillene vil som standard være meget simple, så det er nemt lige at sætte sig ned og tage et par runder mod en ven. Men vi vil også forsøge at stille jer nogle opgaver indenfor spillets natur, som gør det interessant mere matematisk set. Som læser er du meget velkommen til at foreslå spil af denne type.

Vi vil gerne starte ud med et spil vi vælger at kalde 01-følger. Det spilles af to spillere, der på skift sætter et 0 eller et 1-tal. For et valgt n fortsætter spillet indtil den sidste sekvens af længde n allerede er forekommet tidligere i spillets gang.

Example 1 For $n = 3$ kan følgende spil fx forekomme.

A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1

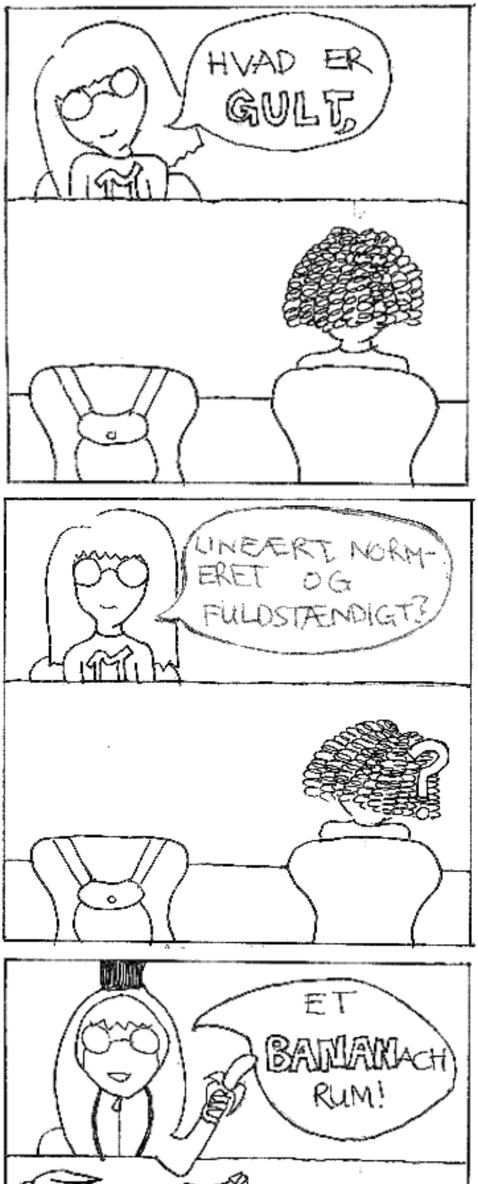
Da sekvensen 001 af længde tre er forekommet før, så har spillet B tabt. Tag nu nogle spil mod din sidemand for forskellige værdier af n.

Opgaver:

- ◇ Hvad er den længste sekvens af tal der kan forekomme for forskellige værdier af n?
- ◇ Er der en vindende strategi for nogen spiller når $n = 3$. I så fald for hvem, hvad er den og kan du bevise det matematisk.
- ◇ Kan du finde vindende strategier for andre værdier af n?

Forslag til udvidelser:

- ◇ Prøv at spille spillet hvor man også må sætte tallet 2.
- ◇ Prøv at spille spillet, hvor der er 3 spillere.


HVAD ER GULT,
LINEÆRT NORMERET OG FULDSTÆNDIGT?
ET BANANACH RUM!

En sætning om primtal som en sum af to kvadrater

Frederik Møllerstrøm Lauridsen

Der kan være mange forskellige måder at bevise en sætning på og visse heldige sætninger er da også netop blevet bevist på et utal af forskellige måder. En af disse sætninger er sætningen om muligheden for at skrive et primtal som summen af to kvadrater. Denne sætning har være kendt siden Fermat, som muligvis også har haft et bevis for den. Senere har eksempelvis Euler fundet et bevis og Hardy & Wright giver hele fem forskellige beviser for sætningen. Måske mest berømt er Zagiers bevis [3] der kun fylder en *linie*. Nedenfor følger et elegant og bemærkelsværdigt bevis for en tilstrækkelig betingelse for at et primtal p kan skrives som summen af to kvadrater[2]. Beviset tager udgangspunkt i Heath-Browns bevis fra 1984 som fremstillet i [1] og [2].

Sætning 1 *Lad p være et primtal som opfylder at $p \equiv 1 \pmod 4$. Da findes $x, y \in \mathbb{N}$ sådan at $p = x^2 + y^2$.*

Bevis. Lad p være et primtal som opfylder at $p \equiv 1 \pmod 4$ d.v.s $p = 4k + 1$ for et $k \in \mathbb{N}$, og betragt følgende tre endelige ikke-tomme mængder:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \colon 4xy + z^2 = p, x > 0, y > 0\},$$

$$T = \{(x, y, z) \in S \colon z > 0\}, \quad U = \{(x, y, z) \in S \colon x - y + z > 0\}$$

samt de tre lineære afbildninger, $f_A \colon S \to S, f_B \colon T \to T$ og $f_C \colon U \to U$ givet ved matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

[2] Det er let at vise at betingelsen ligeledes er nødvendig når $p \neq 2$.

Det overlades som en let øvelse til læseren at tjekke at disse afbildninger er veldefinerede.

Det bemærkes først at $A^2 = B^2 = C^2 = E$, hvor E som sædvanlig betegner enhedsmatricen, og at afbildningerne dermed alle er involutioner[3]. Videre ses det let at

$$f_A(T) = \{(x,y,z) \in S \colon z < 0\} \quad \text{og}$$
$$f_A(U) = \{(x,y,z) \in S \colon x - y + z < 0\}$$

samt at disse opfylder at $S = T \cup f_A(T)$ da punkter af formen $(x,y,0)$ ikke kan være elementer i S, eftersom fire ikke går op i p, og at $S = U \cup f_A(U)$ eftersom $x - y + z = 0$ giver at

$$p = 4xy + z^2 = 4xy + (y-x)^2 = (x+y)^2$$

hvilket ikke er muligt da p er et primtal.

Da videre $f_A \colon S \to S$ er en involution, og således specielt en bijektion, må vi have at $|T| = |f_A(T)|$ og $|U| = |f_A(U)|$. Vi kan således slutte at $2|T| = |S| = 2|U|$, da $T \cap f_A(T) = U \cap f_A(U) = \emptyset$, og dermed er $|T| = |U|$.

Vi bemærker nu at punktet $(k,1,1)$ er et fikspunkt for funktionen $f_C \colon U \to U$ samt at dette er det eneste sådanne fikspunkt eftersom

$$(x,y,z) = f_C((x,y,z)) = (x - y + z, y, 2y - z) \Rightarrow y = z$$

men da er $p = 4xy + y^2 = (4x+y)y$ og eftersom p er et primtal kan vi slutte at $y = z = 1$ og dermed at $x = k$.

Eftersom $f_C \colon U \to U$ er en involution på U med netop et fikspunkt, følger det nu at kardinaliteten af U er ulige, og dermed

[3] En involution er en funktion som er sin egen invers.

at kardinaliteten af T ligeledes er ulige. Heraf følger at enhver involution på T må have mindst et fikspunkt (og altid et ulige antal), specielt må $f_B\colon T \to T$ have et fikspunkt. Altså et punkt $(t_0, t_1, t_2) \in T$ som opfylder at

$$(t_0, t_1, t_2) = f_B((t_0, t_1, t_2)) = (t_1, t_0, t_2)$$

d.v.s at $t_0 = t_1$, og da nu $(t_0, t_1, t_2) \in T$ kan vi slutte at

$$p = 4t_0t_1 + {t_2}^2 = (2t_1)^2 + {t_2}^2,$$

hvilket var hvad vi ønskede at vise. □

Litteratur

[1] M. Aigner og C.M. Ziegler: *Proofs from the book.* 2. udg Springer 2001

[2] C. Elsholtz: *Kombinatorische Beweise des Zweiquadratesatzes und Verallgemeinerungen* i Mathematische Semesterberichte 50, Heft 1, p.77-93, 2003.

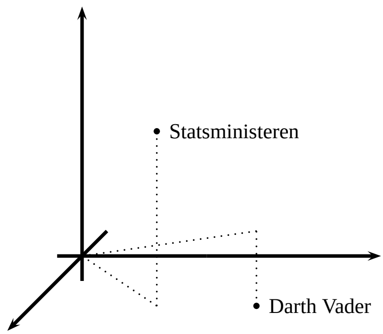
[3] D. Zagier: *A One-Sentence Proof That Every Prime* $p \equiv 1 \pmod 4$ *Is a Sum of Two Squares* i The American Mathematical Monthly Vol. 97, No. 2 (Feb., 1990), p. 144.

Det kompakte politiske vektorrum

Kristian Peter Poulsen

Det kompakte politiske vektorrum

Vi har alle hørt om højre-venstre-skalaen i forbindelse med at placere partierne i forhold til hinanden. Her har man Enhedslisten længst ude til venstre og enten Liberal Alliance eller Konservative længst til højre, da skalaen jo oprindelig er baseret på partiernes holdninger til omfordelingspolitk. Der er sikkert også flere, som i forbindelse med valget eller andre steder har set en lidt mere kompliceret beskrivelse. Her bruger man nemlig to skalaer, så man får et to-dimensionalt koordinatsystem at indsætte partierne i. Den lodrette akse betegner partiernes holdninger til såkaldt værdipolitik (miljø, udlændinge, økologi mm.).



Figur 1 Et godt eksempel

Det er så her, hvor jeg i 2007 ikke vidste hvad jeg skulle skrive om i 3.g-opgaven; men kom på at jeg kunne lave en bedre og mere præcis beskrivelse af det politiske landskab.
Man bruger et n-dimensionalt vektorrum, hvor der til hver akse er et politikområde. Det kræves indtil videre, at områderne er lige vigtige. Partierne skal så have en værdi på akserne, som er begrænset (f.eks. $[-1, 1]$). Vi får herved, at partierne kan opskrives som vektorer i det kompakte politiske vektorrum U_n med n politikområder. Det er nu muligt at tale om hvorvidt

et parti er et midterparti eller ej, da vi kan beregne afstanden fra centrum til partiet. Givet $p_1 = (x_1, \ldots, x_n) \in U_n$, afstanden $|p_1|$ fra p_1 til centrum er

$$|p_1| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Vi har, at et parti $p_1 \in U_n$ maksimalt kan have afstanden $\sqrt{n}$ til centrum givet, at aksernes interval er $[-1, 1]$.
Det giver nu også mening at tale om hvor langt to partier er fra hinanden. Givet $p_1 = (x_1, \ldots, x_n), p_2 = (y_1, \ldots, y_n) \in U_n$ har vi, at afstanden $d(p_1, p_2)$ mellem de to partier er

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Den maksimale afstand mellem to partier er altså $\sqrt{2n}$ under forudsætning, at akserne har længde to.
Vi kan også tale om standpunktet for en koalition mellem partier. Givet to partier $p_1, p_2 \in U_n$ har vi, at koalitionen mellem de to partier er givet ved

$$K_2 = \frac{1}{2}\left(p_1 + p_2\right).$$

En sjov ting er, at trekantsuligheden giver os, at

$$\frac{1}{2}|p_1 + p_2| \leq \frac{1}{2}(|p_1| + |p_2|),$$

hvilket også giver god mening i forhold til virkeligheden, da en koalition mellem partier altid har tendens til at være mere midterorienteret (pga. kompromisser) end partierne er hver for sig.
Problemet med formlen for koalitionen er, at den forudsætter, at partierne har lige meget indflydelse på politikken, hvilket jo

sjældent er tilfældet. Her kan man bruge partiernes mandattal som vægt for deres magt. Givet k partier $p_1, \ldots, p_k \in U_n$ hvor det i'te parti har mandattal m_i og s er summen af de k partiers mandattal. Vi får da koalitionens standpunkt som

$$K_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{s} p_i.$$

Jeg nævnte tidligere det med, at politikområderne skulle være lige vigtige. Det er jo meget subjektivt, hvad det enkelte menneske mener er vigtigt, når vi taler politik. Det vil altså være nærliggende at have en vægt på hver akse, som gør, at de enkelte områder bliver vægtet alt efter hvem, der sidder og vil beregne afstande. Hvis man f.eks. har vægtene $a_1, \ldots, a_n$, hvor $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, vil et parti $p_1 = (x_1, \ldots, x_n) \in U_n$ komme til at hedde

$$p_1 = (a_1 x_1, \ldots, a_n x_n).$$

Når nu vi har opbygget denne smarte model skal vi huske, at det hele hviler på de værdier, som partierne skal have. Det er nødvendigt at overveje, hvad der skal til for at ende i den mest markante værdi på et område. F.eks. ville ingen af de danske partier ende i yderpunktet (højreorienteret) på det omfordelingspolitiske område.

Ydermere er det bemærkelseværdigt, at vi forsøger at beskrive løse ord og udtalelser vha. stringent matematik, der ikke er til diskussion. Dog kan man opstille kriterier for hvor meget forskellige holdninger indenfor hvert politikområde vægter i forhold til den værdi man skal nå frem til. Der er bare lige det, at det er en ufattelig omfattende opgave, så det gider jeg ikke gøre.

Matematik & filosofi
– et interview med Mikkel W. Johansen

Martin Patrick Speirs & Frederik Möllerström Lauridsen

Matematikken og filosofien har historisk set været tæt sammenknyttet og genstand for megen frugtbar udveksling. Der findes endda en gren indenfor filosofien kaldet matematikkens filosofi. Her studerer man spørgsmål som ’hvad er tal?’, ’hvad er et bevis?’ og ’ hvad udgør matematikkens natur?’ For at høre nærmere om disse og ligende spørgsmål opsøgte vi cand.mag og Ph.D Mikkel Willum Johansen, som de fleste studerende ved IMF vil kende som underviser i kurset “VtMat”.

Vi spurgte ind til hans faglige baggrund, og om hvordan man kommer til at arbejde inden for matematikkens filosofi.

Min baggrund er, at jeg læste hovedfag i filosofi og bifag i matematik, og på matematik, tog jeg nogle af de fag der havde lidt mere filosofisk relevans, der var faktisk et overbygningskursus i matematikkens filosofi. Jeg tog også nogle af historiefagene – der er man måske lidt mere reflekterende over, hvad det er man gør end man er i de rene matematikfag. Min indfaldsvinkel på matematikfilosofi var, at jeg befandt mig meget på Center for Naturfilosofi [Center for Naturfilosofi og vidensstudie, ved Niels Bohr instituttet, red.], hvor man prøver at opsamle studerende og ansatte, på det naturvidenskablige fakultet, som har filosofiske interesser. På et tidspunkt manglede man så nogen til at lave videnskabsteori, og det var ret oplagt at jeg kom ind over, og så lavede jeg det kursus [Videnskabsteori for matematiske fag, (blok 3), red.]. Jeg blev så interesseret i det, at jeg søgte en Ph.d.

Mikkel gik videre og forklarede hvad sit forskningsprojekt gik ud på,

Min indfaldsvinkel var, nu da jeg havde denne her baggrund indenfor kunstig intelligens, hvor man havde fundet ud af, at det klassiske logik drevne paradigme havde spillet fallit, at spørge: hvad ville de her nye erkendelser om hvordan mennesket tænker, betyde for den måde man så på matematikken?

Mikkels forskning – naturalisme

Jeg tog udgangspunkt i naturalismen, hvor man beskriver et fænomen – i det her tilfælde matematikken – ved kun at tage udgangspunkt i videnskabelige teorier om mennesket og virkeligheden omkring os.

Mikkel forklarer, at naturalismen selvom den umiddelbart virker ukontroversiel, langt fra er det. F.eks. udelukker den en del klassisk matematik-filosofi, som f.eks. Platonismen.

Mit bidrag er at jeg har gjort op med en reduktionisme som typisk ligger i de naturalistiske beskrivelser af matematikken. Man ville altid forsøge at benytte én forklaringmodel til at reducere matematik til én type entiteter.

Mikkel forklarer, at der særligt var tre sådanne forklaringsmodeller indenfor naturalismen. Den evolutionsbiologiske model, hvor alt matematik kan forklares som et resultat af Darwinistisk evolution. Den kognitionsteoretiske model, hvor man forklarer matematikken ud fra de måder mennesket tænker på. Den tredje model, den socialkonstruktivistiske, vil forklare matematikken ud fra sociale forhold, f.eks. menneskelig interaktion, politiske magtforhold, osv.

Vi spurgte ham hvad matematikernes reaktion er på, at deres emnefelt gøres til genstand for sociologien, biologien, og kognitionsteorien.

Man møder både modstand, men også genkendelse. Der er nogle der ikke bryder sig om at man siger, at matematik blot er et udtryk for ens natur. At det ikke er evige sandheder, men er påvirket af vores kultur og vores biologi. Det er der mange matematikere, der tager anstød af, at matematikken ikke består af universelle sandheder.

Der hvor jeg for alvor møder modstand, det er blandt dem som ikke er forskningsmatematikere, f.eks. gymnasielærere – de bliver meget vrede. Jeg har skrevet nogle populærvidenskabelige artikler – f.eks. om at man ikke logisk fuldstændigt kan redegøre for matematikkens grundlag – hvor jeg har fået vrede e-mails fra gymnasielærere, der mener, at der godt kan være noget om snakken, men at det ikke er noget man skal fortælle offentligt. De vil godt bevare det billede af, at matematikken er noget helt særligt. De mener, at det blot komplicerer sagerne og, at det er meget lettere at undervise, hvis man bare kan komme med de der endegyldige sandheder.

Men de forskningsmatematikere som jeg har snakket med, de er klar over, at der er problemer og er interesserede i at finde ud at hvad matematik egentlig er. Mange matematikere er meget reflekterede og åbne, og er helt med på at matematik ikke blot er evige sandheder. De er interesserede i at få en mere brugbar matematik-filosofi.

Efter at have hørt lidt om matematikerenes reaktioner på matematik-filosofien, var vi også interesseret i at høre lidt om hans tanker vedrørende matematikkens og filosofiens sammenspil. Her forklarede Mikkel:

Der var en meget tæt sammenknytning mellem matematik og filosofi langt op i historien, også i de første årtier af 1900-tallet. Der var mange store filosoffer, der også var matematikere, og omvendt... man kan ikke sige hvad de var, om det var det ene eller det andet. Leibniz, Descartes, Hilbert, Gödel, Wittgenstein... I 1600- 1700-hundrede tallet skelnede man ikke mellem om man var filosof eller matematiker. Det stoppede i 1930'erne. Der blev matematikfilosofien – i hvert fald den som matematikere beskæftigede sig med – til matematisk logik som egentlig bare blev en underdisciplin af matematik. Der var selfølgelig nogle, som brød ud og filosoferede mere frit over hvad matematik var, udover den matematisk-logiske eller formalistiske ramme. F.eks. Ruben Hersh og Paolo Mancosu. De matematikfilosoffer vi har herhjemme er sådan nogle som Jessica Carter, og Henrik Kragh [begge matematikere, red.].

Mikkel forklarer, at der nu er flere folk med forskellige baggrunde, som bedriver matematik-filosofi, f.eks.

kognitionsteoretikere, biologer, og filosoffer, som slet ikke har en faglig baggrund indenfor matematik, men som betragter matematik, som objekt – de ser på matematik udefra.

Videnskabsteori – fagets relevans

Kurset "Videnskabsteori for de matematiske fag" som Mikkel underviser i er et specielt kursus, idet indholdet ikke som sådan er matematik, men bevæger sig på et metaniveau, hvor matematikken selv, er genstand for videnskabelige undersøgelser. Vi spurgte Mikkel hvad kursets formål er.

Det er en opfordring til at tænke selv. Det er en begyndelse, som skulle være nok til at folk selv kan komme videre, hvis de interesserer sig for videnskabsteori.

Vi spurgte om man kan risikere, at det tværfaglige kommer til at tage lidt af fagligheden ud af matematik uddannelsen. Eller omvendt, om man kan få et fagligt udbytte ud af Videnskabsteori-kurset.

Nu fylder matematik ret meget i det kursus, og jeg tror da, at folk får en større bevidsthed om hvad det er de laver, og det kan måske også i sidste ende gøre dem til bedre matematikere. Når man er færdig og skal være matematiker eller benytte matematik i forskellige sammenhænge, så håber jeg, at man kan få glæde af at have en større indsigt i hvad det er man egentlig gør. Jeg kan ikke huske citatet præcist, men Aristoteles siger noget i stil med: *'En person med erfaring kan godt vide hvad der sker, men ikke hvorfor. Han kan nok handle, men det sker på samme automatiske måde som fx. ild brænder. Mesteren derimod forstår også hvorfor tingene sker, og hvorfor han må handle som han gør, og det er det, der gør ham til mester'.*

Men, tilføjer Mikkel,

Det tværfaglige, og metaniveauet må heller ikke stå i vejen for den egentlige faglighed. Jeg er meget ydmyg over at jeg overhovedet får lov at tage et 1/8-årsværk af folks tid. Jeg synes ikke man kan forlange mere.

Hvad så med dem, der ikke skal være deciderede matematikere?

Dem der bliver gymnasielærere vil have en del glæde ud af at have metaniveauet med. Det vil gøre det lettere for undervisningen, hvis man selv har en lidt dybere forståelse af hvorfor man gør det man gør. Endeligt er der dem, som kommer ud i erhverv. De kan have mere glæde af nogle af de andre dele af kurset, etik delene, og delene om forholdet mellem universiteterne og erhvervslivet. Jeg tror, at der vil være noget at komme efter for de fleste, i hvertfald på lidt længere sigt.

Hvad er Matematik?

Vi ville høre om Mikkel, som en, der kommer udefra, kunne give en definition på hvad matematik er.

Det var et godt spørgsmål. Ja, det er faktisk utroligt svært at sige. Altså en klassisk definition tror jeg ville være at matematik er det der beskæftiger sig med antal og størrelser. Det vil så at sige være de to rødder matematik begynder med og så er der bygget ovenpå med lag på lag af abstraktion, nye inspirationskilder og behov fra videnskaberne omkring. Der har været et behov ikke bare for at beskrive antal og størrelser, men også - for at tage et af de helt store eksempler – for at beskrive bevægelser og dynamik og på den måde får man så klistret analysen på og så videre.

Det er en sjov definition du kommer med. Den handler om hvad der udgør objekterne, men siger ikke noget om metoden – beviset – som mange måske vil mene er kendetegnende for matematik.

Det kan I have ret i, men det er måske også fordi jeg har et udgangspunk, der siger, at man ikke må glemme rødderne, og det er måske den fejl man begår i den der meget hårdnæsede formalisme; hvor man så at sige sparker den stige, man selv er kravlet opad væk under sig. Beviset er for mig et argument for, at en bestemt sætning er rigtig. En klassisk definition på et bevis er, at det er en logisk gyldig slutning fra sikre præmisser som dermed gør en sætning sand – ubetvivlelig sand. Det vil jeg ikke sige. Jeg vil sige, at det er et argument, der gør at vi overbeviser os om, at en sætning holder i et eller andet omfang. Men så kommer spørgsmålet så: 'Jamen, hvad er så et argument?' og det er derfor jeg hellere vil sige et argument, for det kan være så mange ting. Nu har vi et bestemt syn på hvad et argument er; hvor det skal have en formel struktur, men det kunne være alle mulige andre ting og det har det været historisk set – det kunne være en tegning eller en figur.

Hvad med aksiomerne? Altså den aksiomatiske tilgang som vi kender helt tilbage fra Euklid, vil du mene, at den er en central og nødvendig del af matematikken?

Euklids geometri var aksiomatisk opbygget, og den stod som en monolit i matematikken, men man havde masser af matematik uden om som var opbygget ikke aksiomatisk, tag for eksempel analysen. Det var først i midten af 1800-tallet da man opdagede at det var noget værre rod man havde vovet sig ud i med uendelighed og alt det andet man ikke kunne styre, at man fik et enormt behov for at sige lad os gøre lige som Euklid, lad os få det på sikker grund og bygge det aksiomatisk op.

Nu er vi i en virkelighed, hvor matematikken er aksiomatisk opbygget og det spiller selvfølgelig en rolle, men måske ikke den rolle det var tiltænkt, hvor det skulle have givet absolut sikkerhed. Det giver selvfølgelig en nogenlunde sikkerhed, hvor der ikke er nogle åbenlyse inkonsistenser. Man får en forståelse af hvordan argumentsstrukturen er og man får klarlagt hvilke forudsætninger man har brug for at gøre sig. Nu står det jo lysende klart, at der er ting man ikke kan gøre unden at have udvalgsakisomet med.

Man kunne måske forstille sig at der i fremtiden ville opstå flere forskellige aksiomssystemer alt efter inden for hvilken del af matematikken man arbejder inden for, eller hvilke ønsker man ellers måtte have?

Det er stadig et meget rigt forskningsområde inden for den del af matematik filosofien jeg vil kalde for matematisk logik. Både i 1910'erne, 20'erne og 30'erne eksperimenterede man med en del forskellige aksiomssystemer, og i dag overvejer man meget om man skal tilføje aksiomer til ZFC [Zermelo-Fraenkel set theory with axiom of Choice, et aksiomssystem for matematikken, red.]

og hvilke konsekvenser det vil have. Der er en matematikfilosof som hedder Penelope Maddy, der har skrevet en hel del om det. Nu bygger ZFC jo på mængdelære, men der er også andre, der overvejer om man skulle tage udgangspunkt i nogle andre teorier; for eksempel kategoriteori.

Men tror du der vil være tale om, at man vil erstatte ZFC med for eksempel et kategoriteoretisk grundlag, eller vil vi måske se en pluralitet af aksiomssystemer [for hele matematikken], der eksisterer side om side på samme måde som den euklidiske og ikke euklidiske geometri gør idag?

Det er jo et sociologisk spørgsmål I stiller der, for det kommer an på hvordan matematik fungerer som paradigme. Historisk set har matematik været utroligt paradigme stærkt, hvor det har været ét paradigme, der har domineret. Det ligger måske blandt andet i den træning man får som matematikker, man bliver indsocialiseret meget effektivt i et bestemt paradigme. Man bruger al sin energi på at lære at gøre al ting sådan som læreren gør det. Hvis du kigger i matematikhistorien har der været meget få afvigende paradigmer. Et eksempel er intuitionismen. Der er stadig væk nogle få intuitionister tilbage, men det er ikke sådan at man har to forskellige skoler.

Mikkel nævner her computerens indtog i matematikken og den eksperimentelle matematik som et område, hvor man måske så småt kan se et opgør med, hvad der skal til før vi tror på en sætning, altså hvad der udgør et godt argument.

Det er præcist der [med hensyn til hvornår vi skal godtage en sætning] hvor matematikkerne har været forbløffende enige. Ikke over historisk tid, men hvis du tager det tværsnit på et givet tidspunkt så har der, måske ikke været 100% enighed, men en ret stor enighed. Hvis du for eksempel sammenligner med fysikken, hvor for eksempel Einstein ikke fik Nobel Prisen for relativitetsteorien, fordi der var mange, der ikke troede, at den var korrekt. Og blev ved med at tro at den ikke var korrekt helt indtil de døde. Så du ville finde folk der ikke troede på den i 50'erne og 60'erne. Man kan sikkert også finde eksempler i matematikken, men jeg tror, at det ligger i matematikkens natur, at der er en højere stræben efter konsensus end i de andre videnskaber, selvom det selvfølgelig ikke er sådan at der altid er konsensus. Jeg vil mene at der er en god forklaring på det. Hvis vi taler om det sociologiske niveau er matematik normativt på en måde som andre videnskaber ikke er. Hvis man overvejer hvad genstandsfeltet for matematik er, er det ikke på sammen måde et oplagt genstandsfelt, som man kan gå ud og lave en falsifikation på som i andre videnskaber; der er en virkelighed der ude, som man i et eller andet omfang kan holde teorierne op i mod. Det er der ikke på samme måde i matematikken, og derfor hviler matematikken på at vi er enige om, hvad der er rigtigt. Derfor mener jeg at der i sidste ende er en sociologisk funderet normativitet i matematik. Når vi siger at tingene er sande, så er det fordi vi er enige om, at det er det rigtige. Og i modsætning til socialkonstruktivisterne, der vil sige, at der kun er sociale årsager til, at vi er enige, vil jeg sige, at der kan være rigtige gode, biologiske funderede, grunde til at vi er enige.

Mikkel fortæller at årsagerne hertil skal findes i den måde vi er i verden på, samt den måde vi går til naturen på. Verden har dog ifølge Mikkel ikke en autoritet til at bestemme hvad resultatet af for eksempel "2+2" er. Denne autoritet ligger i sidste ende i det sociale fælleskab.

Indimellem når man til nogle punkter, hvor der ikke er vedtaget noget svar endnu. Det kan være, for at tage et historisk eksempel, hvis man har en uendelig række. Går man tilbage til 1800-tallet var der mange forskellige svar på hvad der var det rigtige at gøre. I sidste ende blev en af dem valgt ud af forskellige årsager, men her kommer den virkelige verden jo til kort, eftersom der ikke er uendelige mange objekter. Det skyldes altså alle mulige årsager om, hvad der passede bedst ind i den matematik man havde. Det svar som I får når I læser, det er en konsensus som man blot har besluttet. Man kunne gøre det på alle mulige andre måder, det vil der ikke være noget til hinder for udover at det ville blive lidt besværligt at regne, eller at man ikke ville kunne få de resultater man gerne ville. Det er altså en social konsensus som bliver indsocialiseret, når man studerer. Derfor mener jeg, at autoriteten til at sige hvad der er rigtigt eller forkert i højere grad ligger i det sociale fælleskab indenfor matematik, end den gør indenfor for eksempel et fag som fysik eller kemi. Der har vi en fysisk virkelighed, der i højere grad har autoritet til at sige hvad der er rigtigt og forkert. Det ligger i matematikkens natur, at der er sådan en høj grad af konsensus. Der bliver taget nogle beslutninger i de sociale fællesskaber af matematikere, som der ikke stilles spørgsmålstegn ved. Så hvis man vil lege det spil der hedder matematik, så må man acceptere disse beslutninger. Det vil være min analyse og det er der rigtige mange der vil være uenige i.

Matematik og computere

Slutteligt talte vi om computernes indtog i matematikken, særligt om kunstig intelligens og perspektiverne for de så kaldte "automated theorem provers".

Da man stod i 50'erne og lavede computere, så regnede man med at der bare skulle lidt mere fart på computerne så kunne matematikerne godt pakke sammen fordi computeren ville kunne gøre det meget lettere og hurtigere. Det har vist sig ikke at holde stik. Der hvor vi er i dag, er at avancerede computerprogrammer har noglelunde samme niveau som en første- eller andenårsstuderende på universitetet. Da må man så overveje hvorfor er de ikke bedre? Hvis man var rigtig formalist skulle man umiddelbart tro at det var noget de[computerne, red.] bare kunne. Det er jo et formelt system, så umiddelbart burde man kunne komme fra a til b vha. "tommelfingerregler", når nu en computer kan søge mange flere muligheder igennem end et menneske. Hvorfor er de så ikke bedre? For det første må man jo notere sig, at det er en befriende tanke for os matematikere at man ikke bliver arbejdsløs lige foreløbig. Vi kan faktisk noget, med vores lille fedt- og vanddrevne hjerne, som de der milliondollars-maskiner ikke kan.

Det vi kan er at indrage viden fra flere forskellige områder, så vi kan omformulere problemer fra én kontekst til en anden hvor de bliver lettere at løse. For eksempel et af de problemer som computere aldrig kan løse, eller som rigtigt mange programmer har problemer med, er at vise at der kun findes én to-gruppe [gruppe af orden to, red.]. Hvis man giver en førsteårsstuderende det problem, så vil han tænke sig lidt om og så vil han tegne gruppe diagrammet[kompostionstabellen, red.] og prøve at plotte ind. Så kan man lynhurtigt se at det kun kan fyldes ind på én måde, og så kan der kun være én to-gruppe. Men en computer kan ikke tegne diagrammet. Den sidder med aksiomerne, og så er det kolossalt svært at bevise det udfra aksiomerne. I gruppeteori vil du hurtigt skulle vide noget om primtal og divisorer, for at kunne vise mange af sætningerne. Ja, faktisk bare for at kunne formulere dem.

Mikkel forklarer at det i den forstand er meget vanskeligt blot at bedrive matematik indenfor kun ét område, da man som eksemplet ovenfor viser, at man hurtigt for

brug for at indrage viden fra andre dele af matematikken.

En sidste ting som computere ikke kan, er at de ikke kan formulere højereordensbegreber. Det at man kan introducerer højereordensbegreber, gør at man kan beskæftige sig med tingene netop på et begrebsmæssigt højere niveau. Man kan skære tingene ud i blokke, som gør det lettere at flytte rundt med dem og det gør så, at et menneske lettere kan nå højere op i matematikken. For at give en analogi der måske er mere forståelig, så kan man sige at hvis computeren havde lært geometri, så ville den blive ved med at beskæftige sig med punkter mens vi mennekser ville indføre linier, cirkler og polygoner og det vil gøre det meget lettere for os at lave teoremer.

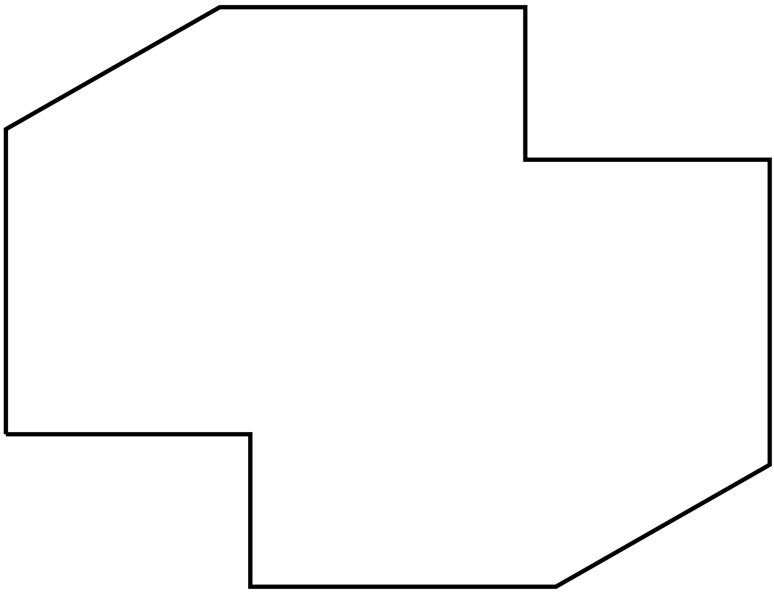
Mikkel fortæller videre at noget vi kan, er at benytte os af analogier, så hvis vi har en metode der virker i et bevis kan vi forsøge at overføre til et andet, hvor vi genkender et lignende mønster. Det påpeger Mikkel dog kræver fantasi, og det er derfor at maskinerne har så svært ved det, for teknisk set er en analogi eller en metafor altid et falsk udsagn.

De her "automated theorem provers", altså kunstige intelligenser, der prøver at bevise sætninger, de er jo perfekte formalister. Og deres problemer med at arbejde viser at formalismen i sidste ende kommer til kort, på den måde at den ikke beskriver hvad det er matematikere gør fuldstændigt. Den beskriver noget af det matematikere gør, men den beskriver ikke det hele, og jeg tror at det den har udeladt er noget af det vigtigste. Præcis de der evner, at danne konceptuelle sammenblandninger, danne analogier og danne højereordensbegreber. Når man laver matematik så er det altså ikke kun den der skaksspils-intelligens der skal i brug. Vi mennekser, vi bruger hele vores repertoire af kognitive redskaber, når vi laver matematik, og det er derfor, at I er bedre til at lave matematik end en computer.

Med denne højst opløftende konklusion slutter vores interview med Mikkel.

Blokkens matematiske objekt

Kan du gætte hvad det er? Hvis ikke, så se på side 39.



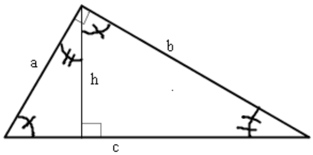
Pythagoras ifølge Albert

– Et lille bevis for $a^2 + b^2 = c^2$

Jingyu She

Pythagoras' sætning er et mantra inden for Euklidisk geometri: $a^2+b^2=c^2$. Da Jacob E. i 1890 satte sin 11-årige nevø til at lære beviset for sætningen, lavede drengen i stedet sit eget.

For en retvinklet trekant med hypotenusen c konstrueres en højde vinkelret på c. Da dannes to mindre retvinklede trekanter, T_a og T_b, som er ensvinklede med både hinanden og den oprindelige trekant, T_c: Lad nu E_a, E_b, E_c betegne trekanternes arealer.



Idet arealforholdet m mellem to ensvinklede polygoner er lig kvadratet af forholdet af de hinanden svarende sidelængder, har vi efter lidt omskrivning:

$$E_a = ma^2,\ E_b = mb^2,\ E_c = mc^2.$$

T_a og T_b udgør til sammen T_c, hvilket giver:

$$E_a + E_b = E_c \qquad \text{dvs.} \qquad ma^2 + mb^2 = mc^2,$$

hvoraf Pythagoras' sætning udledes ved at dividere igennem med m. Det kan tænkes, at nevøen, som iøvrigt hed Einstein, senere fik ideen til sin berømte formel inden for den specielle relativitetsteori ved $E = m(a^2+b^2) = mc^2$.

Litteratur

[1] M. Schroeder: *Fractals, Chaos, Power Laws*, W. H. Freeman and Co, 1991

Ti matematikere i Basta

– Simpel folkeskole matematik... eller hvad?

Bo 'Maling' Malling Christensen

Vi kender dem alle; de quizshows hvor man ringer ind med et kvalificeret bud, og hvis man er heldig nok til at komme igennem, så er det ikke lige svaret de havde i tankerne.

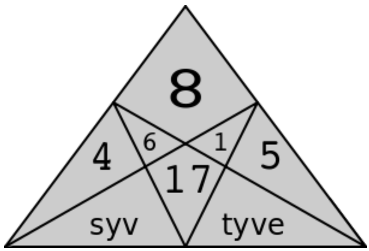
Den 6. oktober 2009 blev der sendt sådan et program på Kanal København. Detektivprogrammet Basta forsøgte at tage sagen op og undersøge om dette kunne være en gyldig måde at tage folks penge på.

De kunne dog ikke klare det alene, så de hev fat i nogle folk fra det klogeste folkefærd i verden, nemlig matematikere. Thi, hvis *de* ikke kunne løse opgaverne – der blev fremstillet som simpel folkeskolematematik – så var der to muligheder:

1. Det var ikke simpel folkeskolematematik
2. Vores verden bryder sammen.

Matematikerne blev hevet ind i studiet og regnede på livet løs. Som forventet kom de dog ikke frem til noget resultat. Da vores verden endnu ikke er brudt sammen, må det betyde at der ikke var tale om folkeskolematematik. Dette var også konklusionen som Basta endte med.

Opgaven lød ellers så simpel; Læg alle tallene i trekanterne sammen. Herunder er en kopi af trekanten i quizzen.



Det sjove var nu, at resultatet man søgte blev afsløret til sidst i showet – svaret var 428. Så selv om man ikke kunne finde løsningen undervejs, så kan man finde frem til den bagefter, nu hvor facit er givet – eller kan man? Kan du?

LaTeX på et øjeblik

Kristian Knudsen Olesen

Intentionen med denne guide er, *meget hurtigt* at gøre læseren i stand til at sætte dokumenter op i LaTeX. Som nogle måske ved, så er det muligt at skrive lange bøger om LaTeX, men dette er ikke forsøgt her, og grundet guidens beskedne længde, er den til tider meget overfladisk. Dette er alt i den gode sags tjeneste, at læseren skal komme hurtigt i gang, og senere kan få forståelse af hvad der sker når LaTeXmaskinen går i gang.

Åhhh nej! LaTeX. Det kan jeg ikke finde ud af

Det er noget vås. I modsætning til hvad mange tror, så er LaTeX faktisk *ret nemt* at lære. Hvad der gør LaTeX så forskellig fra andre tekstbehandlingsprogrammer, du måske er vant til at bruge, er, at det ikke er, det man kalder et *WYSIWYG*[4]-skriveprogram. Det skal man dog ikke lade sig slå ud af, for man vil opdage, at det faktisk gør det nemmere at bruge, når man først er kommet i gang.

LaTeX er noget, man lærer ved at bruge det, så denne guide vil tage udgangspunkt i et eksempel på et LaTeX-dokument. Mere konkret vil jeg benytte filerne `short_latex_example.tex` og `short_latex_example.pdf`, som begge kan hentes fra

`http://www.math.ku.dk/~m07kko/latex/short_famos`

I den her guide vil de to filer blive henvist til med henholdsvis `.tex`-filen og `.pdf`-filen. Hvis du har problemer med "æ", "ø",

[4]WYSIWYG er forkortelse for *What you see is what you get*, eksempel på dette er MS Word eller OpenOffice.

og "å", så start med at læse afsnittet sidst i denne guide, der adresserer netop det problem. Lad os så komme i gang!

Hvad skal jeg bruge for at komme i gang?

For at skrive dokumenter i LaTeX skal du bruge to programmer. Det ene bliver kaldt en oversætter og det andet bliver kaldt en editor. Det eneste af de 2 programmer du vil have noget med at gøre er editoren, men den skal bruge oversætteren for at fungere. En lille smule tekst om disse to programmer, samt et link til hvor man kan hente dem, kan findes her:

`http://www.science.ku.dk/it/vejledninger/software/`

under punktet LaTeX. Bemærk her, at den oversætter man skal bruge varierer alt efter om man bruger Windows, Linux eller Mac OS X, hvorimod editoren altid er den samme, nemlig Texmaker[5]. Hvis man bruger Windows, skal man bruge den oversætter, der hedder MiKTex, hvis man bruger Linux, skal man bruge den oversætter, der hedder Tex Live og hvis man bruger Mac OS X, skal man bruge den oversætter, der hedder MacTex.

Når man har installeret disse to programmer, er man klar til at skrive dokumenter ved brug af LaTeX.

Hvordan ser et LaTeX-dokument ud?

Et LaTeX-dokument består af to dele, en opsætning (kaldet en *preamble*) og selve indholdet, dvs. det, man ønsker at sætte op med LaTeX. Hvis man kigger i `.tex`-filen vil man se følgende preamble:

[5] Der findes et hav af muligheder for editore, men det er ikke min intention at introducere dem her.

```
\documentclass[a4paper,12pt]{article}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage[danish]{babel}
\usepackage{amsmath,amssymb,amsfonts,amsthm}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{color,eucal,enumerate}
```

Ved første øjekast kan det jo godt se *meget* kompliceret ud, og det er ikke så mærkeligt, for det er rent faktisk lidt kompliceret. Den gode nyhed er dog, at man ikke behøver at forstå, hvad det er, der sker i ens preamble. Ens preamble behøver nemlig ikke at variere fra dokument til dokument, og man kan derfor bare kopiere en preamble, man har stående i et ældre dokument. Faktisk er det ikke bare noget, man kan, det er også det, de fleste gør.

Efter preamblen kommer selve dokumentet. LaTeX er mange gange selvforklarende og det er, som man kunne gætte, også mellem de to kommandoer `\begin{document}` og `\end{document}`, at alt, som man vil have med i sit dokument, skal placeres. Alt efter `\end{document}` vil blive ignoreret, hvilket ikke kan siges om alt før `\begin{document}`. Her skal man helst holde sig fra at skrive noget, med mindre man ved, at det er noget, der *skal* stå der.

At skrive ting efter `\end{document}` er ikke den eneste måde man kan få LaTeX til at ignorere, hvad man skriver. Men kan *udkommentere* linjer med `%`, hvilket betyder, at hvis man placerer et `%`, vil *alt* på linjen efter `%`-tegnet, bliver ignoreret af LaTeX(inklusiv `%` naturligvis). Denne feature er meget smart under selve skriveprocessen, da man kan udkommentere tekst, hvis man vil prøve at formulere det anderledes i stedet for at slette det. På den måde kan man altid ombestemme sig.

Kommandoer i LaTeX

Som det fremgår ovenfor skal der stå en hel masse kommandoer i ens preamble, men der er også kommandoer, der ikke skal bruges i opsætningen. De fleste kommandoer i LaTeX har enten formen

`\begin{kommandonavn} ... \end{kommandonavn}`

eller formen `\kommandonavn{...}`. Hvor `...` er tekst, man selv indsætter[6]. Der kan dog forekomme afarter af de to. Det kunne være, at der var to argumenter som følger

`\kommandonavn{...}{...}`.

Nogle tegn, som for eksempel `{`, `}` og `\`, er i LaTeX reserveret til kommandoer. Det betyder ikke at man ikke kan skrive dem, men at man skal gøre det ved brug af kommandoerne `\{`, `\}` og `\backslash`.

Titel og overskrifter

Det første, vi kan se i `.tex`-filen efter `\begin{document}`, er, at der bliver produceret en titel med forfatter og dato, når man bruger kommandoen `\maketitle`. Det kræver selvfølgelig, at man har indtastet de relevante oplysninger, dvs. udfyldt

`\title{...}`, `\author{...}` og `\date{...}`.

I `.tex`-filen er `\date` udfyldt med kommandoen `\today`, hvilket nok er selvforklarende.

Overskrifter er noget man tit har lyst til at bruge, når man skriver et dokument. De er heldigvis simple at bruge. De kommer i forskellige niveauer, nemlig

[6] Denne notation er gennemgående i denne guide.

`\section{...}`, `\subsection{...}` og `\subsubsection{...}`.

Når man har observeret dette smarte system, kan man naturligvis fristes til at tro, at der også er en `\subsubsubsection`-kommando, men dette er ikke tilfældet. LaTeX mener ikke, at man kan have en overskrift, der er så lille. Det ville være at drive det for langt. Med disse kommandoer vil overskrifterne automatisk blive numereret. Hvis man vil undgå dette, skal man sætte en `*` foran Tuborg-parenteserne som fx `\section*{...}`. Et par eksempler på overskrifter kan findes i `.tex`-filen.

Tekst og formatering

At skrive tekst i LaTeX er det nemmeste. Man skriver det bare der i dokumentet, hvor man vil have det til at stå. Hvis man derimod vil have sin tekst formateret på en eller anden speciel måde, skal der kommandoer til. Eksempler på dette kunne være, hvis man vil skrive fed eller kursiv tekst. I disse tilfælde skal man benytte henholdsvis `\textbf{...}` og `\textit{...}`.

Man vil nok opdage, når man skriver tekst i LaTeX, at LaTeX ignorerer multible mellemrum. Dette er ret forskelligt fra mange andre tekstediteringsprogrammer, hvor man får et langt, blankt stykke, hvis man indsætter en hel masse mellemrum efter hinanden. Grunden til dette er, at LaTeX simpelthen ikke kan tro, at du vil have flere mellemrum i træk. Hvis man virklig gerne vil have flere mellemrum i træk, kan man bruge `\`. Det vil indsætte et tvungent mellemrum. Sådan kan man bruge `\ \ \`, hvis man vil have 3 mellemrum i træk.

Næsten det samme gør sig gældende med linjeskift. Hvis man laver et enkelt linieskift vil LaTeX bare indsætte et mellemrum, og hvis man laver 2 eller flere linjeskift, vil LaTeX indsætte *et* *enkelt* linjeskift efterfulgt af et indryk. Man kan også indsætte et tvungent linjeskift med `\\`, og i dette tilfælde kommer der ikke noget indryk. Hvis man er interesseret i at lave en blank linje, og ikke bare et linjeskift, skal man indsætte `\\ \newline` for enden af linjen.

At skrive matematik

En af grundene til overhovedet at bruge LaTeX er, at det er helt fænomenalt til at skrive matematik. Der er to forskellige måder, man kan have lyst til at skrive sin matematik på. Den ene måde er inde i teksten som fx her: $f(x) = x^2$. Den anden måde er, hvis man vil lave et display som her:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

I tilfældet, hvor man vil skrive matematik i teksten, skal man bare sørge for, at det matematik, man skriver, står mellem to `$`-tegn. Eksempelvis er det lille stykke matematik, der står i teksten ovenfor, skrevet ved `$ f(x) = x^{2} $`. Når man skriver matematik, bliver almindelige mellemrum ignoreret og man skal benytte `\` hvis man vil have et tvungent mellemrum.

Hvis man ikke vil have matematikken stående i teksten, men i et display, skal man skrive sin matematik mellem `\begin{align*}` og `\end{align*}`. Hvis man fjerner `*` vil linjerne blive nummereret. Det display, der står ovenfor, er skrevet ved

```
\begin{align*}
\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx =\frac{\pi}{2}
\end{align*}
```

Det er *ekstremt vigtigt*, at man ikke har nogen blanke linjer mellem `\begin{align*}` og `\end{align*}`, da LaTeX ellers giver fejl.

I disse to eksempler kan man se lidt af, hvordan man skriver matematik i LaTeX. Man kan for eksempel se, at `_{...}` giver et subscript og `^{...}` giver et superscript. Der er selvfølgelig flere kommandoer, og man kan se en del af dem ved at kigge i `.tex`-filen og sammenligne den med `.pdf`-filen.

Problemer med "æ", "ø" og "å"

En ting, der nogle gange kan drille i LaTeX, er "æ", "ø" og "å". Problemet fremkommer specielt, hvis dokumenter flyttes frem og tilbage mellem Windows, Linux og Mac OS X. Hvis du oplever, at LaTeX ikke viser specielle tegn (som "æ", "ø" og "å") rigtigt i dit pdf-dokument, kan du prøve at ændre `utf8` i linien

```
\usepackage[utf8]{inputenc}
```

til en af følgende, `latin1`, `Latin1`, `applemac` eller `ansinew`. Hvis du har problemer med at se "æ", "ø" og "å", allerede når du åbner `short_latex[example].tex`, kan du prøve at hente en af de andre `.tex`-filer fra hjemmesiden beskrevet øverst.

Efterskrift

Fra nu af er der kun øvelse tilbage. Det gælder om at komme i gang med det samme, for jo mere du bruger LaTeX, jo bedre bliver du til det. Hvis du skulle have nogle problemer eller spørgsmål, så skal du være velkommen til at sende mig en e-mail. Det kan jo ske, at jeg har tid til at svare på den.

Kristian K. Olesen
m07kko@math.ku.dk

Ulriks dagbog
– 24 timers i en aktuars liv

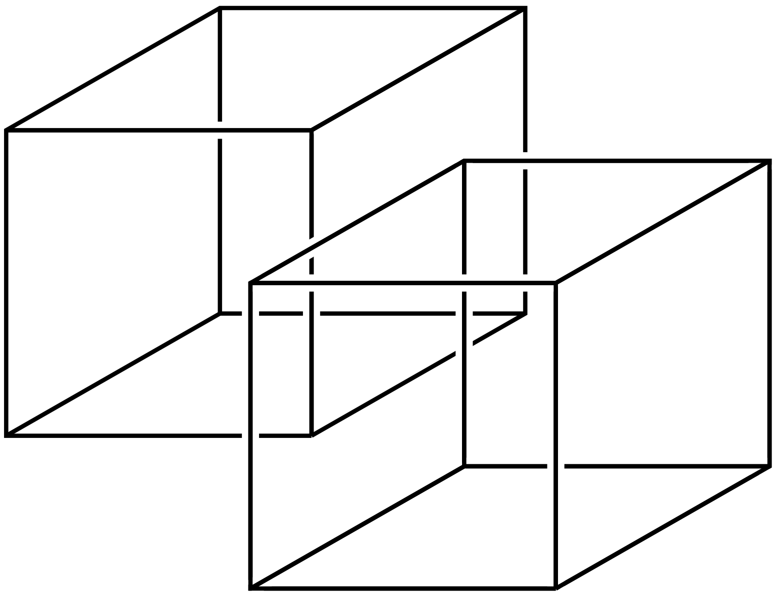
Ulrik Gold

Klokken er 6:45, og min alarm går. En ny dag er startet. Den står på bad, kaffe og "Go' morgen Danmark" indtil klokken bliver ca 7:30, hvorpå jeg går ned og tager bussen. Turen til universitetet bliver brugt på at skabe overblik over verdenssituationen, eller nærmere, hvad gratisaviserne anser for at være nyhedsværdige. Før jeg går til forelæsning, eller hvad morgenen nu byder på, skal der hentes mere kaffe. (Kaffe er nok det vigtigste i en aktuarstuderendes liv). Forelæsningerne kan variere stort, hvor man kan være uheldig at løbe ind i en mur af tør information, som bedst var egnet til at kurere insomni. Man kan være lige så heldig og få et emne, hvor man ønsker, at næste forelæsning var med det samme. Typisk efterfølger en spørgetime på mindre hold hvorpå der gennemgås de opgaver, der bør være lavet til dagen. Efterhånden som dagen skrider frem, finder jeg ofte ud af, at jeg har (belejligt) glemt min madpakke, hvorpå turen går til kantinen for at se, hvad dagens ret er. Det er ugens fisk, som er kodeord for guldmarkel. Øv. Heldigvis ligger der et pizzeria kun få minutter væk. I den næste times tid står den på mad og social hygge. Så står den typisk på en forelæsning mere, efterfulgt af dagens sidste spørgetime. Nu skal der laves opgave til næste uge, så min studiegruppe og jeg ikke behøves at lave den i weekenden. Når klokken er ved at blive 16-17 stykker, begynder folk begynder at tage hjemad eller på vores dejlige studiecafé. Er vi færdige der, skal det altid lige fejres med en lille en.

Tilføjelse: Redaktørene ser det som underforstået at Ulrik er hjemme i sin seng igen kl 6:45.

Blokkens matematiske objekt

Her er det så. Blokkens obejkt: *Et par gode kasser!*



Med disse sobre ord vil Famøs redaktion godt åbne Famøs helt egen brevkasse. Har du noget på hjertet, har du et spørgsmål eller er der noget du godt vil have diskuteret, så skriv et elektronisk brev til `famos@math.ku.dk`.

Hilbertmatricen

Christian Berg

Indledning

I elementær matrixregning kan man støde på *Hilbert matricen*

$$\mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

hvis j, k'te element er $1/(j+k+1)$, når man nummererer de $n+1$ rækker og søjler med tallene $0, 1, \ldots, n$. For små værdier af n kan man let udregne determinanten og den inverse matrix. For $n = 1, 2$ finder man $\det \mathcal{H}_1 = 1/12$, $\det \mathcal{H}_2 = 1/2160$ og

$$\mathcal{H}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.$$

Det overraskende er, at de inverse matricer får heltallige elementer, og at determinanten $D_n = \det \mathcal{H}_n$ følgelig bliver en stambrøk, altså en brøk af formen $1/k$ for et naturligt tal k. Der gælder

$$\det \mathcal{H}_n = \frac{[(1!)(2!)\cdots(n!)]^4}{(1!)(2!)\cdots(2n+1)!}, \tag{2}$$

men hverken formlen eller at det er en stambrøk er oplagt. Beviset følger nedenfor.

Hilbertmatricen blev introduceret af Hilbert i [12], hvor (2) bevises.

Hilbertmatricen og dens Uendeligdimensionale variant $\mathcal{H}_\infty$ har en række interessante egenskaber, som findes behandlet i [9]. Hvis man ønsker at udregne den inverse matrix på computer og repræsenterer stambrøkerne ved decimalbrøker opdager man, at der kan ske betydelige afrundingsfejl.

Den kendsgerning, at

$$\frac{1}{j+k+1} = \int_0^1 x^{j+k}\,dx,$$

som kan udtrykkes, at Hilbertmatricen er Hankelmatricen (s_{j+k}) hørende til momenterne $s_n = 1/(n+1)$ for Lebesguemålet på enhedsintervallet, jfr. detaljerne nedenfor, fik mig til at spekulere på om ikke egenskaber ved de tilhørende ortogonale polynomier, nemlig *Legendre polynomierne*, skulle kunne forklare, at de reciprokke Hilbertmatricer er heltallige, og det viste sig at være tilfældet. Det er diskuteret i detaljer i [7]. Overraskende nok gælder noget tilsvarende hvis Hilbertmatricen erstattes af Filbertmatricen

$$\mathcal{F}_n = (1/F_{j+k+1}), 0 \le j,k \le n,$$

hvor $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \ge 1$ er følgen af Fibonacci tal, se [6] eller det mere generelle resultat i [3].

I de sidste 25 år har der været stor matematisk aktivitet i området ortogonale polynomier og specielle funktioner. Der kan fremhæves mange grunde til det og lad mig nævne nogle få:

Med de fantastiske beregningsmuligheder som computerne har givet, har der været behov for at raffinere de eksisterende teoretiske metoder. De klassiske ortogonale polynomier har altid spillet en vigtig rolle ved numeriske beregninger (Gauss kvadratur). Computerne har gjort det meget nemmere end tidligere at teste hypoteser om specielle funktioner.

Teorien for q-serier eller q-specielle funktioner, der går tilbage til Heine (1848), har fået en renæssance bl.a. på grund af fysiske teorier om kvantedeformation. Værket [11] har haft stor betydning og kan opfattes som en statusrapport over vores viden på området.

Det blev observeret, at adskillige af Ramanujans opdagelser kunne forstås i et nyt lys ved teorien for ortogonale polynomier. Her skal henvises til R. Askeys vidunderlige artikel [4], hvor han bl. a. påpeger, at flere af Ramanujans besynderlige formler kan fortolkes som løsninger til indeterminerede momentproblemer, som er momentproblemer, hvor der er forskellige sandsynlighedsmål med de samme momenter.

Nyere talteoretiske resultater har kunnet bevises på elegant måde ved inddragelse af polynomial approksimation via ortogonale polynomier. F.eks. kan Apéry's sensationelle resultat om irrationaliteten af værdien af Riemann's zeta-funktion for $x = 3$

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

bevises ved udnyttelse af Legendrepolynomierne for intervallet $]0,1[$, se [5, Afsnit 7.7]. Det er de samme ortogonale polynomier vi skal udnytte i dette arbejde for at indse, at den inverse matrix til Hilbertmatricen har heltallige indgange.

Efter en kort introduktion til ortogonale polynomier i Sektion 2,3 studeres Legendrepolynomierne i Sektion 4 og endelig vises i Sektion 5, at den uendelige Hilbertmatrix $\mathcal{H}_\infty$ kan opfattes som en begrænset operator på Hilbertrummet ℓ^2.

Ortogonale Polynomier

Vi antager, at der er givet et sandsynlighedsmål μ på den reelle tallinje $\mathbb{R}$, og vi betragter målets *momenter*

$$s_n = s_n(\mu) = \int x^n \, d\mu(x), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

som antages at eksistere. Det er nu muligt at indføre et skalarprodukt på vektorrummet $\mathbb{P}$ af polynomier med komplekse koefficienter ved

$$\langle p, q\rangle = \int p(x)\overline{q(x)}\, d\mu(x), \quad p, q \in \mathbb{P}. \tag{4}$$

Med til kravet for et skalarprodukt hører, at $||p|| = \sqrt{\langle p, p\rangle} = 0$ kun er muligt, når p er nulpolynomiet. Af $\int |p(x)|^2\, d\mu(x) = 0$ skal altså følge, at p er nulpolynomiet. Da et egentligt polynomium kun har endeligt mange rødder, må vi kræve, at sandsynlighedsmålet μ ikke er koncentreret i endeligt mange punkter. Mængden af sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$ med vilkårlige momenter og som ikke er koncentreret i endeligt mange punkter betegnes $\mathcal{M}^*$.

Lad der nu være givet $\mu \in \mathcal{M}^*$. Gennemføres Gram-Schmidt ortonormalisering af monomierne $1, x, x^2, \ldots$ opnås en følge $(P_n)_{n\geq 0}$ kaldet de *ortonormale polynomier* knyttet til μ, og som er entydigt bestemt ved kravene

(i) P_n er et polynomium af grad n med positiv ledende koefficient,

(ii) $\int P_n(x)\overline{P_m(x)}\, d\mu(x) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{for } n = m \\ 0, & \text{for } n \neq m. \end{cases}$

Da μ har masse 1 må $P_0(x) = 1$. Man ser let, at P_n får reelle koefficienter, så konjugering over $P_m(x)$ er overflødig i ligningen ovenfor.

Hvis $(k_n)_{n\geq 0}$ er en følge af reelle tal så $k_0 = 1, k_n \neq 0$ for $n \geq 1$, så vil polynomierne $p_n = k_n P_n$ i stedet for (ii) opfylde

$$\int p_n(x)\overline{p_m(x)}\, d\mu(x) = k_n^2 \delta_{n,m}.$$

De ortonormale polynomier P_n er især nyttige ved teoretiske overvejelser, men de klassiske ortogonale polynomier, dvs Hermite, Laguerre, Legendre, Chebyshev og Jacobi polynomierne, er sædvanligvis givet som $p_n = k_n P_n$ med en passende følge k_n.

Vedrørende den generelle teori for ortogonale polynomier henvises til de klassiske værker af Szegő [14] og Akhiezer [1], til Chihara's bog [8] og til den ret nye monografi af Ismail [13]. De vigtigste ortogonale polynomier optræder i det såkaldte Askey skema eller dets q-version. Det er de polynomier der kan fremstilles som hypergeometriske funktioner eller q-hypergeometriske funktioner op til niveauet ${}_4F_3$ henholdsvis ${}_4\varphi_3$.

Det er værd at bemærke, at skalarproduktet (4) kun afhænger af momenterne, for hvis

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \tag{5}$$

så finder vi

$$\langle p, q \rangle = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} s_{j+k} a_j \overline{b_k}, \tag{6}$$

som fremhæver betydningen af matricerne

$$H_n = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

kaldet *Hankelmatricerne*. Læg mærke til at det j,k'te element i $(n+1) \times (n+1)$ matricen H_n er s_{j+k}, idet der er tradition for at nummerere rækker og søjler fra 0 til n. Matricen H_n er symmetrisk og den tilhørende kvadratiske form hænger sammen med skalar produktet

$$\langle p, q \rangle = (a_0, a_1, \ldots, a_n) H_n (\overline{b_0}, \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n})^t,$$

idet p, q er som i (5) og $(\overline{b_0}, \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n})^t$ er en søjlevektor. Her har vi for simpelheds skyld antaget, at begge polynomier har grad $\leq n$, hvilket altid er muligt ved at tilføje nulled.

Man ser, at matricen H_n er positivt definit, og dermed er $D_n := \det H_n > 0$ for hvert n.[7]

Det er iøvrigt en simpel øvelse i determinantteori at vise, at P_n kan udtrykkes på følgende måde (idet vi sætter $D_{-1} = 1$)

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} \det \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Ved at udvikle determinanten efter sidste række ser man nemlig, at formlen (7) definerer et polynomium P_n af n'te grad og den ledende koefficient er

$$\sqrt{D_{n-1}/D_n}, \tag{8}$$

så (i) er opfyldt. For at se (ii) udnyttes også udvikling af determinanten efter sidste række, så for $k \leq n$ er

$$\int P_n(x)x^k \, d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} \det \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-1} \\ s_k & s_{k+1} & \cdots & s_{k+n} \end{pmatrix},$$

[7] En berømt Sætning af Hamburger fra 1920 karakteriserer momentfølgerne ved disse egenskaber: *Lad* (s_n) *være en reel talfølge med egenskaberne* $D_n := \det H_n > 0$ *for alle* $n \geq 0$ *og antag* $s_0 = 1$. *Så er* (s_n) *momentfølge for et passende* $\mu \in \mathcal{M}^*$.

som er 0 for $k < n$ fordi to rækker er ens, og for $k = n$ er udtrykket lig med

$$\frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}D_n = \sqrt{D_n/D_{n-1}}.$$

Heraf fås altså, at P_n er ortogonal på alle monomier x^k med $k \leq n-1$ og dermed på alle polynomier af grad $\leq n-1$. Udnyttes dette kan vi skrive

$$\int P_n^2(x)\,d\mu(x) = \sqrt{D_{n-1}/D_n}\int P_n(x)x^n\,d\mu(x) = 1,$$

og vi har vist, at også (ii) gælder.

Christoffel-Darboux's summationsformel

I teorien for Fourierrækker spiller Dirichlets kerne en vigtig rolle, idet den tillader beregning af rækkens afsnit. I teorien for ortogonale polynomier spiller kernen

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) \tag{9}$$

en analog rolle. Ortogonaludviklingen for en funktion f med hensyn til (P_n) er den uendelige række

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x), \quad \text{hvor } c_k = \int f(x)P_k(x)\,d\mu(x).$$

Man ser let, at rækkens afsnit $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$ er bestemt ved formlen

$$S_n(x) = \int f(y)K_n(x,y)\,d\mu(y). \tag{10}$$

Heraf fås specielt, at der for et polynomium p af grad $\leq n$ gælder

$$p(x) = \int p(y) K_n(x,y)\, d\mu(y). \tag{11}$$

Man kalder derfor $K_n(x,y)$ den reproducerende kerne.

Der vides iøvrigt næsten intet om punktvis konvergens af ovenstående ortogonaludvikling i det generelle tilfælde.

Som optakt til Christoffel-Darboux's formel for kernen $K_n(x,y)$ skal vi først redegøre for et andet nøgleresultat om ortogonale polynomier. Ortogonaludviklingen for $xP_n(x)$ er den endelige sum

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c(n,k) P_k(x), \tag{12}$$

hvor

$$c(n,k) = \int xP_n(x)P_k(x)\, d\mu(x), \quad k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Polynomiet P_n er ortogonalt på alle polynomier af grad $\leq n-1$ og specielt på $xP_k(x)$ for $k \leq n-2$. Dette viser, at der er højst 3 led i summen (12). Sættes for $n = 0, 1, \ldots$

$$a_n = \int xP_n^2(x)\, d\mu(x), \quad b_n = \int xP_n(x)P_{n+1}(x)\, d\mu(x), \tag{13}$$

har vi klart $c(n,n) = a_n, c(n,n+1) = b_n$ men også (for $n \geq 1$)

$$c(n,n-1) = \int xP_n(x)P_{n-1}(x)\, d\mu(x) = b_{n-1}.$$

Udnyttes, at den ledende koefficient i $P_n(x)$ er givet ved (8), så ser man let af (13), at b_n er givet ved udtrykket i følgende hovedresultat:

Sætning 1 (Treleds-rekursionen) *Lad følgerne $(a_n), (b_n)$ være defineret ved (13). Så gælder*

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= b_n P_{n+1}(x) + a_n P_n(x) + b_{n-1} P_{n-1}(x), \ n \geq 1, \\ xP_0(x) &= b_0 P_1(x) + a_0 P_0(x). \end{aligned}$$

Videre gælder

$$b_n = \frac{\sqrt{D_{n-1} D_{n+1}}}{D_n} > 0, \ n \geq 0.$$

Ved at definere $P_{-1} = 0$ behøver man ikke huske specialtilfældet $n = 0$ i treleds-rekursionen. Ved at udnytte denne 2 gange finder man ved lidt regning

$$\begin{aligned} (x-y)P_k(x)P_k(y) = b_k(P_{k+1}(x)P_k(y) - P_k(x)P_{k+1}(y)) \\ - b_{k-1}(P_k(x)P_{k-1}(y) - P_{k-1}(x)P_k(y). \end{aligned}$$

Summeres dette udtryk for $k = 0, 1, \ldots, n$ og udnyttes, at højresiden teleskoperer fås:

Sætning 2 (Christoffel-Darboux's summationsformel)

$$(x-y)K_n(x,y) = b_n \left(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)\right).$$

Vi skal nu give et andet udtryk for $K_n(x, y)$, som er afgørende for de talteoretiske aspekter af dette arbejde.

Det er uden videre klart, at vi kan skrive

$$K_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k}^{(n)} x^j y^k, \tag{14}$$

hvor tallene $a_{j,k}^{(n)}$ er entydigt bestemt og $a_{j,k}^{(n)} = a_{k,j}^{(n)}$. Samles disse tal i en $(n+1) \times (n+1)$-matrix $A_n = (a_{j,k}^{(n)})$, så er denne matrix den inverse til Hankel matricen H_n:

Sætning 3 *Der gælder*

$$A_n H_n = H_n A_n = E_n,$$

idet E_n er enhedsmatricen af orden $n+1$.

Bevis. For $0 \le l \le n$ giver den reproducerende egenskab (11) at

$$\int x^l K_n(x,y)\,d\mu(x) = y^l.$$

På den anden side har vi

$$\begin{aligned}\int x^l K_n(x,y)\,d\mu(x) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_{j,k}^{(n)} \int x^{l+j} y^k\,d\mu(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} s_{l+j} a_{j,k}^{(n)}\right) y^k,\end{aligned}$$

og derfor er

$$\sum_{j=0}^{n} s_{l+j} a_{j,k}^{(n)} = \delta_{l,k}.$$

$\square$

Legendrepolynomier

Sætning 4 *Polynomierne*

$$p_n(x) = \frac{1}{n!} D^n\,[x(1-x)]^n, \quad n \ge 0 \tag{15}$$

er ortogonale med hensyn til målet $\mu = 1_{]0,1[}(x)\,dx$*, og de tilhørende ortonormale polynomier er givet ved*

$$P_n(x) = (-1)^n \sqrt{2n+1}\, p_n(x). \tag{16}$$

Polynomierne p_n *har heltallige koefficienter og er givet ved formlen*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{n} x^k. \tag{17}$$

Bevis. Formel (15) kaldes Rodrigues' formel efter den franske matematiker og bankier O. Rodrigues, om hvem der for nylig er udkommet en biografi [2].

Ved Leibniz' formel for den n'te afledede af et produkt af to funktioner følger straks, at polynomiet p_n givet ved (15) er af n'te grad og givet eksplicit ved (17). For en funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ som er n gange kontinuert differentiabel på intervallet $[0,1]$, finder man ved gentagen partiel integration

$$\int_0^1 f(x) p_n(x)\, dx = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 [x(1-x)]^n f^{(n)}(x)\, dx.$$

Anvendes dette på $f(x) = x^k, k \leq n$ får vi

$$\int_0^1 x^k p_n(x)\, dx = 0, \quad k < n;$$
$$\int_0^1 x^n p_n(x)\, dx = (-1)^n \int_0^1 [x(1-x)]^n\, dx,$$

men det sidste integral er let at regne ud til

$$\int_0^1 [x(1-x)]^n\, dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

Da p_n har den ledende koefficient $(-1)^n\binom{2n}{n}$ følger, at de ortonormale polynomier er givet ved (16).

Bemærk, at $p_n(0) = 1$ for alle n. $\square$

Da momentfølgen er $s_n = 1/(n+1)$ ser vi, at Hankelmatricen H_n er en matrix af stambrøker

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix},$$

altså Hilbertmatricen fra indledningen. Den er positivt definit og der gælder

$$D_n = \frac{[(1!)(2!)\cdots(n!)]^4}{(1!)(2!)\cdots(2n+1)!}. \tag{18}$$

For at se (18) bemærker vi, at den ledende koefficient til P_n er

$$\sqrt{D_{n-1}/D_n} = \sqrt{2n+1}\binom{2n}{n}$$

ifølge (8), altså

$$\frac{D_{n-1}}{D_n} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2 = \frac{(2n+1)!(2n)!}{(n!)^4},$$

og heraf fremgår formel (18), som skyldes Hilbert, se [12]. Det fremgår også, at $1/D_n$ er et helt tal. Der gælder imidlertid meget mere som påvist i [10]:

Sætning 5 *Den inverse matrix til Hilbertmatricen har heltallige indgange.*

Bevis. Vi skal blot vise, at matricen A_n har heltallige indgange. Af (16) og (17) fremgår, at

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) p_k(x) p_k(y)$$

har heltallige koefficienter til $x^j y^k$, men det er netop indgangene i matricen A_n. $\square$

Bemærkning 6 I Collars arbejde [10] kan man finde en eksplicit formel for elementerne i A_n, som klart viser, at de er hele tal:

$$a_{j,k}^{(n)} = (-1)^{j+k} (j+k+1) \binom{n+1+j}{n-k} \binom{n+1+k}{n-j} \binom{j+k}{j}^2. \tag{19}$$

Hvis vi indsætter formlen (17) i udtrykket ovenfor for $K_n(x,y)$ finder vi følgende udtryk:

$$a_{j,k}^{(n)} = (-1)^{j+k} \sum_{l=\max(j,k)}^{n} (2l+1) \binom{l}{j} \binom{l}{k} \binom{l+j}{l} \binom{l+k}{l}. \tag{20}$$

Den identitet, der fremgår ved at sammenholde (19) og (20), kan vises ved induktion i n. Kaldes den numeriske værdi af højresiden i (19) for R_n og leddet i summen (20) for C_k, så består induktionsskridtet i formlen $R_{n+1} - R_n = C_{n+1}$, hvis bevis overlades til læseren.

Hilbertmatricen $\mathcal{H}_\infty$ som operator på Hilbertrummet ℓ^2

Betragt Hilbertrummet ℓ^2, som består af alle kvadratisk summable komplekse talfølger, i.e.,

$$\ell^2 = \{\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 0} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}, \tag{21}$$

med skalarproduktet

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}. \tag{22}$$

Vektorerne $\mathbf{e}_0 = (1,0,0,\ldots), \mathbf{e}_1 = (0,1,0,0,\ldots),\ldots$ udgør en ortonormal basis for Hilbertrummet ℓ^2.

Til en begrænset operator A på ℓ^2 knyttes den uendelige matrix $\mathcal{A} = (a_{j,k}), 0 \leq j,k$ givet ved

$$a_{j,k} = \langle A\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle, \tag{23}$$

altså k'te søjle er koordinaterne til billedvektoren $A\mathbf{e}_k$ med hensyn til den ortonormale basis. Der gælder altså

$$A\mathbf{e}_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}\mathbf{e}_j, \quad ||A\mathbf{e}_k||^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_{j,k}|^2,$$

hvor den første række konvergerer i ℓ^2 og den anden rækkesum følger af Parseval's formel. Specielt har vi, at $\mathcal{A}$'s søjler tilhører Hilbertrummet.

Man ser let at matricen hørende til den adjungerede operator A^* er matricen $\mathcal{A}^*$, hvis (j,k)'te element er $\overline{a_{k,j}}$. Specielt følger, at operatoren A er hermitesk hvis og kun hvis $a_{j,k} = \overline{a_{k,j}}$ for alle j,k.

Spørgsmålet er nu om Hilbertmatricen $\mathcal{H}_\infty$ er matrix for en begrænset operator. At svaret er ja følger af

Sætning 7 (Hilberts ulighed) *For* $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}, n \geq 0$ *gælder*

$$0 < \sum_{j,k=0}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k+1} < \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2. \tag{24}$$

Bevis. Til $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ betragtes polynomiet

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

som ikke er nulpolynomiet. Altså får vi

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^1 p(x)^2 \, dx = \\ \int_0^1 \Big(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\Big) \, dx = \sum_{j,k=0}^{n} a_j a_k \int_0^1 x^{j+k} \, dx \\ = \sum_{j,k=0}^{n} \frac{a_j a_k}{j+k+1}, \end{aligned} \tag{25}$$

hvilket giver den venstre del af uligheden (24).

Idet $\overline{p(e^{it})} = p(e^{-it})$ finder vi også

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |p(e^{it})|^2 \, dt = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |p(e^{it})|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{j=0}^{n} a_j e^{ijt}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k e^{-ikt}\Big) \, dt = \\ \sum_{j,k=0}^{n} a_j a_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} \, dt = \sum_{k=0}^{n} a_k^2. \end{aligned} \tag{26}$$

Bemærk, at ligningen overfor er et specialtilfælde af Parseval's ligning for Fourierrækker. Vi anvender nu Cauchys integralsætning og integrerer den hele holomorfe funktion $f(z) = p(z)^2, z \in \mathbb{C}$ over halvcirklen $[-1, 1] \cup \{e^{it} \mid t \in [0, \pi]\}$ og får

$$0 = \int_{-1}^{1} p(t)^2\, dt + \int_0^{\pi} p(e^{it})^2 ie^{it}\, dt,$$

hvoraf

$$\int_0^1 p(t)^2\, dt < \int_{-1}^{1} p(t)^2\, dt = \left| -i \int_0^{\pi} p(e^{it})^2 e^{it}\, dt \right| \leq \int_0^{\pi} |p(e^{it})|^2\, dt.$$

Ved at kombinere denne ulighed med (25) og (26) følger højresiden i (24). □

Nærværende smarte bevis skyldes Toeplitz.

Bemærkning 8 Hilberts ulighed udvides let til komplekse tal: For $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, n \geq 0$ gælder

$$0 < \sum_{j,k=0}^{n} \frac{a_j \overline{a_k}}{j + k + 1} < \pi \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2. \tag{27}$$

(Sæt $a_j = \alpha_j + i\beta_j$ og brug den reelle ulighed to gange.)

Definerer vi nu en operator H på $S = \operatorname{span}\{\mathbf{e}_j, j = 0, 1, \ldots\}$ ved linearitet og ved fastsættelsen

$$H\mathbf{e}_k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j + k + 1} \mathbf{e}_j,$$

som har mening i ℓ^2 da $\sum_{j=0}^{\infty} (j + k + 1)^{-2} < \infty$, ser $H : S \to \ell^2$ en tæt defineret operator, som opfylder

$$0 < \langle H\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < \pi ||x||^2, \quad \mathbf{x} \in S \setminus \{\mathbf{0}\}. \tag{28}$$

Udtrykket $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \langle H\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ er et indre produkt på vektorrummet S og altså gælder Cauchy-Schwarz's ulighed

$$|\langle H\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|^2 \leq \langle H\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\langle H\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle,$$

men kombineres det med (28) fås

$$|\langle H\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \pi||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S.$$

Ved denne ulighed ser man let, at H på entydig måde kan udvides til en begrænset operator i ℓ^2 med $||H|| \leq \pi$. Af det foregående er det klart, at H er en positiv selvadjungeret operator.

Man kan vise, at normen er lig med π og at dens spektrum er intervallet $[0, \pi]$, men da operatoren ikke har nogen egenværdier er det et såkaldt rent kontinuert spektrum. Disse resultater er ikke lette at vise. Henvisninger og detaljer kan findes i [9].

Litteratur

[1] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem.* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965.

[2] S. Altmann, E.L. Ortiz, Editors, *Mathematics and social utopias in France. Olinde Rodrigues and His Times.* History of Mathematics **28**, American Mathematical Society 2005.

[3] J. E. Andersen and C. Berg, *Quantum Hilbert matrices and orthogonal polynomials.* J. Comput. Appl. Math. **233** (2009), 723–729. (ArXiv:math.CA/0703546)

[4] R. Askey, *Ramanujan's extension of the gamma and beta functions*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 346–359.

[5] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy, Special functions. Cambridge University Press, Cambridge 1999.

[6] C. Berg, *Fibonacci numbers and orthogonal polynomials.* To appear in Arab Journal of Mathematical Sciences. (ArXiv:math.NT/0609283v2)

[7] C. Berg, *Ortogonale polynomier og Hilbertmatricen.* Normat **54** (2006), 116–133.

[8] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York-London-Paris, 1978.

[9] Man-Duen Choi, *Tricks or Treats with the Hilbert Matrix*, Amer. Math. Monthly **90** (1983), 301–312.

[10] A. R. Collar, *On the Reciprocation of Certain Matrices*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **59** (1939), 195–206.

[11] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge University Press, Cambridge 1990, second edition 2004.

[12] D. Hilbert, *Ein Beitrag zur Theorie des Legendreschen Polynoms*, Acta Math. **18** (1894), 155–159. (367–370 in "Gesammelte Abhandlungen II", Berlin 1933.)

[13] M. E. H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Cambridge University Press, Cambridge 2005.

[14] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, fourth edition. American Mathematical Society, Providence, 1975.

Christian Berg, Institut for Matematiske Fag, Universitetsparken 5, DK 2100 København Ø, Danmark. email: berg@math.ku.dk

Konstruer tallet

Jingyu She

Brug tallene $5, 5, 5, 1$ og regneoperationerne $+, -, \cdot, \div$ til at lave et regnestykke med svaret 24. Parenteser og ombytning af rækkefølge er tilladt.
Svaret bedes indsendt til `famos@math.ku.dk` inden 1. december. Blandt de korrekte svar udtrækkes én heldig kartoffel, som offentliggøres i næste udgave af Famøs.

Dette er en særudgave af et kinesisk kortspil, der går ud på at lave tallet 24 ved hjælp af fire tilfældige kort fra bunken. Den langsomste ud af tre omgange drikker et bæger med ethanollignende substans.

Præmie

Ja! Du læste rigtigt. Famøs' redaktion har faktisk tænkt sig at udlove en præmie for denne simple opgave. Præmien kommer til at bestå af en ægte delmængde af de ting, man kan købe for penge, og den kommer til at have en værdi, der (regnet i kroner) befinder sig i intervallet $(e^{\sqrt{2}\pi}, \pi^5)$. Grunden til denne udspecifisering af værdien er, at nogen på redaktionen overvejede at udlove præmier, der havde en ren imaginær værdi. Dette bliver dog ikke tilfældet.

Famøs oktober 2011
Fagblad for Aktuar, Matematik,
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Tegnere:
Martin Patrick Speirs (forside)
Maria Bekker-Nielsen Dunbar (tegneserie)

Deadline for næste nummer:
1. december 2011

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til famos@math.ku.dk – gerne i LaTeX
og gerne baseret på skabelonen
som kan hentes på hjemmesiden.

Fagbladet Famøs
c/o Instistut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
http://www.math.ku.dk/famos/

Oplag: 500 stk.
ISSN: 1903-2227

Kalender

?. oktober - Virksomhedsbesøg fra PFA
For mat-øk og aktuar

14./16. november - Næsten Kandidat-kursus
For folk der snart er færdige

18.-20. november - Oslo-hegnet
For ren matematik

?. november - Pokeraften
For mat-øk og aktuar

?.-?. november - Hyttetur
For mat-øk og aktuar

25. november - Julesøster
For ren matematik

25. november - Bingo
For mat-øk og aktuar

Frist for indsendelse af indlæg til Famøs:
1. december

3. december - Matematik Revyen 2011
For alle

?. december - Juleklip
For mat-øk og aktuar

?. december - Julefrokost
For mat-øk og aktuar

?. december - Julefrokost
For ren matematik

Midten af december - Næste Famøs udkommer!