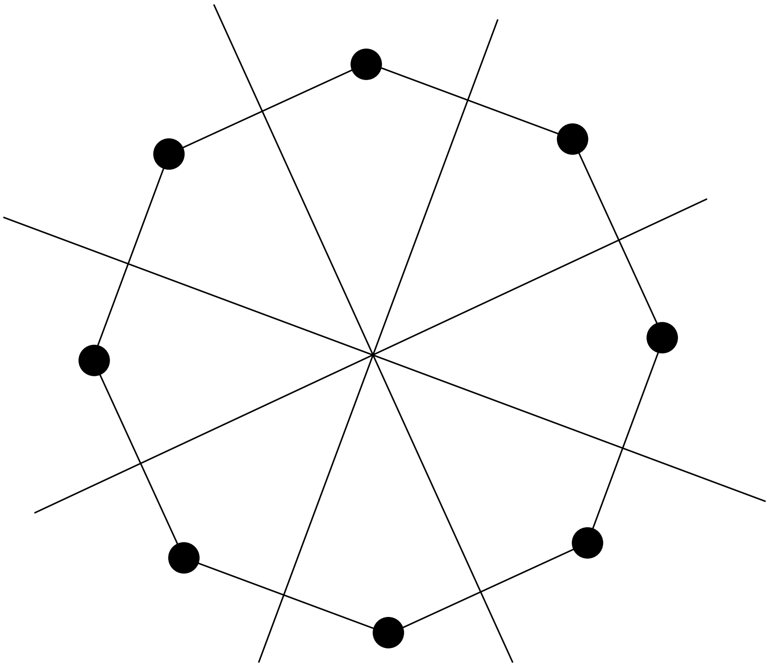
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
20. årgang, nr. 2, juni 2007



D_8 – en forskningsgruppe? En del af instituttets nye forskningsgrupper præsenterer sig forrest og bagerst i dette nummer.

Forskningsgruppen 'Algebra og Talteori'

Ian Kiming

Organiseringen af instituttets videnskabelige personale i 'forskningsgrupper' er en struktur, der er indført af dekanen. Modellen er hentet fra de eksperimentelt baserede videnskaber, men formår ikke i et fag som matematik at afspejle den mangfoldighed og individualisme, der er en stor del af det reelle billede.

Forskningsgruppen 'Algebra og Talteori' består således af 5 fastansatte (med ansættelsesforhold svarende til $\sim$ 4,2 fuldtidsstillinger) og 2 emeriti; disse personer har hver deres individuelle forskningsområde. Til gruppen hører derudover selvfølgelig også ph.d.- og specialestuderende.

Et overordnet fællestræk ved disse forskningsområder er dog naturligvis, at algebraiske metoder i bred forstand er de dominerende værktøjer i gruppens forskning. Dog skal også bemærkes, at eksempelvis både klassisk og moderne talteori betjener sig kraftigt af både analytiske og geometriske metoder.

På den korte plads, der her er til rådighed, kan der kun gives en antydningsvis beskrivelse af gruppemedlemmernes forskning. Forhåbentligt vil der indenfor en ikke alt for fjern fremtid på vores hjemmeside blive linket til mere udførlige beskrivelser.

Gruppens forskningsområder kan i overordnede overskrifter angives som følger:

1. Additiv talteori, specielt partitionsteori,
2. Algebraisk og aritmetisk geometri, specielt snitteori, enumerativ geometri, elliptiske kurver og modulkurver,
3. Algebraisk kombinatorik,
4. Algebraisk talteori, specielt Galoisteoretiske indlejringsproblemer, komplekse, mod p og p-adiske Galoisrepræsentationer og automorfe former,

5. Computational mathematics, specielt indenfor talteori og modulformer og med et øje i retning af kryptografi,
6. Homologisk algebra, triangulerede og deriverede kategorier, K-teori,
7. Ikke-kommutativ ringteori, specielt P.I. teori og endeligdimensionale repræsentationer af ikke-kommutative ringe,
8. Klassisk talteori, specielt diofantisk approksimation,
9. Repræsentationer af endelige grupper.

Fordelingen af de enkelte gruppemedlemmer (eksklusivt specialestuderende) på disse områder ser således ud:

Hans-Bjørn Foxby, Esben Bistrup Halvorsen: (6), (2),

Christian U. Jensen: (4),

Søren Jøndrup: (7)

Ian Kiming, Jonas B. Rasmussen, Morten Schrøder Larsen: (1), (2), (4), (5),

Jørn Børling Olsson: (1), (3), (9),

Asmus Schmidt: (5), (8),

Anders Thorup: (2).

Gruppen er ikke alene forskningsmæssigt særdeles aktiv, men også dybt involveret i undervisningen på alle niveauer. Specialer i emner af matematikken, der varetages af gruppen, har længe været og er fortsat meget eftertragtede. Eksempelvis blev i årene 2002-2004 næsten halvdelen af alle 'rene' matematikspecialer vejledt af personer fra gruppen; i samme periode blev dog gruppens bemanding reduceret med omkring 40% (via pensioneringer og tidsnedsættelser). Det er derfor en stor fordel for alle involverede, at gruppemedlemmerne ikke alene er domineret af rent Pavlov'ske reflekser, men fortsat finder stor glæde i specialevejledninger. Således er der i år færdiggjort 4 specialer under gruppens vejledning, og yderligere 9 specialer er på vej.

Man forbereder sig naturligvis på et speciale indenfor 'Algebra og Talteori' ved at tage relevante (let identificerbare) algebrakurser på første og anden del af studiet og evt. skrive et fagprojekt på området. Bemærk dog også, at specialer i talteori hyppigt vil forudsætte en vis, solid baggrund i analyse.

Er man i tvivl hvilke kurser, man kan tage for at nærme sig specialeskrivning indenfor algebra og talteori, så er det letteste simpelthen bare at tage kontakt til et eller flere af gruppemedlemmerne, som da vil yde konkret vejledning.

Gruppen er dybt berørt over for få dage siden at have mistet Anders Frankild, som var knyttet til gruppen som postdoc via et Steno-stipendium.

Forskningsgruppen 'Geometrisk Analyse og Matematisk Fysik'

Jan Philip Solovej

Vi er en af de store forskningsgrupper som dækker et meget bredt spektrum af matematik. Fælles for emnerne er, at de er relaterede til analyse. Gruppens faste medlemmer er Christian Berg, Bergfinnur Durhuus, Gerd Grubb, Jens Hugger, Hans Plesner Jakobsen, Mogens Esrom Larsen, Jesper Lützen, Henrik Schlichtkrull og Jan Philip Solovej.

Som det fremgår af gruppens navn, beskæftiger gruppen sig specielt med forskning i geometrisk analyse og matematisk fysik. Andre emner, der også dækkes af gruppen, er partielle differentialligninger, repræsentationsteori for Liegrupper og kvantegrupper, kompleks analyse og ortogonale polynomier, numerisk analyse og matematikkens historie.

Der er en glidende overgang mellem mange af emnerne. F.eks. er geometrisk analyse og repræsentationsteori vigtige aspekter af matematisk fysik.

Indenfor gruppen dækkes matematisk fysik hovedsaglig af Bergfinnur Durhuus og Jan Philip Solovej. Gerd Grubb, Hans Plesner Jakobsen og Henrik Schlichtkrull arbejder med emner nært relateret til matematisk fysik. Durhuus og Solovej kan vejlede projekter meget bredt indenfor matematisk fysik. Solovejs specialeområder er kvantemekanik, herunder mange-partikelsystemer som beskriver makroskopiske objekter, spektrale egenskaber for operatorer og variationelle metoder. Durhuus er specialiseret i geometriske aspekter, højenergi fysik og stokastiske systemer.

Gerd Grubb arbejder med differentialligninger og operatorer, specielt operatorer defineret på mangfoldigheder og spektrale invarianter defineret ud fra dem.

Henrik Schlichtkrull er ekspert i repræsentationsteori for Liegrupper, et emne, der har mange anvendelser i matematisk fysik, hvor disse grupper repræsenterer symmetritransformationer. Schlichtkrull arbejder også med differentialligninger på specielle manfoldigheder, de såkaldte symmetriske rum. Hans Plesner Jakobsen forsker også i repræsentationsteori. De senere år, har han specielt interesseret sig for kvantegrupper, som er algebraiske strukturer (faktisk ikke grupper), som optræder naturligt i visse fysiske systemer.

Studerende der er interesseret i matematisk fysik og/eller analyse bør følge kurserne *målteori* (MI), *analyse 2* (An2) og *analyse 3* (An3). For matematisk fysik er fysikkurser selvfølgelig særdeles relevante. Kurset matematisk fysik er en god første indføring i matematisk fysik for både matematik og fysikstuderende, men er ikke nødvendigvis en forudsætning for at specialisere sig i emnet.

De relevante kandidatkurser i analyse og matematisk fysik er er *moderne analyse* og *anvendt analyse*. Der afholdes ofte specialicerede kurser i matematisk fysik på kandidatstudiet f.eks. som specielle varianter af kurset *anvendt analyse*.

Der er to bachelorkurser i differentialligninger: *Sædvanlige differentialligninger* (SDL) og *Partielle differentialligninger* (PDL). Der afholdes ofte også avancerede kurser i partielle differentialligninger, f.eks. *moderne analyse*. Disse kurser forudsætter ikke nødvendigvis bachelorkurserne i differentialligninger, men derimod *målteori*, *analyse2* og *kompleksfunktionsteori*.

Studerende der er interesseret i geometrisk analyse bør naturligvis tage *geometri 1* tidligt i studiet og følge *geometri 2* samtidig med, at de har en god baggrund i analyse. Representationsteori fra et analytisk synspunkt er dækket af kurset *Representationsteori og Liegrupper* (RepLie).

Christian Berg har i de senere år arbejdet med ortogonale polynomier, dvs polynomiumssystemer som udgør et ortonormalt system i Hilbertrummet af kvadratisk integrable funktioner med hensyn til et sandsynlighedsmål med momenter af enhver orden. I analysen af sådanne ortogonale systemer spiller kompleks funktionsteori en vigtig rolle, så forskningen involverer en blanding af reel og kompleks analyse kombineret med funktionalanalyse. Christian Berg afholder ofte kadidatkurser indenfor sit interesseområde, f.eks. som kurset *klassisk analyse* (KlasAn).

Jens Hugger er gruppens specialist i numerisk analyse, der meget kort går ud på at anvende matematik og computere til løsning af problemer, dvs at opstille og herunder analysere matematiske modeller af virkelighedens problemer som herefter løses på en computer. Jens Hugger har i de senere år arbejdet med numerisk analyse indenfor matematisk finansiering.

Der er pt. to faste kurser i numerisk analyse: *Numerisk løsning af sædvanlige differentialligninger* (NumSDL) og *Numerisk løsning af partielle differentialligninger* (NumPDL) som ligger i forårets blok 4A og holdes i lige årstal. Hvis man har taget et eller begge disse kurser er der adgang til at skrive bachelor- eller kandidatprojekter indenfor området eller sågar skrive speciale.

Studerende der specialiserer sig i analyse, geometrisk analyse eller matematisk fysik får et godt indblik i hvordan matematik anvendes, hvilket er en vigtig kompetence i mange af de erhvervsmuligheder matematikkandidater har. Numerisk analyse er naturligvis også meget erhvervsrelevant, da man som nyklækket kandidat i sit første job meget ofte vil blive sat foran en computer.

Emnefeltet matematikkens historie dækkes af Jesper Lützen. Hvis en studerende er interesseret i matematikkens historie kan han/hun følge bachelorkurset Hist1 og kandidatkurset Hist2. Det sidstnævnte har varierende emner fra år til år. Til foråret bliver emnet måske "Matematiske umulighedssætninger historisk set". Derefter kan man skrive kandidatprojekter og speciale i faget.

Matematikhistorie er mest relevant for studerende som stiler efter en undervisningskariere eller for dem der vil forske i matematikkens historie, men det kan være berigende for alle med interesse for matematik.

Divisibilitetsregler
– Et eventyr udi obskuriteten

Sebastian Paaske Tørholm

Vi kender det allesammen – der er bare tidspunkter, hvor man har et tal, og ønsker at se om et vist andet tal går op i det. Dette giver ofte anledning til at danne huskeregler for hvornår visse tal er delelige med andre, og det er præcis en af disse regler jeg i denne artikel vil udforske. Jeg vil vove den påstand at enhver matematikstuderende kender[1] huskereglen om at et tal er kongruent med sin tværsum modulo 3 og 9, eller at et tal er kongruent med sin alternerende tværsum – summen af cifrene i tallet med alternerende fortegn – modulo 11. Udi de mere obskure af divisibilitetsreglerne ligger følgende regel for 7: Lad n være et positivt heltal med følgende decimalrepræsentation

$$n = c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1 c_0,$$

hvor vi lader k være ulige.[2,3] Vi opdeler da denne repræsentation i grupper af to cifre,

$$n = \underbrace{c_k c_{k-1}}_{a_{\frac{k-1}{2}}} \dots \underbrace{c_3 c_2}_{a_1} \underbrace{c_1 c_0}_{a_0},$$

hvor vi definerer $a_i = c_{2i+1}c_{2i} \bmod 7$, altså den principale rest af $c_{2i+1}c_{2i}$ ved division med 7. Disse opskrives da i en tabel med 3 søjler,

[1] Eller burde kende, som det vel bør lyde.

[2] Jeg tillader mig den lidt løse notation med at skrive $\sum_{i=0}^{k} 10^i c_i$ som $c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1 c_0$. Dette vil forekomme gennemgående i denne artikel, og idet der ej vil forekomme multiplikation burde denne notation ej volde problemer.

[3] Hvor vi også tillader at $c_k = 0$.

a_2 a_5 $\vdots$	a_1 a_4 $\vdots$	a_0 a_3 $\vdots$
b_2	b_1	b_0

hvor

$$b_j = \left(\sum_{i \equiv j \pmod 3} a_i \right) \bmod 7.$$

Danner vi da et tocifret tal af de to tal til venstre og trækker det fra det vi kan danne med de to til højre, fås et tal der er kongruent med det oprindelige modulo 7. Altså, for at sige det mere præcist, $b_1 b_0 - b_2 b_1 \equiv n \pmod 7$.

For at fremme forståelsen kommer hér et eksempel inden beviset. Lad os betragte $n = 8514616566195676053559397313$.

Første trin består i at opdele dette tal i grupper af to cifre og udregne principale rester for at gøre livet lettere for os.

$$\underbrace{85}_{1}\underbrace{14}_{0}\underbrace{61}_{5}\underbrace{65}_{2}\underbrace{66}_{3}\underbrace{19}_{5}\underbrace{56}_{0}\underbrace{76}_{6}\underbrace{05}_{5}\underbrace{35}_{0}\underbrace{59}_{3}\underbrace{39}_{4}\underbrace{73}_{3}\underbrace{13}_{6}$$

Disse opstilles da i tabel

4 5 5 5	3 0 0 2 1	6 3 6 3 0
19	6	18
5	6	4

Vi får da at

$$8514616566195676053559397313 \equiv 64 - 56 = 8 \equiv 1 \pmod 7.$$

For at spare unødig forvirring udelades en mere formel opskrivning og sætningen bevises blot som den er.

Bevis. Vi observerer at $100^3 \equiv 1 \pmod 7$.
Bruger vi notationen fra formuleringen fra før fås da

$$
\begin{aligned}
n &= c_k c_{k-1} \cdot 100^{k/2} + \cdots + c_3 c_2 \cdot 100 + c_1 c_0 && (1)\\
&\equiv 100^2(c_5 c_4 + c_{11} c_{10} + \dots) + 100(c_3 c_2 + c_9 c_8 + \dots) && (2)\\
&\quad + (c_1 c_0 + c_7 c_6 + \dots) && (3)\\
&\equiv 4(c_5 c_4 + c_{11} c_{10} + \dots) + 2(c_3 c_2 + c_9 c_8 + \dots) && (4)\\
&\quad + (c_1 c_0 + c_7 c_6 + \dots) && (5)\\
&\equiv 4(a_2 + a_5 + \dots) + 2(a_1 + a_4 + \dots) + (a_0 + a_3 + \dots) && (6)\\
&\equiv 4b_2 + 2b_1 + b_0 \equiv -10b_2 + 9b_1 + b_0 && (7)\\
&= (10b_1 + b_0) - (10b_2 + b_1) = b_1 b_0 - b_2 b_1 \pmod 7 && (8)
\end{aligned}
$$

som ønsket. □

Kirchberger's sætning om separation af to mængder

Maria Larissa Ziino

I denne artikel fremføres to sætninger af henholdsvis den østrigske matematiker Eduard Helly og den tyske matematiker Paul Kirchberger, som hver især skrev deres disputats i starten af 1900-tallet. Jeg vil her vise Kirchberger's sætning ved at benytte mig af Helly's sætning.
Disse to sætninger kan faktisk betragtes som værende duale til hinanden. Den mest fremtrædende forskel på Helly's og Kirchberger's sætning er, at Helly's sætning beskriver betingelserne for, at et antal mængder har noget tilfælles mens at Kirchberger's sætning beskriver betingelserne for at kunne separere to mængder.
Kirchberger's ide kan beskrives ved følgende eksempel: Forestil dig en mark med et antal får og et antal bukke der står stille. Hvordan ved man om fårene kan adskilles fra bukkene ved et lige hegn?
Sætningen giver, at hvis hver gruppe af 4 får og bukke kan adskilles af et lige hegn, så kan de alle adskilles af et lige hegn. Den generelle formulering af sætningen ses i Sætning 13.

Indledende begreber

Det rum jeg arbejder i her kaldes $\mathbb{E}^n$ og det defineres ved følgende

Definition 1 Det n-dimensionale Euklidiske rum $\mathbb{E}^n$ er givet ved det lineære rum $\mathbb{R}^n$ udstyret med det indre produkt $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$, hvor $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ og $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.
Nulvektoren i $\mathbb{E}^n$ defineres som $o = (0, \ldots, 0)$.

Konveksitetsteorien giver følgende, hvor jeg starter ud med at minde om begrebet affin kombination.

Definition 2 Lad $a_0, \ldots, a_k$ være punkter i $\mathbb{E}^n$. Disse siges at være affint afhængige hvis der findes et talsæt $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \backslash (0, \ldots, 0)$, så $\alpha_0 a_0 + \cdots + \alpha_k a_k = o$, og $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k = 0$.

Sætning 3 *Enhver delmængde af $\mathbb{E}^n$ bestående af mindst $n+1$ forskellige punkter er lineært afhængig. Enhver delmængde af $\mathbb{E}^n$ bestående af mindst $n+2$ forskellige punkter er affint afhængig.*

Begreberne konveks kombination, konveks mængde og det konvekse hylster defineres nu.

Definition 4 Lad $k \in \mathbb{N}_0$; $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{E}^n$; $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{E}$. Hvis alle $\lambda_i \geq 0$ og $\lambda_0 + \cdots + \lambda_k = 1$, kaldes linearkombinationen $\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_k x_k$ en konveks kombination af $x_0, \ldots, x_k$.

Definition 5 En delmængde S af $\mathbb{E}^n$ siges at være konveks hvis der for enhver konveks kombination $\lambda_0 s_0 + \cdots + \lambda_k s_k$ af elementer fra S gælder, at $\lambda_0 s_0 + \cdots \lambda_k s_k \in S$.

Definition 6 Lad $S \subseteq \mathbb{E}^n$. Ved det konvekse hylster - $\mathrm{conv}S$ - af S forstås den mindste konvekse delmængde af $\mathbb{E}^n$, som indeholder S.

Sætning 7 *Lad $S \subseteq \mathbb{E}^n$, da består* $\mathrm{conv}S$ *netop af alle konvekse kombinationer af elementer fra S, dvs.*

$$\mathrm{conv}S = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i \,\middle|\, k \in \mathbb{N}_0, \lambda_i \geq 0, \lambda_0 + \cdots + \lambda_k = 1, x_i \in S \right\}.$$

Sætning 8 (Carathéodory) *For en ikke-tom delmængde S af $\mathbb{E}^n$ kan ethvert $x \in$* $\mathrm{conv}S$ *udtrykkes ved en konveks kombination af $n+1$ eller færre punkter fra S.*

Helly's sætning

Helly's sætning vises ved at gøre brug af en sætning af Johann Radon som er givet ved følgende

Sætning 9 (Radon's sætning) *Lad $S = \{x_1, \dots, x_r\}$ være en vilkårlig endelig mængde af r indbyrdes forskellige punkter i $\mathbb{E}^n$. Hvis $r \geq n+2$ kan S opdeles i to disjunkte delmængder, S_1 og S_2, så der gælder at* $\mathrm{conv} S_1 \cap \mathrm{conv} S_2 \neq \varnothing$.

Bevis. Da $r \geq n+2$ giver Sætning 3 at S er affint afhængig. Dvs. der eksisterer skalarer $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, hvor ikke alle er 0, således at

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i = o \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0.$$

Ifølge ovenstående må mindst to af disse α_i'er have modsatte fortegn, så vi kan uden tab af generalitet antage, at de første k er større end eller lig nul og at de sidste $r-k$ er skarpt mindre end nul. Da α_i'erne summer til nul kan vi definere α som

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = -(\alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_r).$$

Så er $\alpha > 0$ og vi kan definere x som

$$x = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i = \sum_{i=k+1}^{r} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha}\right) x_i.$$

Da $\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha} = 1$ er x en konveks kombination af $x_1, \dots, x_k$, så af Sætning 7, får vi at $x \in \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_k\}$. På samme måde får vi at $x \in \mathrm{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_r\}$.
Ved at lade $S_1 = \{x_1, \dots, x_k\}$ og $S_2 = \{x_{k+1}, \dots, x_r\}$ har vi at $\mathrm{conv} S_1 \cap \mathrm{conv} S_2 \neq \varnothing$. Da punkterne $\{x_1, \dots, x_r\}$ alle er parvis forskellige har vi yderligere at $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. $\square$

Sætning 10 (Helly's sætning) *Lad $\mathcal{F} = \{B_1, \ldots, B_r\}$ være en familie bestående af r konvekse mængder i $\mathbb{E}^n$ med $r \geq n+1$. Hvis enhver delfamilie bestående af $n+1$ mængder fra $\mathcal{F}$ har ikke-tom fællesmængde så har alle r mængder ikke-tom fællesmængde.*

Bevis. Sætningen vises ved induktion efter $r-1$. Sætningen er triviel for induktionsstarten $r = n+1$ og derfor klart opfyldt. Antag at $r \geq n+2$ og at sætningen holder for $r-1$ konvekse mængder. Vi vil vise at den gælder for r.
For hvert $i \in \{1, \ldots, r\}$, eksisterer der et punkt x_i for hvilket der ifølge induktionsantagelsen gælder at

$$x_i \in B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1} \cap B_{i+1} \cap \cdots \cap B_r. \tag{1}$$

Mængden af alle disse punkter betegnes $S = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Hvis der er gentagelser i S, dvs. $x_i = x_j$ for et par i, j hvor $i \neq j$, så har vi både at

$$\begin{array}{rrcl} & x_i & \in & B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1} \cap B_{i+1} \cap \cdots \cap B_r \\ \text{og at} & x_j & \in & B_1 \cap \cdots \cap B_{j-1} \cap B_{j+1} \cap \cdots \cap B_r. \end{array}$$

Da $x_i = x_j$ har vi derfor, at de begge ligger i $B_1 \cap \cdots \cap B_r$ og derfor er det ønskede opnået i dette tilfælde.
Antag derfor, at x_i'erne er parvis forskellige. Da $r \geq n+2$ kan vi benytte Radon's sætning 9 til at finde to disjunkte delmængder af S, S_1 og S_2, der opfylder at $\mathrm{conv} S_1 \cap \mathrm{conv} S_2 \neq \varnothing$. Uden tab af generalitet kan vi lade $S_1 = \{x_1, \ldots, x_k\}$ og $S_2 = \{x_{k+1}, \ldots, x_r\}$, hvor $1 \leq k < r$. Lad derfor

$$x \in \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_k\} \cap \mathrm{conv}\{x_{k+1}, \ldots, x_r\}. \tag{2}$$

Vi ønsker at vise at $x \in \bigcap_{i=1}^r B_i$.
På grund af (1) har vi for alle $i = 1, \ldots, k$ at $x_i \in B_{k+1} \cap \cdots \cap B_r$.

Vi minder om, at B_i er konveks for alle $i = k+1, \dots, r$. Vi har da, at det konvekse hylster af x_i'erne, for $i = 1, \dots, k$, ligger i snittet af B_i'erne, for $i = k+1, \dots, r$, dvs.

$$\operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq B_{k+1} \cap \cdots \cap B_r.$$

Tilsvarende gælder for alle $i = k+1, \dots, r$ at $x_i \in B_1 \cap \cdots \cap B_k$. Da B_i er konveks for alle $i = 1, \dots, k$ er $\operatorname{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_r\} \subseteq B_1 \cap \cdots \cap B_k$. Nu har vi det ønskede da (2) giver at

$$x \in B_{k+1} \cap \cdots \cap B_r \qquad \text{og} \qquad x \in B_1 \cap \cdots \cap B_k. \qquad \square$$

Kirchberger's sætning

Da Kirchberger skrev sin Ph.D.-afhandling i 1902 viste han blandt andet den efterfølgende sætning, men han viste også Separationssætningen og et specialtilfælde af Carathéodory's sætning, nemlig Sætning 8 for endelige mængder. Idet selve Carathéodory's sætning først blev vist af Carathéodory ca. 5 år senere (hvorfra sætningen har fået navnet Carathéodory's sætning) er det spændende at studere Kirchberger's 30 sider lange disputats [1].
For at kunne vise nedenstående sætning vil jeg minde om begreberne halvrum i $\mathbb{E}^{n+1}$ og hyperplan i henholdsvis $\mathbb{E}^n$ og $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^n$.

Definition 11 Lad $y \in \mathbb{E}^n \backslash (0, \dots, 0)$ og $\alpha \in \mathbb{E}$. Hyperplanen $H(y, \alpha)$ i $\mathbb{E}^n$ er defineret ved

$$H(y, \alpha) = \{x \in \mathbb{E}^n : \langle y, x \rangle = \alpha\}.$$

Definition 12 En hyperplan i $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^n$ er for en vektor $(s, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n$ og et $t \in \mathbb{R}$, hvor $(s, a) \neq (0, o)$, givet ved

$$H = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n : (\alpha, x) \cdot (s, a) = t\},$$

hvor (s, a) er normalvektoren til H. Det øvre åbne halvrum er givet ved

$$\{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n : (\alpha, x) \cdot (s, a) > t\},$$

som er nedad begrænset af H. Det nedre åbne halvrum er givet ved

$$\{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n : (\alpha, x) \cdot (s, a) < t\},$$

som er opad begrænset af H.

Sætning 13 (Kirchberger's sætning) *Lad P og Q være ikke-tomme endelige delmængder af $\mathbb{E}^n$. Så kan P og Q separeres strengt af en hyperplan hvis og kun hvis der for enhver delmængde T bestående af $n + 2$ eller færre punkter fra $P \cup Q$ findes en hyperplan der separerer $T \cap P$ og $T \cap Q$ strengt.*

Bevis. Hvis P og Q kan separeres strengt af en hyperplan så vil der specielt, for hvert valg af T, gælde at $T \cap P$ og $T \cap Q$ kan separeres af hyperplanen.
For at vise den anden vej antager vi, at der for enhver delmængde T bestående af $n + 2$ eller færre punkter fra $P \cup Q$ findes en hyperplan H, der separerer $T \cap P$ og $T \cap Q$ strengt.
Definer for hvert $p \in P$ og $q \in Q$ de åbne halvrum

$$\begin{aligned}
F_p &= \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n : (\alpha, x) \cdot (-1, p) < 0\} \\
&= \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n : -\alpha + \langle x, p\rangle < 0\} \\
&= \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n : \langle x, p\rangle < \alpha\} \\
G_q &= \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n : (\alpha, x) \cdot (-1, q) > 0\} \\
&= \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n : -\alpha + \langle x, q\rangle > 0\} \\
&= \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^n : \langle x, q\rangle > \alpha\}.
\end{aligned}$$

Der findes per antagelse en hyperplan

$$H(u,\beta) = \{y \in \mathbb{E}^n : \langle u, y\rangle = \beta\}$$

i $\mathbb{E}^n$, således at $T \cap P$ og $T \cap Q$ separeres af denne hyperplan $H(u,\beta)$. Uden tab af generalitet kan vi antage at $T \cap P$ er opad begrænset af $H(u,\beta)$ og at $T \cap Q$ er nedad begrænset af $H(u,\beta)$. Dvs.

$$\begin{array}{rcll} \langle u,p\rangle & < & \beta & \text{for alle} \quad p \in T \cap P \\ \langle u,q\rangle & > & \beta & \text{for alle} \quad q \in T \cap Q. \end{array}$$

Vi har derfor at $(\beta, u) \in F_p$ for alle $p \in T \cap P$ og at $(\beta, u) \in G_q$ for alle $q \in T \cap Q$. Dvs.

$$(\beta, u) \in \Big(\bigcap_{p \in T\cap P} F_p\Big) \cap \Big(\bigcap_{q \in T\cap Q} G_q\Big).$$

Så da T består af $n+2$ eller færre punkter fra $P \cup Q$ findes der for vilkårlige $n+2$ eller færre halvrum F_p og G_q i $\mathbb{R}\times\mathbb{E}^n$ et punkt som de har tilfælles. Helly's sætning 10 giver, da F_p og G_q er konvekse for alle $p \in P$ og alle $q \in Q$, at der findes et punkt (δ, z) som alle halvrum F_p og G_q har tilfælles, for $p \in P$ og $q \in Q$.
Dvs.

$$\begin{array}{rrcll} & \langle z,p\rangle & < & \delta & \text{for alle} \quad p \in P \\ \text{og} & \langle z,q\rangle & > & \delta & \text{for alle} \quad q \in Q, \end{array}$$

derfor vil hyperplanen

$$H'(z,\delta) = \{y \in \mathbb{E}^n : \langle z, y\rangle = \delta\}$$

separere P og Q strengt i $\mathbb{E}^n$. □

Litteratur

[1] Kirchberger, P.: 1903. Über Tchebychefsche Annäherungsmethoden, *Math. Ann.*, **57**, 509-540.

[2] Lay, S. R.: 1982. *Convex Sets and their Applications*, John Wiley & Sons, New York.

Modal Logics and Completeness Theorems

Kim Larsen

The purpose of this little article is to introduce the reader to modal logic and to show that for many normal modal logics completeness theorems are essentially just model existence theorems. Some basic knowledge about propositional calculus is probably required.

Modal languages

First we make the definitions needed to build modal logics, via the notion of frames and models.
The languages of modal logics are the language of propositional calculus where sentential operators, the so-called modal operators, have been added.

Definition 1 (Modal similarity type) A modal similarity type is a pair $\tau = (O, \rho)$ where O is a non-empty set, and ρ is a function $\rho : O \to \mathbb{N}$.

The elements of O are called *modal operators*. The function ρ assigns to each operator $\Delta \in O$ a finite *arity*, indicating the number of arguments Δ can be applied to.

Definition 2 (Modal language) A modal language *ML(τ,Φ)* consists of the following:

- A modal similarity type $\tau = (O, \rho)$.
- A set Φ of propositional letters.

The set *Form*(τ, Φ) of modal formulas over τ and Φ is given by the rule

$$\phi := p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi_1 \vee \phi_2 \mid \Delta(\phi_1, \dots, \phi_{\rho(\Delta)})$$

where p ranges over the elements of Φ.

This definiton simply states that a formula is either a proposition letter, the propositonal constant falsum, a negated formula, a disjunction or a set of formulas prefixed by a modal operator. That is, a modal language of a given similarity type is just a propositional language extended with modal operators from the similarity type $\tau = (O, \rho)$.
To each $\Delta \in O$ we associate a dual operator ∇ defined by

$$\nabla(\phi_1, \ldots, \phi_{\rho(\Delta)}) := \neg\Delta(\neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_{\rho(\Delta)}).$$

We also use the abbreviations $\phi \wedge \psi := \neg(\neg\phi \vee \neg\psi), \phi \to \psi := \neg\phi \vee \psi, \phi \leftrightarrow \psi := (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi), \top := \neg\bot$.

Definition 3 (Uniform Substitution) Given a modal similarity type τ and a set Φ of propositional letters,a substitution is a map $\sigma : \Phi \to \mathrm{Form}(\tau, \Phi)$. Such a substitution induces a map $(\cdot)^\sigma : \mathrm{Form}(\tau, \Phi) \to \mathrm{Form}(\tau, \Phi)$ defined recursively as follows:

$$\begin{array}{rcl} \bot^\sigma & = & \bot \\ p^\sigma & = & \sigma(p) \\ (\neg\psi)^\sigma & = & \neg\psi^\sigma \\ (\phi \vee \psi)^\sigma & = & \phi^\sigma \vee \psi^\sigma \\ \Delta(\phi_1, \ldots, \phi_n)^\sigma & = & \Delta(\psi_1^\sigma, \ldots, \psi_n^\sigma) \end{array}$$

This spells out what is meant by performing uniform substitution. We say that χ is a substitution instance of ψ if there is some substitution σ such that $\psi^\sigma = \chi$.

Semantic structures

Now that we have defined the modal languages we would like to be able to form statements, that is, we want to assign meaning to formulas in a modal language. The semantic structure is put on our modal languages by interpreting them in relational structures.

Definition 4 (τ-frame) Let τ be a modal similarity type. A τ-frame is a tuple $\mathfrak{F} = (\mathrm{W}, (R_\Delta)_{\Delta\in\tau})$ such that

1. W is a non-empty set.
2. For each $n \geq 0$ and each n-ary modal operator $\Delta \in \tau$ R_Δ is an $(n+1)$-ary relation on W.

The elements of W will often be referred to as 'states' or 'worlds'.

Definition 5 (τ-model) Given a similarity type τ, a τ-model is a pair $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F},\mathrm{V})$ where $\mathfrak{F}$ is a τ-frame and V is a valuation, that is, a map $V : \Phi \to \mathcal{P}(\mathrm{W})$. Here $\mathcal{P}(\mathrm{W})$ denotes the powerset of W.

Definition 6 (Satisfaction) Suppose w is a state in a model $\mathfrak{M} = ((W, (R_\Delta)_{\Delta\in\tau}), V)$. We define the notion of a formula ϕ being satisfied (or 'true') in $\mathfrak{M}$ at w (notation: $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$) by structural induction as follows:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash p \quad \text{iff} \quad w \in V(p) \text{ where } p \in \Phi \tag{1}$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \bot \qquad \text{never} \tag{2}$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi \quad \text{iff} \quad \text{not } \mathfrak{M}, w \Vdash \phi \tag{3}$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \vee \psi \quad \text{iff} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ or } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \tag{4}$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Delta(\phi_1, \ldots, \phi_n) \quad \text{iff} \quad \text{for some } v_1, \ldots, v_n \in W \tag{5}$$

$$\text{with } R_\Delta w v_1 \ldots v_n \text{ we have for each } i \;\; \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi_i$$

If one restricts attention to a single world, w, one should note that $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ is analogous to assigning $\top$ to the proposotional variable p in traditional propositional semantics. Continuing this analogy, (2)-(4) likewise corresponds to the semantics for $\vee$ and $\neg$ in traditional propositional logic. Hence, the modal semantics may be considered an extension of the semantics for traditional propositional logic.

Definition 7 (Global truth) A formula ϕ is said to be globally true in a model $\mathfrak{M}$ (notation $\mathfrak{M} \Vdash \phi$) if it is satisfied at all points in $\mathfrak{M}$, that is if $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, for all $w \in W$. A formula is said to be satisfiable in $\mathfrak{M}$ if there exists a state in $\mathfrak{M}$ at which ϕ is true.

If ϕ is not satisfied at w in $\mathfrak{M}$ we write $\mathfrak{M}, w \nVdash \phi$, and say that ϕ is false or refuted at w. When $\mathfrak{M}$ is clear from the context we simply write $w \Vdash \phi$ for $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, and $w \nVdash \phi$ for $\mathfrak{M}, w \nVdash \phi$. We say that a set of formulas Σ is true at a state w of our model $\mathfrak{M}$, notation $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$, if all members of Σ are true at w.
Finally we extend our valuation V, so that for abitrary formulas ϕ, $V(\phi)$ allways denotes the set of states at which ϕ is true, that is,

$$V(\phi) := \{w \in W \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\} \tag{6}$$

Note that this means that for formulas ϕ, ψ

$$\begin{aligned} V(\neg\phi) &= \complement V(\phi) && (7)\\ V(\phi \vee \psi) &= V(\phi) \cup V(\psi) && (8) \end{aligned}$$

where $\complement$ means complement in W.

The basic modal language

The above is the general setup. But from now on we only look at the special case where we only have one unary modal operator. This we denote with by a diamond $\Diamond$, and the dual operator by a box: $\Box\phi := \neg\Diamond\neg\phi$.
A frame for the basic modal modal language is then just a pair $\mathfrak{F} = (W, R)$ where W is a non-empty set and R is a binary relation on W. The requirements regarding satisfaction in Definition 6 (5) then spells out that

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi \quad \text{iff} \quad \text{for some } v \in W \text{ with } Rwv \text{ we have } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi \tag{9}$$

To understand the meaning of $\Box$ we consider

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\Diamond\neg\phi$$

By (3) and (9) this holds if and only if it is not the case that there is a $v \in W$ such that Rwv and $\mathfrak{M}, v \Vdash \neg\phi$. In other words,

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\phi \quad \text{iff} \quad \text{for all } v \in W \text{ with } Rwv \text{ we have } \mathfrak{M}, v \Vdash \phi$$

We see that our definition of a formula being satisfied is intrinsically local.
The satisfaction of a formula ϕ not containing modal operators depend solely upon whether the image of ϕ under the valuation V contains the current state. However, note that since $\Diamond$ is essentially an instruction to examine states related to the current state, the satisfaction of formulas containing $\Diamond$ may depend upon the satisfaction of certain formulas in states related to the current state.

As noted earlier we often refer to states w in a frame $\mathfrak{F} = (W, R)$, as worlds. This notion is derived from the reading of $\Diamond\phi$

as 'it is possibly the case that ϕ' (i.e $\Box\phi$ means 'it is not the case that not ϕ is possible', that is 'necessarily ϕ').
Given this reading of $\Diamond$ the concepts of frames, models and satisfaction, is an attempt to formalize the conception that nessecity means truth in all possible worlds, and that possibility means truth in some possible world.

Validity

So far we have defined the notion of satisfiability via the concept of models. As we saw models are composite entities consisting of a frame and a valuation, where the valuation so to speak is a carrier of contingent information in our model. We often want to ignore the effects of particular valuations and work on the more fundamental level of frames only. The following definition lets us do this.

Definition 8 A formula ϕ is valid at a state w in a frame $\mathfrak{F}$ (notation: $\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$) if ϕ is true at w in every model $(\mathfrak{F}, V)$ based on $\mathfrak{F}$. ϕ is valid in a frame $\mathfrak{F}$ (notation; $\mathfrak{F} \Vdash \phi$) if it is valid at every state in $\mathfrak{F}$. A formula ϕ is valid on a class of frames $\mathbf{F}$(notation; $\mathbf{F} \Vdash \phi$) if it is valid on every frame in $\mathfrak{F}$, and it is valid (notation; $\Vdash \phi$) if it is valid on the class of all frames. The set of formulas that are valid in a class of frames $\mathbf{F}$ is called the logic of $\mathbf{F}$ (notation $\Lambda_{\mathbf{F}}$).

We see that the notion of validity abstracts away from the effects of particular interpretations. It should be clear that validity differs from truth in many ways. For example for a formula $\phi \vee \psi$ to be true at a state w means by definition 6 that either ϕ or ψ is true at w. But if $\phi \vee \psi$ is valid on a frame $\mathfrak{F}$, this does not mean that either ϕ or ψ is valid on $\mathfrak{F}$. Consider for example the formula $p \vee \neg p$ which certainly is valid on any frame. However, it is not the case that either p is true in all states or $\neg p$ is true in all states. **Examples**

(i) The formula $\Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$ is valid on the class of all frames, that is it is valid ($\Vdash \Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$). To see this, take any frame $\mathfrak{F}$ and state w in $\mathfrak{F}$, and let V be a valuation on $\mathfrak{F}$. We have to show that if $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Diamond(p \vee q)$, then $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash (\Diamond p \vee \Diamond q)$. So assume that $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Diamond(p \vee q)$. Then by definition 6(5) there is a state v s.t Rwv and $(\mathfrak{F}, V), v \Vdash p \vee q$. But if $v \Vdash p \vee q$ then either $v \Vdash p$ or $v \Vdash q$. Hence either we have $w \Vdash \Diamond p$ or we have $w \Vdash \Diamond q$. Either way $w \Vdash \Diamond p \vee \Diamond q$.

(ii) The formula $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ is not valid on all frames. To see this let $\mathfrak{F}$ be a three-point frame with universe $\{0, 1, 2\}$ and relation $\{(0, 1), (1, 2)\}$. Let V be any valuation on $\mathfrak{F}$ s.t $V(p) = \{2\}$. Then $(\mathfrak{F}, V), 0 \Vdash \Diamond\Diamond p$, but $(\mathfrak{F}, V), 0 \nVdash \Diamond p$ since 0 is not related to 2.

(iii) We have just seen that the formula $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ is not valid on the class of all frames. However, it *is* valid if we restrict our attention to the class of transitive frames. To see this take any transitive frame $\mathfrak{F}$ and a state w in $\mathfrak{F}$, and let V be a valuation on $\mathfrak{F}$. We have to show that if $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Diamond\Diamond p$, then $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Diamond p$. So assume that $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Diamond\Diamond p$, then there are states u and v s.t Rwu and Ruv and $(\mathfrak{F}, V), v \Vdash p$. Now, since R is transitive we have that Rwv, hence by definition 6 $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Diamond p$.

In the same fashion one can easily verify the following:

(iv) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ is valid on all frames.

(v) $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$ is valid on the class of all frames.

(vi) All Tautologies are valid.

We have not yet discussed what it means for a modal formula to be a logical consequence of a set of other modal formulas.

Definition 9 (Local semantic consequence) Let τ be a similarity type, and let $\mathbf{S}$ be a class of structures of type τ. Let Σ and ϕ be a set of formulas and a single formula from a language of type τ. We say that ϕ is a local semantic consequence of Σ over $\mathbf{S}$(notation: $\Sigma \Vdash_{\mathbf{S}} \phi$) if for all models $\mathfrak{M}$ from $\mathbf{S}$, and all points w in $\mathfrak{M}$, if $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ then $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$.

Note that by the above definition our inferences will depend upon the class of structures we are working with. Thus, f.ex. an inference may be valid on the class of transitive frames, yet not valid on the class all frames.

Syntactic specification of modal logics

Until now we have only considered the semantic side of modal logics. Now we will develop the syntactic approach and then show how this is linked with the semantics.

Modal logics

From a syntactic viewpoint, modal logics are roughly speaking just obvious extensions of propositional logic taking modal languages into consideration. They are sets of modal formulas subject to certain closure rules. Formally:

Definition 10 (Modal logic) A modal logic Λ is a set of modal formulas that contains all propositional tautologies and is closed under the following rules

- if $\phi \in \Lambda$ and $\phi \to \psi \in \Lambda$, then $\psi \in \Lambda$ ('modus ponens')
- uniform substitution (cf. Definition 3)

If $\phi \in \Lambda$ we say that ϕ is a theorem of Λ and write $\vdash_\Lambda \phi$. If $\phi \notin \Lambda$ we write $\nvdash_\Lambda \phi$.

If the above definition is to make any sense we will expect it to imply that a modal logic contains $\psi_1 \wedge \psi_2$ whenever it contains ψ_1 and ψ_2. Fortunately, this is indeed the case: A modal logic is closed under forming logical conjunctions and disjunctions in a natural way. To see this, assume that $\vdash_\Lambda \psi_1$ and $\vdash_\Lambda \psi_2$. Since $\psi_1 \to (\psi_2 \to (\psi_1 \wedge \psi_2))$ is a tautology we have $\vdash_\Lambda \psi_1 \to (\psi_2 \to (\psi_1 \wedge \psi_2))$. Hence by modus ponens $\vdash_\Lambda \psi_2 \to (\psi_1 \wedge \psi_2)$ and thus, again by modus ponens, $\vdash_\Lambda \psi_1 \wedge \psi_2$. Likewise, whenever $\vdash_\Lambda \psi$ and φ is some modal formula, we have $\vdash_\Lambda \psi \vee \varphi$ by modus ponens since $\psi \to (\psi \vee \varphi)$ is a tautology.
A trivial example of a modal logic is the set of all modal formulas. One should also note, that the fact that modal logics are defined in terms of closures, implies that for any family $(\Lambda_i)_{i\in I}$ of modal logics, $\bigcap_{i\in I} \Lambda_i$ is a modal logic.
A special class of the modal logics is the *normal* modal logics. These are modal logics satisfying some additional requirements.

Definition 11 (Normal modal logic) A modal logic Λ is a normal modal logic if it contains the formulas

- *(K)* $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
- *(Dual)* $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$

and is closed under

- if $\vdash_\Lambda \phi$ then $\vdash_\Lambda \Box\phi$ ('generalization')

In the above definition, if no other modal formulas than (K) and (Dual) are included as axiomatic formulas, we call the normal modal logic **K**.
When we want to specify a normal modal logic we do it by stating the formulas that generate it, that is, we add modal formulas to **K** as axioms. For example, if we add the formula

- (4) $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$

as an axiom to **K** we get the normal modal logic denoted **K4**.
The following axioms are commonly known by the name given in their corresponding parentheses:

- (4) $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$
- (T) $p \to \Diamond p$
- (B) $p \to \Box\Diamond p$
- (D) $\Box p \to \Diamond p$
- (.3) $\Diamond p \wedge \Diamond q \to \Diamond(p \wedge \Diamond q) \vee \Diamond(p \wedge q) \vee \Diamond(\Diamond p \wedge q)$
- (L) $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$

In general, these logics will be named by appending the axiom names to the logic name **K**. Thus, the logic **K4B** is the logic **K** extended by adding the axioms (4) and (B).
As we will later see, many of these normal modal logics nicely connects with the frame based semantics we have already developed. This connection is captured by the concept of *soundness* and its counterpart *completeness*. However, before delving further into this, we need to consider the notion of consistency.

Consistency

An inherent feature of the semantics of our modal languages is that it is impossible for contradictions to occur, that is, for a formula φ to both be satisfied and not be satisfied at a given world. However, from a syntactic point of view there is a priori no guarantee that a modal logic will not contain both a formula ϕ and its negation. We will now investigates this issue.

Definition 12 Let $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \varphi$ be modal formulas. We say that φ *is deducible in propositional calculus from the assumptions* $\psi_1, \ldots, \psi_n$ if $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi$ is a tautology.

Lemma 13 *All modal logics are closed under deduction in propositional calculus.*

Proof. We must show that if $\vdash_\Lambda \psi_1, \ \ldots, \ \vdash_\Lambda \psi_n$ then $\vdash_\Lambda \varphi$ whenever φ is deducible in propositional logic from assumptions $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Thus assume that $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi$ is a tautology, so that $\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi$, and that $\vdash_\Lambda \psi_1, \ \ldots, \ \vdash_\Lambda \psi_n$. Then $\vdash_\Lambda \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$ and by modus ponens $\vdash_\Lambda \varphi$. □

Definition 14 (Deducibility) Let Λ be a modal logic. If $\Gamma \cup \{\phi\}$ is a set of formulas then ϕ is said to be deducible in Λ from Γ if $\vdash_\Lambda \phi$ or there are formulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ such that

$$\vdash_\Lambda (\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \to \phi$$

If this is the case we write $\Gamma \vdash_\Lambda \phi$ and if it is not the case we denote this by $\Gamma \nvdash_\Lambda \phi$.

These concepts enable us to express the notion of consistency:

Definition 15 (Consistency) For a modal logic Λ a set of formulas Γ is said to be Λ-consistent if $\Gamma \nvdash_\Lambda \perp$ and correspondingly Λ-inconsistent if $\Gamma \vdash_\Lambda \perp$.

One can easily show the following

Lemma 16 *For a modal logic Λ and a set of formulas Γ the following are equivalent:*

1. *Γ is Λ-inconsistent*
2. *There exists a formula ϕ such that $\Gamma \vdash_\Lambda \phi \wedge \neg\phi$*
3. *For all ψ, $\Gamma \vdash_\Lambda \psi$*

Lemma 17 *Let Γ be a set of formulas. For a formula φ the following holds:*

$$\Gamma \vdash_\Lambda \varphi \text{ if and only if } \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ is inconsistent.}$$

Proof. If Γ is inconsistent then the result is obvious, since $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is certainly inconsistent and $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$ by Lemma 3.
Now assume that Γ is consistent.
Assume $\Gamma \vdash_\Lambda \varphi$. Then we must also have $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_\Lambda \varphi$. Now since obviously $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_\Lambda \neg\varphi$ we have $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_\Lambda \varphi \wedge \neg\varphi$, thus $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is inconsistent by Lemma 2.
We show the right-to-left direction by contraposition, so assume that $\Gamma \not\vdash_\Lambda \varphi$, that is, $\not\vdash_\Lambda \varphi$ and there are no γ_i's in Γ so that $\vdash_\Lambda \bigwedge_i \gamma_i \to \varphi$. If $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is inconsistent then $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_\Lambda \varphi$ by Lemma 16. Thus there are $\gamma_i \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ s.t. $\vdash_\Lambda \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_r \to \varphi$. It follows that $\gamma_i = \neg\varphi$ for some i, say $\gamma_r = \neg\varphi$. Since the formula $((a \wedge \neg b) \to b) \to (a \to b)$ is a tautology we see that

$$\vdash_\Lambda \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_{r-1} \to \varphi$$

contradicting the assumption that $\Gamma \not\vdash_\Lambda \varphi$. Thus $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ must be consistent. □

Lemma 18 *Modus ponens preserves consistency.*

Proof. Assume that Γ is a Λ-consistent set of formulas and that ϕ, $\phi \to \psi \in \Gamma$. If $\Gamma \cup \{\psi\}$ is inconsistent, then by Lemma 17 $\Gamma \vdash_\Lambda \neg\psi$. But clearly $\Gamma \vdash_\Lambda \psi$ since ϕ, $\phi \to \psi \in \Gamma$, so $\Gamma \vdash_\Lambda \neg\psi \wedge \psi$, i.e. Γ is inconsistent by Lemma 16, a contradiction. □

Soundness

The semantic and the syntactic sides of our modal logics are linked by the notions of *soundness* and its counterpart, *completeness*. We will introduce these concepts now.

Definition 19 (Soundness) Let S be a class of frames (or models). A normal modal logic Λ is sound with respect to S if $\Lambda \subseteq \Lambda_S$.

What this definition says is that Λ is sound with respect to S if for all formulas ϕ and all structures $\mathfrak{S} \in S$, $\vdash_\Lambda \phi$ implies $\mathfrak{S} \Vdash \phi$. In other words, if our logic is sound with respect to a class of structures S, we are assured that any syntactically produced formula is valid on that class.
To show that a given normal modal logic is sound with respect to a class of structures is quite straightforward. The only thing we need to prove is that our inference rules preserve validity over the given class, and that our axiomatic modal formulas are valid on this class.
What we are actually going to show is that our inference rules preserve validity over any class of frames. Notice then that to prove that a given normal modal logic is sound with respect to a given class of frames it suffices to show that the added axiomatic formulas are valid on that specific class.

Modus Ponens To see that modus ponens preserves validity on any class of frames, let $\mathfrak{F}$ be an arbitrary frame, let w be a state in $\mathfrak{F}$ and let V be a valuation on $\mathfrak{F}$. We must show that if

$$(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \varphi \qquad \text{and} \qquad (\mathfrak{F}, V), w \Vdash \varphi \to \psi$$

then $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \psi$. But this easily follows since $\varphi \to \psi$ is just short-hand for $\neg\varphi \vee \psi$ and if $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \varphi$ then $(\mathfrak{F}, V), w \nVdash \neg\varphi$. Now it follows from definition 6 (4) that $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \psi$.

Uniform substitution Assume that we are given a formula φ that is valid on some class S of frames, that is, a formula

such that $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \varphi$ for all frames $\mathfrak{F} = (W, R) \in S$, all valuations V and all states $w \in W$. By (6) on page 23 this means that $V(\varphi) = W$ for all valuations on all frames $\mathfrak{F} = (W, R) \in S$.
Consider a substitution instance ψ of φ. We may assume that ψ is obtained from φ by applying the induced substitution map $(\cdot)^\sigma : \mathrm{Form}(\Phi) \to \mathrm{Form}(\Phi)$. Now given any valuation V for a frame $\mathfrak{F}$, we have that $V(\psi) = V(\sigma(\varphi)) = (V\sigma)(\varphi) = W$, since $V\sigma : \mathrm{Form}(\Phi) \to \mathrm{Form}(\Phi)$ is a valuation. Thus $\mathfrak{F}, w \Vdash \psi$ for all w.

Generalization Validity is obviously preserved by generalization, since if φ is satisfied at every w in every model based on a given frame then of course φ is also satisfied in every state accessible from a given state in that model.

Now that we have seen that our inference rules preserve validity over the class of all frames Example (iv) and Example (v) give us, that the normal modal logic **K** is sound with respect to the class of all frames. From Example (iii) we get that **K4** is sound with respect to the class of all transitive frames.

Completeness

When considering soundness we were dealing with the question of whether formulas produced in a logic were also valid on a set of structures. Now we consider the reverse situation: for a given set of structures S, are all valid formulas on S also producible in some specific logic Λ? This may also be expressed as a question of whether $\Lambda \supseteq \Lambda_S$. This is formalized in the following definition:

Definition 20 (Completeness) Let S be a class of frames (or models). A logic Λ is strongly complete with respect to S if for any

set of formulas $\Gamma \cup \{\phi\}$, if $\Gamma \Vdash_S \phi$ then $\Gamma \vdash_\Lambda \phi$.
A logic Λ is weakly complete with respect to S if for any formula ϕ, if $\Vdash_S \phi$ then $\vdash_\Lambda \phi$.

Thus, a logic Λ is weakly complete with respect to S if $\Lambda \supseteq \Lambda_S$.

Theorem 21 *A logic Λ is strongly complete with respect to a class of structures S iff every Λ-consistent set of formulas is satisfiable on some $\mathfrak{S} \in S$. Λ is weakly complete with respect to a class of structures S iff every Λ-consistent formula is satisfiable on some $\mathfrak{S} \in S$.*

Proof. The proof is by contraposition in both directions.
Assume that Λ is not strongly complete, that is, there is some set of formulas $\Gamma \cup \{\phi\}$ such that $\Gamma \Vdash_S \phi$ and $\Gamma \nvdash_\Lambda \phi$. Thus Γ must be Λ-consistent by Lemma 16. Then, what is more, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ must be Λ-consistent by Lemma 17. However, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ is certainly not satisfiable on any $\mathfrak{S} \in S$.
Assume on the other hand that there is some Λ-consistent set Γ not satisfiable on any $\mathfrak{S} \in S$. Thus $\Gamma \Vdash_S \bot$. But since Γ is Λ-consistent, it is not the case that $\Gamma \vdash_\Lambda \bot$. Hence, Λ is not strongly complete with respect to S.
The result concerning weak completeness follows from the result for strong completeness. □

Definition 22 (Λ-MCSs) A set of formulas Γ is maximal Λ-consistent if Γ is Λ-consistent and any set of formulas properly containing Γ is Λ-inconsistent. If Γ is maximal Λ-consistent we say that it is Λ-MCS.

It is not difficult to show the following

Theorem 23 *If Λ is a logic the following holds for any Λ-MCS of formulas Γ:*

1. *Γ is closed under modus ponens.*
2. *$\Lambda \subseteq \Gamma$.*
3. *for all formulas ϕ: $\phi \in \Gamma$ or $\neg\phi \in \Gamma$.*
4. *if $\phi, \psi \in \Gamma$ then $\phi \wedge \psi \in \Gamma$.*
5. *for all formulas ϕ, ψ: $\phi \vee \psi \in \Gamma$ iff $\phi \in \Gamma$ or $\psi \in \Gamma$.*

By a pretty standard application of Zorn's lemma we get

Lemma 24 (Lindenbaum's Lemma) *If Σ is a Λ-consistent set of formulas then there is a Λ-MCS such that $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.*

It should be noted that if the collection of propositional letters is assumed to be enumerable one may prove the lemma without having to resort to Zorn's Lemma.

Canonical models

It follows from theorem 21 that completeness theorems are essentially model existence theorems. Given a normal modal logic Λ we prove its strong completeness with respect to some structure by showing that every Λ-consistent set of formulas can be satisfied in some suitable model. What we are going to do now is to build models out of maximal consistent sets and we will see that these models do the job.

Definition 25 Let a normal modal logic Λ be given. The canonical model $\mathfrak{M}^\Lambda$ for Λ is the triple $(W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$ where

(i) W^Λ is the set of all Λ-MCSs.

(ii) R^Λ is the binary relation on W^Λ defined by $R^\Lambda wu$ if for all formulas ψ, $\psi \in u$ implies $\Diamond\psi \in w$. R^Λ is called the canonical relation.

(iii) $V^\Lambda : \Phi \to W^\Lambda$ is given by $V^\Lambda(p) = \{w \in W^\Lambda \mid p \in w\}$. V^Λ is called the canonical valuation.

The pair $\mathfrak{F}^\Lambda = (W^\Lambda, R^\Lambda)$ is called the canonical frame for Λ.

Lemma 26 *For any normal logic Λ, $R^\Lambda wv$ if and only if for all formulas ψ, $\Box\psi \in w$ implies $\psi \in v$.*

Proof. Assume that $R^\Lambda wv$. We prove the implication by contraposition, so we assume that $\psi \notin v$. Since v is a Λ-MCS, by Theorem 23 $\neg\psi \in v$. Since $R^\Lambda wv$ by assumption, $\Diamond\neg\psi \in w$. Hence, again by Theorem 23, $\neg\Diamond\neg\psi \notin w$, that is, $\Box\psi \notin w$ as desired.

On the other hand, assume that $\Box\psi \in w$ implies $\psi \in v$. Now, if $\psi \in v$ then $\neg\psi \notin v$ since v is a Λ-MCS. Thus $\Box\neg\psi \notin w$ and we see that $\neg\Box\neg\psi \in w$, because w is also a Λ-MCS. Hence, $\Diamond\psi \in w$, so $R^\Lambda wv$. □

For proving the crucial Existence Lemma we will need the following

Sublemma 27 The formula

$$(\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \to \Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$$

is a theorem of every normal modal logic.

Lemma 28 (Existence Lemma) *For any normal modal logic Λ and any state $w \in W^\Lambda$, if $\Diamond\varphi \in w$ then there is a state $v \in W^\Lambda$ such that $R^\Lambda wv$ and $\varphi \in v$.*

Proof. Suppose $\Diamond\varphi \in w$. Let $A = \{\psi \mid \Box\psi \in w\}$ and v^- be $\{\varphi\} \cup A$. To see that v^- is consistent we assume the opposite and aim for a contradiction. Hence, assume that v^- is inconsistent.

Then there are $\psi_1, \ldots, \psi_n \in A$ such that $\vdash_\Lambda (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \neg\varphi$. By generalization $\vdash_\Lambda \Box((\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \neg\varphi)$, hence $\vdash_\Lambda \Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \Box\neg\varphi$ by the K-axiom, uniform substitution and modus ponens. Since $(\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \rightarrow \Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$ is a theorem of any normal modal logic, as we saw in Lemma 27, we obtain $\vdash_\Lambda (\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \rightarrow \Box\neg\varphi$ by a familiar deduction rule from propositional calculus. Now, since $\Box\psi_i \in w$ for $1 \leq i \leq n$ and w is a Λ-MCS, $\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n \in w$, so by modus ponens $\Box\neg\varphi \in w$. By the Dual-axiom this translates into $\neg\Diamond\varphi \in w$, but since w is a Λ-MCS containing $\Diamond\varphi$, this is impossible by Theorem 23. Thus, v^- is in fact consistent. Now, by Lindenbaum's Lemma, v^- can be extended to some Λ-MCS v. Thus $v \in W^\Lambda$ and by construction of v we have $\varphi \in v$ and that for all formulas ψ, if $\Box\psi \in w$ then $\psi \in v$. That $R^\Lambda wv$ now follows from Lemma 26. $\Box$

Lemma 29 (Truth Lemma) *For any normal modal logic Λ and any formula φ, $\mathfrak{M}^\Lambda, w \Vdash \varphi$ if and only if $\varphi \in w$.*

Proof. The proof is by structural induction on φ. If φ consists solely of a propositional letter the result follows from the definition of V^Λ. If φ is of the form $\psi_1 \vee \psi_2$ then by Theorem 23 $\varphi \in w$ if and only if $\psi_1 \in w$ or $\psi_2 \in w$. This is the case if and only if $w \in V^\Lambda(\psi_1)$ or $w \in V^\Lambda(\psi_2)$, that is, if and only if $\mathfrak{M}^\Lambda, w \Vdash \varphi$. The case where φ is of the form $\neg\psi$ follows similarly. What remains to be considered are the modal cases. We have

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{M}^\Lambda, w \Vdash \Diamond\psi & \text{if and only if} & \exists v(R^\Lambda wv \wedge \mathfrak{M}^\Lambda, v \Vdash \psi) \\ & \text{if and only if} & \exists v(R^\Lambda wv \wedge \phi \in v) \\ & \text{only if} & \Diamond\psi \in w \end{array}$$

where the second biimplication follows from the induction hypothesis and the third is by the definition of R^Λ. Thus the left-to-right part of the argument for the modal cases has been taken care of. Now suppose $\Diamond\psi \in w$. By the Existence Lemma there is a state $v \in W^{\Lambda}$ such that $R^{\Lambda}wv \wedge \psi \in v$. Hence, the 'only if' of the above argument actually becomes 'if and only if' and the desired result follows. $\square$

Now we are ready for the result that justifies all of the above work on canonical models:

Theorem 30 (Canonical Model Theorem) *A normal logic is strongly complete with respect to its canonical model.*

Proof. Suppose that Σ is a Λ-consistent set of formulas of the normal modal logic Λ. By Lindenbaum's Lemma there is a Λ-MCS Σ^{+} extending Σ. Since any formula of Σ belongs to Σ^{+}, by the Truth Lemma $\mathfrak{M}^{\Lambda}, \Sigma^{+} \Vdash \Sigma$. The result now follows from Theorem 21. $\square$

With the above theorem we are now able to show completeness for several normal modal logics. We give some few examples.

Theorem 31 ***K*** *is strongly complete with respect to the class of all frames.*

Proof. According to Theorem 21 it suffices to show, that for any **K**-consistent set of formulas Γ, there exists a model in which Γ is satisfied. We achieve this by letting $\mathfrak{M}$ be the canonical model for **K**, that is, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}^{K}, V^{K})$. By the previous lemma Γ will be satisfied at any MCS extendings Γ. $\square$

Theorem 32 *The logic $K4$ is strongly complete with respect to the class of all transitive frames.*

Proof. Given a $K4$-consistent set of formulas Γ, it suffices by Theorem 21 to find a model $(\mathfrak{F}, V)$ such that the frame $\mathfrak{F}$ is transitive and there is a state w in the model such that $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Gamma$.
Consider the canonical model (W^{K4}, R^{K4}, V^{K4}) for $K4$. By Lindenbaum's Lemma there is some K4-MCS Γ^+ extending Γ. By the Truth Lemma we have $(W^{K4}, R^{K4}, V^{K4}), \Gamma^+ \Vdash \Gamma$. Thus it remains to be seen that (W^{K4}, R^{K4}, V^{K4}) is transitive.
Suppose u, v, w are states in (W^{K4}, R^{K4}, V^{K4}) so that $R^{K4}uv$ and $R^{K4}vw$. If $\varphi \in w$ Since $R^{K4}vw$ we have $\Diamond\varphi \in v$. Thus, since $R^{K4}uv$, $\Diamond\Diamond\varphi \in u$. But u is a MCS, hence contains $\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$. By modus ponens it contains $\Diamond\varphi$ whence $R^{K4}uw$. $\square$

In the same manner one can easily show that **KT** and **KB** are strongly complete with respect to the classes of reflexive and of symmetric frames, respectively.
And then furthermore from this we get that **KT4** is strongly complete with respect to the class of reflexive transitive frames, and **KT4B** is strongly complete with respect to the class of frames whose relation is an equivalence relation.

(The article is based on chapter 1 and 4 in the book "Modal Logic" by Patrick Blackburn, Maarten de Rijke and Yde Venema, Cambridge University Press.)

Spingrupper og spinrepræsentationer

Søren Ladegaard Kristensen

Indledning

Som en del af kandidatuddannelsen i matematik forlanges det, at den studerende udfører visse formidlingsaktiviteter. Denne artikel er en sådan formidlingsaktivitet. Da jeg i skrivende stund er ved at færdiggøre mit speciale i matematik, er det nærliggende at prøve at beskrive nogle af ideerne deri.

Der gives i denne artikel således en kort introduktion til nogle centrale begreber inden for et område af differentialgeometrien kaldet *spingeometri*. Som navnet antyder, har disse matematiske ideer oprindeligt fundet anvendelse i kvantemekanikken, men har med tiden udviklet sig til et selvstændigt matematisk forskningsfelt med flere forskellige grænseflader til andre områder af matematikken.

Mere præcist forsøges det at give en delvis præsentation af *spingruppen* og *spinrepræsentationen*. Delvis i den forstand, at præsentationen retter sig mod læsere med få matematiske kundskaber, dvs. det forudsættes blot, at læseren er bekendt med lineær algebra og elementær gruppe- og ringteori. Dette betyder naturligt nok, at en del af historien må simplificeres eller udelades. Et dybere kendskab til spingeometri kan opnås ved at læse mere i fx. [3].

Inden vi begiver os ud i den mere formelle behandling af spingruppen og spinrepræsentationen, vil jeg skrive lidt om, hvad mit speciale handler om, og hvad der har ledt mig til at skrive om netop dette. Specialet handler om *harmonisk analyse* på en særlig differentialgeometrisk struktur, mere præcist det *hyperbolske rum*, hvortil spingruppen har en særlig relation. Interessen for differentialgeometri opstod, da jeg ved lidt af et tilfælde tog kurset 3GE (på den gamle studieordning, nu omtrent svarende til Geom 1 og delvist Geom 2). Her studeredes kurver og flader i rummet, som er elementære eksempler på *differentiable mangfoldigheder*. Disse er abstrakte topologiske rum, som løst sagt ligner det Euklidiske, når man kigger tæt nok på (under en topologisk optik). Tanken om, at man "indefra" kan beskrive højdimensionale rum med finurlige krumninger og andre egenskaber finder jeg ret fascinerende. Et efter min mening utroligt dybsindigt eksempel herpå er den almene relativitetsteori, der beskriver fysiske fænomener (tyngdekraft) som en rent geometrisk egenskab (krumning) ved rummet, eller rettere *rumtiden*. Mit bachelorprojekt kom således til at handle om mangfoldigheder, og hvordan man kan tænke på dem som delmængder af det Euklidiske rum (Whitneys indlejringssætning). I mit første kandidatprojekt ønskede jeg at lære mere om mangfoldigheder, mere præcist *Liegrupper* og såkaldte *homogene rum* af disse. Det tidligere nævnte hyperbolske rum er et homogent rum af spingruppen (som er en Liegruppe). Mit andet kandidatprojekt kunne efter reglerne ikke igen handle om differentialgeometri, så jeg søgte efter et godt emne inden for funktionalanalysen. Jeg fik ideen at kombinere studiet af homogene rum med analyse gennem et gammelt nummer af FAMØS, hvori Professor Henrik Schlichtkrull skrev en artikel om sin forskning i harmonisk analyse. Ideen i harmonisk analyse er meget kort fortalt at beskrive en funktion på en givet mængde som en sum (i en eller anden forstand) af mere simple funktioner eller at opsplitte et vektorrum af funktioner i simplere underrum. Er mængden den reelle akse, kan en funktion med passende egenskaber, som bekendt for de fleste, fremstilles som en sum af periodiske funktioner kaldet *Fourierrækken*. Tingene bliver naturligt nok væsentligt mere komplicerede, når mængden erstattes med en mere abstrakt mængde. Et centralt resultat i harmonisk analyse er dekomponeringen af Hilbertrummet af kvadratisk integrable funktioner på en givet mængde. Et teorem, der beskriver en sådan dekomponering kaldes et *Plancherelteorem*. Formålet med mit andet kandidatprojekt var at bevise et Plancherelteorem for funktioner på Abelske lokalkompakte topologiske grupper, og således var specialeemnet lagt i rammer: harmonisk analyse på homogene rum (af en slags). Min vejleder, Henrik Schlichtkrull, tilføjede ideen om at studere det hyperbolske rum og prøve at formulere et Plancherelteorem for såkaldte *spinorer*, der kan opfattes som en type funktioner defineret på spingruppen.

Cliffordalgebraen

En mulig vej til en definition af spingruppen er via *Cliffordalgebraen*. Lad os først indføre begrebet *algebra*. Lad $\mathbb{K}$ være et legeme og A et endeligdimensionalt vektorrum over $\mathbb{K}$. Vi siger at A er en $\mathbb{K}$-algebra, hvis der findes en associativ multiplikation $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto xy$, som opfylder de distributive love $x(y+z) = xy+xz$ og $(x + y)z = xz + yz$ samt $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$, hvor $x, y, z \in A$ og $\lambda \in \mathbb{K}$. En lineær afbildning $f : A \to B$ mellem $\mathbb{K}$-algebraer A og B siges at være en algebrahomomorfi, hvis $f(xy) = f(x)f(y)$ for alle $x, y \in A$. Vi skriver $A \cong B$ og siger at A og B er isomorfe, hvis der findes en bijektiv algebrahomomorfi mellem dem. Findes der i en algebra et neutralt element for multiplikationen, kaldes dette en enhed. Bemærk at en algebra med enhed specielt er en ring.

Vi vil ikke konstruere Cliffordalgebraen i detaljer, men blot nævne dens vigtigste egenskaber. En mere grundig fremstilling findes i [2], kap.3. Cliffordalgebraen er nært relateret til *kvadratiske former* defineret som følger.

Lad V være et endeligdimensionalt vektorrum over legemet $\mathbb{K}$. Ved en kvadratisk form på V forstås en afbildning $q : V \to \mathbb{K}$ som opfylder at $q(av) = a^2 q(v)$ for $a \in \mathbb{K}$ og $v \in V$ samt at afbildningen $V \times V \to \mathbb{K}$ givet ved

$$(v, w) \mapsto \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$$

er lineær i hver variabel.

Cliffordalgebraen $C\ell(V, q)$ er kort fortalt en $\mathbb{K}$-algebra med enhed, der er genereret af V, sådan at der gælder $v^2 = -q(v) \cdot 1$ for alle $v \in V$. Specielt er V indeholdt som underrum i $C\ell(V, q)$. Cliffordalgebraen er karakteriseret ved følgende universelle egenskab:

Sætning 1 *Lad A være en $\mathbb{K}$-algebra med enhed 1_A og lad $f : V \to A$ være en lineær afbildning der opfylder $f(v)^2 = -q(v) \cdot 1_A$. Da findes en entydig algebrahomomorfi $\widetilde{f} : C\ell(V, q) \to A$ sådan at $f = \widetilde{f} \circ \imath$. Endvidere er Cliffordalgebraen pånær isomorfi den eneste algebra med denne egenskab.*

Dette bevises i [2], Prop.3.14.

Spingruppen

Et element x i en algebra A med enhed kaldes invertibelt, såfremt der findes $x^{-1} \in A$ sådan at $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. De invertible elementer i Cliffordalgebraen udgør en multiplikativ gruppe kaldet $C\ell^\times(V, q)$. Hvis $v \in V$ og $q(v) \neq 0$ gælder $v \in C\ell^\times(V, q)$, idet da $v^{-1} = -\frac{v}{q(v)}$. Dette leder os til følgende definition af spingruppen:

Definition 2 Spingruppen $\mathrm{Spin}(V, q)$ er undergruppen af gruppen $C\ell^\times(V, q)$ bestående af elementer på formen $v_1 \cdots v_k$, hvor $v_i \in V$, $q(v_i) = \pm 1$ og k er lige. Her sættes det "tomme" produkt $(k = 0)$ til 1.

For nemheds skyld vil vi nu fokusere specifikt på Cliffordalgebraen $\mathbb{C}\ell(n) := \mathrm{C}\ell(\mathbb{C}^n, q_n)$, hvor q_n er den kvadratiske form på $\mathbb{C}^n$ givet ved

$$q_n(z_1, \ldots, z_n) = z_1^2 + \cdots + z_n^2 \quad , \quad (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

Ud fra Cliffordalgebraens universelle egenskab kan det vises, at hvis q_1 og q_2 er kvadratiske former på $\mathbb{C}^n$, så er $\mathrm{C}\ell(\mathbb{C}^n, q_1) \cong \mathrm{C}\ell(\mathbb{C}^n, q_2)$. I denne forstand ligger der altså ingen væsentlig begrænsning i kun at betragte tilfældet $q = q_n$. Den tilhørende spingruppe $\mathrm{Spin}(\mathbb{C}^n, q_n)$ noteres $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$.

Spinrepræsentationen

Cliffordalgebraerne $\mathbb{C}\ell(n)$ kan klassificeres på simpel vis som matrixalgebraer. Lad $M_n(\mathbb{K})$ betegne algebraen af $n \times n$-matricer med matrixelementer i legemet $\mathbb{K}$. Da gælder:

Sætning 3

$$\mathbb{C}\ell(n) \cong \begin{cases} M_{2^{[\frac{n}{2}]}}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^{[\frac{n}{2}]}}(\mathbb{C}) & n \text{ ulige} \\ M_{2^{[\frac{n}{2}]}}(\mathbb{C}) & n \text{ lige} \end{cases}$$

hvor $[\cdot]$ *betegner heltalsdelen.*

For uddybende behandling af klassifikationen af Cliffordalgebraer, se [3], kap.1,§4.

En måde at studere grupper på er at undersøge, hvordan de virker på et vektorrum. Dette er meget kort fortalt ideen i *repræsentationsteori*. Spingruppen er interessant af flere grunde, dels fordi den har en fundamental virkning, dvs. en repræsentation, på rummet af *spinorer*, som præciseret i det følgende. Vi definerer først nogle elementære repræsentationsteoretiske begreber.

Definition 4 Lad G være en gruppe og S et vektorrum. Da er en repræsentation af G på S en gruppehomomorfi $\rho : G \to \mathrm{GL}(S)$. Tilsvarende kan vi definere en repræsentation af en algebra A som en algebrahomomorfi $\rho : A \to \mathrm{End}(S)$. Et underrum $S' \subseteq S$ siges at være invariant under G (hhv. A) såfremt $\rho(x)S' \subseteq S'$ for alle $x \in G$ (hhv. A). En repræsentation siges at være irreducibel, hvis $\{0\}$ og S er de eneste invariante underrum. To repræsentationer ρ_1 og ρ_2 på S kaldes ækvivalente, hvis der findes en isomorfi $\Phi : S \to S$ sådan at $\rho_1 \circ \Phi = \Phi \circ \rho_2$.

Et element i $M_n(\mathbb{K})$ definerer på oplagt vis en endomorfi af $\mathbb{K}^n$ idet et basisvalg for $\mathbb{K}^n$ er foretaget. Dette giver anledning til den såkaldte *standardrepræsentation* ρ af $M_n(\mathbb{K})$ på $\mathbb{K}^n$. Der gælder at standardrepræsentationen af matrixalgebraen $M_n(\mathbb{K})$ pånær ækvivalens er den eneste irreducible repræsentation af $M_n(\mathbb{K})$ på $\mathbb{K}^n$. Matrixalgebraen $M_n(\mathbb{K}) \oplus M_n(\mathbb{K})$ har pånær ækvivalens netop to irreducible repræsentationer, nemlig $\rho_1(\varphi_1 \oplus \varphi_2) = \rho(\varphi_1)$ og $\rho_2(\varphi_1 \oplus \varphi_2) = \rho(\varphi_2)$, hvor $\varphi_1, \varphi_2 \in M_n(\mathbb{K})$ (se [3], kap.1,§5, Thm.5.6). Antag i det følgende at $S = \mathbb{C}^{2^{[\frac{n}{2}]}}$. Af ovenstående følger nu, at når n er lige har $\mathbb{C}\ell(n) \cong M_{2^{[\frac{n}{2}]}}(\mathbb{C})$ pånær ækvivalens netop én irreducibel repræsentation på S. Tilsvarende når n er ulige har $\mathbb{C}\ell(n) \cong M_{2^{[\frac{n}{2}]}}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^{[\frac{n}{2}]}}(\mathbb{C})$ pånær ækvivalens netop to irreducible repræsentationer på S. Vi definerer nu spinrepræsentationen:

Definition 5 Spinrepæsentationen $\sigma : \mathrm{Spin}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(S)$ er restriktionen af en vilkårlig irreducibel repræsentation $\rho : \mathbb{C}\ell(n) \to \mathrm{End}(S)$ til $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}\ell(n)$. Vektorerne i S kaldes spinorer.

Ovenstående overvejelser om antallet af irreducible repræsentationer af $\mathbb{C}\ell(n)$ kan nu anvendes til at vise, at definitionen af spinrepræsentationen er uafhængig af, hvilken irreducibel repræsentation $\rho : \mathbb{C}\ell(n) \to \mathrm{End}(S)$ vi vælger. Beviset er for omfangsrigt for denne artikel, så der henvises til [2], Prop.5.15.

Den specielle ortogonale gruppes forbindelse til $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$

Betragt nu repræsentationen $\pi : \mathbb{C}\ell^{\times}(n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}\ell(n))$ givet ved $\pi(x)y = xyx^{-1}$, hvor $x \in \mathbb{C}\ell^{\times}(n)$ og $y \in \mathbb{C}\ell(n)$. Det kan vises, at restriktionen af π til $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}\ell^{\times}(n)$ giver en homomorfi

$$\pi' : \mathrm{Spin}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$$

(se [3], s.14-19), hvor $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ er den specielle ortogonale gruppe bestående af orienteringsbevarende lineære transformationer af $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}\ell(n)$ som bevarer den kvadratiske form q. En kæde af grupper G_i og gruppehomomorfier π_i på formen

$$\cdots G_{i-1} \overset{\pi_{i-1}}{\to} G_i \overset{\pi_i}{\to} G_{i+1} \cdots$$

siges at være eksakt, hvis $\ker \pi_i = G_i$ og $\mathrm{Im}\pi_i = G_{i+1}$ for alle i. Med $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gælder at følgende kæde er eksakt:

$$0 \to \{\pm 1, \pm i\} \overset{\imath}{\to} \mathrm{Spin}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\pi'} \mathrm{SO}(n, \mathbb{C}) \to 0$$

hvor $\imath$ er indlejringen af $\{\pm 1, \pm i\}$ i $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$ (se [2], Prop. 4.8).

For læsere med kendskab til topologi og Liegruppeteori kan det afslutningsvis bemærkes, at spingruppen har Liegruppestruktur og homomorfien π' er en Liegruppehomomorfi. Med udgangspunkt i ovenstående eksakte følge kan det vises, at $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$ er en overlejringsgruppe for $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$. Sidstnævnte er en sammenhængende gruppe og har således en enkeltsammenhængende overlejringsgruppe ([4], Thm.3.25), som netop er spingruppen. Dette kan anvendes til en enklere, men mere abstrakt, karakterisering af spingruppen.

Litteratur

[1] Greub, W.H.: *"Multilinear Algebra"*, Springer Verlag 1967

[2] Kristensen, S.L: *"L^2 harmonic Analysis for Spinors on Hyperbolic Space"*, Speciale i matematik. Forefindes (snart) i biblioteket

[3] Lawson, H.B. og Michelsohn M.L.: *"Spin Geometry"*, Princeton University Press 1989

[4] Warner, F.W.: *"Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups"*, Scott, Foresman and Company 1971

Forskningsgruppen 'Statistik og Sandsynlighedsregning'

Martin Jacobsen

Gruppens forskning spænder vidt fra ren sandsynlighedsregning og informationsteori over matematisk statistik til anvendt statistik. Grundlaget er den matematiske beskrivelse af tilfældige fænomener, formaliseret ved, at man betragter sandsynlighedsmål på konkrete rum, der kan være endeligt- eller uendeligt-dimensionale. Helt centralt er studiet af stokastiske processer, der kan betragtes som sandsynlighedsmål på specielle funktionsrum. Gruppens forskning omfatter statistisk inferens (estimation og test) for fx diffusionsprocesser (som er kontinuerte) og tidsrækker, problemer vedrørende statistiske modeller med manglende data, asymptotisk teori, studiet af processer med særlig relevans for bioinformatik, sammenhængen mellem mål for information og principper for statistisk inferens samt studiet af sandsynlighedsteoretiske strukturer for processer med spring. Andre særlige emner er kønsforskning og didaktik.

Gruppens undervisning er først og fremmest rettet mod kandidatuddannelsen i statistik, men mange af kurserne er også obligatoriske for de aktuar-studerende. Mat-øk'er vælger også blandt kurserne, specielt kan SAND3 og SAND4 anbefales, hvis man for alvor ønsker at forstå grundlaget for de stokastiske processer, der optræder i finansieringsteori. For de matematikstuderende kan det også være smart at vælge nogle af kurserne i statistik og sandsynlighedsregning – statistik bruges (og misbruges hvis man ikke ved nok) jo i alle sammenhænge, der har at gøre med analyse af konkrete data!

Forskningsgruppen 'Topologi'

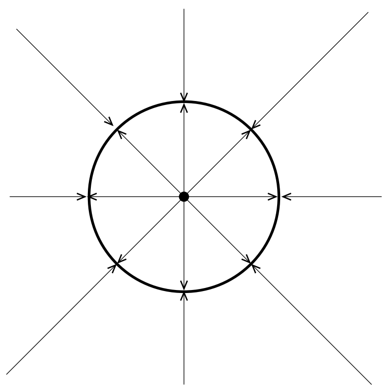
Tarje Bargheer

I Forskningsgruppen i topologi har vi pt. fire fastansatte forskere: Jesper Grodal, Jesper Michael Møller, Erik Kjær Pedersen og Nathalie Wahl. Derudover kommer der til efteråret to midlertidige ansættelser i form af post-docs'ne, Craig Westerland og Radu Stancu. På adressen `http://www.math.ku.dk/english/research/top/` kan man læse om aktiviteter gruppen foretager sig.

Forskningen i gruppen centrerer sig om algebraisk topologi – også bare kaldet topologi. Kort fortalt er algebraisk topologi en variant af geometri, hvor man altså kigger på topologisk rum – som fx. kurver og flader.

Starten på algebraisk topologi er dog at introducerer en meget bredmasket ækvivalensrelation på disse rum.

For en algebraisk topolog vil det for eksempel ikke være noget problem at deformere $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ over i enhedscirklen S^1, fx. illustreret ved kontinuert at mase punkterne langs pilene indikeret på følgende tegning:



Fordi vi er i stand til at lave sådan en deformation, vil S^1 og $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ betragtes som værende ens!

På denne måde siger det sig selv at algebraiske topologers beregninger ikke længere ligner dem man ser i fx. differentialgeometri – introduceret på `Geom1`. I eksemplet ovenfor er tangentrummet til de to ens rum hhv. 2-dimensionelt og 1-dimensionelt. Tangentvektorer til et punkt bliver derfor forholdsvist irrelevant for en algebraisk topolog.

Beregningsmetoder der i stedet vinder frem i algebraisk topologi kommer fra algebra. Ud fra de topologiske rum konstruerer man grupper – som man kender dem fra `Alg1` – grupperne beskriver aspekter af det topologiske rum man står med.

Hvis vi deformerer det ene rum over i det andet sådan at rummene stadig er ens, giver dette blot anledning til en isomorfi af de tilhørende grupper. Man kalder disse grupper for invarianter hørende til vores topologiske rum, og

Det klassiske eksempel – der har været et tema til en del bredt orienterede foredrag dette efterår – er fundamentalgruppen $\pi_1(X)$ hørende til rummet X. Elementerne i $\pi_1(X)$ er stier i X der starter og slutter i samme punkt. Komposition af to stier er givet ved at gå først langs den ene sti i den kompositionen, og dernæst den næste. $\pi_1(X)$ viser sig at være en af disse invariante grupper hørende til X.

Algebraisk topologi er et stærkt værktøj til at skelne rum. Ved at forsøge sig med direkte beregninger, vil man opdage at det er urimeligt omstændigt at vise at $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ og $\mathbb{R}^2$ er to forskellige topologiske rum [4]. I algebraisk topologi er dette en barneleg; hvis man har invariante grupper hørende til de to rum, der ikke er

[4] her tænkt som ikke-homeomorfe. Altså en mere finmasket ækvivalens af rum end ovenfor, relateret til hvad man ser i geometri

isomorfe, har de to rum ikke en chance for at være ens – heller ikke med en finere ækvivalens af rum end algebraiske topologers grovmaskede. Fundamentalgruppen viser sig at gøre arbejdet for en i ovenstående tilfælde.

En måske mere imponerende feature ved algebraisk topologi er at samspillet mellem algebra og topologi også går den anden vej; vidste man det ikke på forhånd, havde man nok ikke gættet at den yderst algebraisk klingende sætning

Sætning 1 *Enhver undergruppe af en fri gruppe er en fri gruppe*

har sit simpleste – og oprindelige – bevis inden for algebraisk topologi. Fundamentalgruppen er igen her nøglen.

Forskningsgruppen i topologi er i kraftig vækst. Tre af de fire nuværende ansatte er blevet ansat inden for det seneste halvandet år. Som før nævnt suppleres dette op med endnu to post-docs til sommer. Disse udvidelser realiseres primært igennem en del ekstern finansiering; fx. et betydeligt EU-legat (European Young Investigator prisen tildelt til Jesper Grodal); derudover er gruppen blevet tildelt en del nationale legater.

Kurser der er direkte relevante for forskningen der foregår i topologi-gruppen er:

1. Det grundlæggende `Topologi (Top)` (Blok 2B), hvor det generelle begreb 'topologisk rum' bliver slået fast, og rammen for algebraisk topologi dermed fastlagt.
2. Kurset `Algebraisk Topologi (AlgTop)` (Blok 1B), der introducerer algebraisk topologi, bygger videre på `Top` – og fastlægger mange af de fundamentale værktøjer man arbejder med i algebraisk topologi.
3. Næste semester afholdes herudover det videregående kursus `Introduction to String Topology` (Blok 2A), der bygger oven på `AlgTop`.

Kurser der er stærkt relaterede til algebraisk topologi kan deles op i to blokke:

1. Kommutativ- og homologisk-algebra – altså algebrakurser der er stærke værktøjer inden for algebraisk topologi (næste semester primært manifesteret i kandidat-kurserne `HomAlg` (Blok 1A) og `KomAlg` (Blok 1C), samt naturligvis bachelorkurset `Alg2` (Blok1B))
2. Geometri. I denne gren af matematikken arbejder man med den vigtige klasse af topologiske rum, kaldet mangfoldigheder. Som nævnt ovenfor er synspunktet her en smule anderledes end kernen i algebraisk topologi; det er generelt enormt sundt at kunne se tingene fra flere sider. Næste semester kan man fx. forsøge sig med `GeomLie` (Blok 1A) og `GeomRie` (Blok 1C).

En gratis måde at få snust en smule til algebraisk topologi er ved simpelthen at møde op mandag kl. 15.15 i et auditorium annonceret på `http://www.math.ku.dk/kalender/`. Her vil der almindeligvis være et seminar i algebraisk topologi. Alle er yderst velkomne; seminarerne vil typisk beskrive noget nutidig forskning.

Famøs juni 2007
Fagblad for Aktuar, Matematik,
-Økonomi og Statistik ved Københavns Universitet

Tegner:
Tarje Bargheer

Deadline for næste nummer:
3. oktober 2007

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til famos@math.ku.dk – gerne i LaTeX
og gerne baseret på skabelonen
som kan hentes på hjemmesiden.

Famøs er et internt fagblad.
Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Sat ved hjælp af pdfLaTeX med
skrifttypefamilien Computer Modern
designet af Donald Knuth.

Fagbladet Famøs
c/o Instistut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
http://www.math.ku.dk/famos/

Oplag: 300 stk.
ISSN: 1395-2145

FAMØS

Indhold

Redaktion

Tarje Bargheer, Ulrik Buchholtz (ansvh.), Sebastian Paaske Tørholm

20. årgang, nr. 2, juni 2007