FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
19. årgang, nr. 1, oktober 2005

David Hilbert (1862–1943) i hat og briller. Hilbert var både en dygtig matematiker og en ambitiøs ideolog med en utopi om at omskrive matematikken til en formalistisk struktur og bevise dens konsistens og fuldstændighed. Projektet var dødfødt, men har stadig enorm indflydelse på nutidige matematikeres selvforståelse.

Indhold

Sidste år med FAMØS

Redaktøren

Velkommen i vort blad. Eller rettere: velkommen i dit fagblad. Og velkommen på studiet hvis (men ikke kun hvis) du er rus.

Det du sidder og læser netop nu, kære læser, er en leder. Så hvis du om et par linjer udsættes for diverse sure opstød fra redaktørens side, er det helt i overensstemmelse med genren og du bør derfor glædes over det.

Dette nummer af FAMØS er skræmmende tyndt. Et faktum som du, kære læser, måske betvivler i og med du har mærket bladets tykkelse i hånden da du slog op på denne side.

Dette er på mindst en måde sidste år med FAMØS. Indholdsmæssigt er dette nummer af FAMØS tyndt. Dette nummer savner både en tegneserie og en artikel i *Hvad forsker jeg i?*-serien, og hverken formidlingsaktiviteter eller opgavebesvarelser har vi modtaget.

Denne inaktivitet fra læserskaren kan meget let tages som et udtryk for manglende interesse. Og så opstår spørgsmålet om hvorvidt det er besværet værd at lave et blad som alligevel ikke bliver læst. Hvis FAMØS' eksistens primært er begrundet i en "Jamen vi bør da have et fagblad!"-holdning, ville det være nærmest pinligt at redaktionsgruppen de sidste tre år har holdt liv i FAMØS og tilmed har forsøgt at forbedre og forny det.

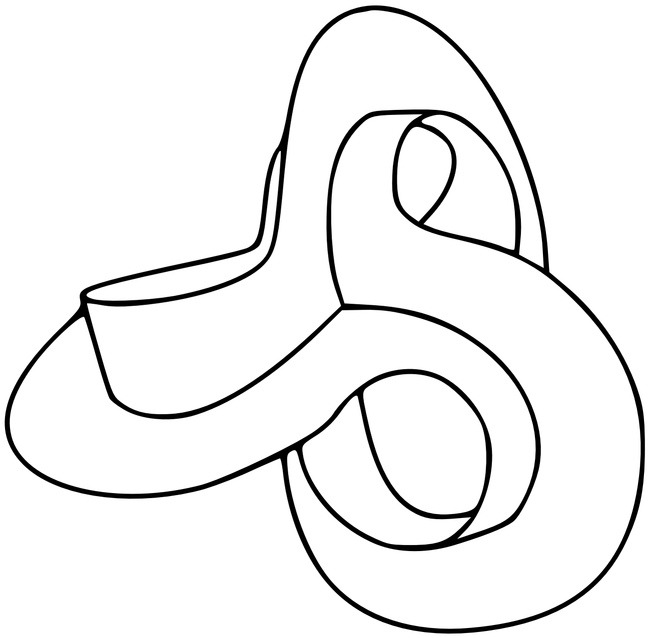
Vi tolker dog ikke inaktiviteten sådan. Vi ved godt at FAMØS har en stor skare af trofaste og tilfredse læsere. Men vi savner stadig opgavebesvarelser og anden form for læseraktivitet. Og vi savner nye studerende i redaktionsgruppen.

Der er kun én i redaktionsgruppen som ikke er ved at være færdig med studiet og som derfor formodentlig forlader FAMØS om et års tid. Så for de fleste af *os* er dette sidste år med FAMØS.

Det er altså ved at være på høje tid at nye studerende optages i redaktionsgruppen. Vi kan lokke med kage og påstå at man bliver bedre til at TEXe, men den primære årsag til at gå ind i redaktionsgruppen bør være noget så romantisk som det strejf af glæde og stolthed man føler når man står med en stak FAMØS der lige er kommet fra HCØ Tryk.

Klip Boy's flade!

Ulrik Buchholtz

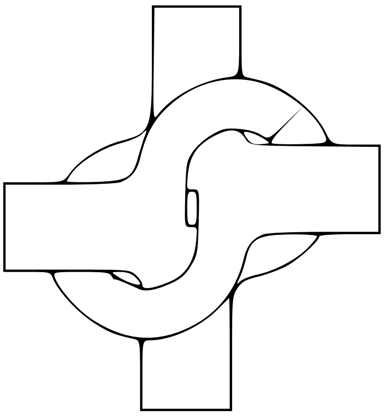


Vi er på FAMØS-redaktionen blevet bestormet med læserhenvendelser! Læserne vil gerne kunne tage krydsogtværsskemaet ud af FAMØS, så de kan kigge på tre sider på én gang: krydsogtværsskemaet og siderne med forklaring af de vandrette og lodrette ord. På redaktionen vil vi gerne gå meget langt for at imødekomme vores læseres ønsker. På den anden side ville det være så ærgerligt, hvis der i FAMØS skulle være tre uudnyttede blanke sider i midterarket. Derfor har vi i dette nummer valgt at bringe en klippeudfigur: Boy's flade fraregnet en disk. Nu bladrer du nok om til midtersiderne, og ser hele fire blanke sider, og hvad er så meningen med det hele? Jo, de tre af dem er bagsider til udklipsark til figuren og er derfor reelt ikke uudnyttede!

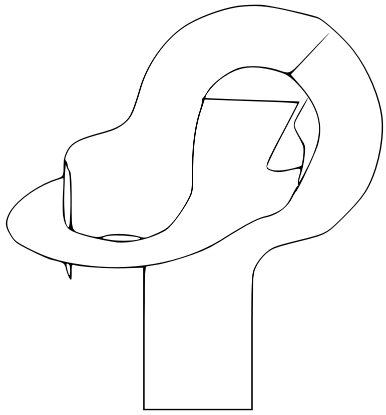
Når nu spørgsmålet om denne artikels eksistensberettigelse er afklaret, tænker du nok: Hvad er Boy's flade? Boy's flade en nedsænkning af den reelle projektive plan, $\mathbb{R}P^2$, i $\mathbb{R}^3$ uden singulariteter. Hilbert formodede at en sådan ikke fandtes og gav en af sine studerende, Werner Boy, til opgave at bevise det. I 1901 opdagede Boy imidlertid, at fladen findes, og den er derfor opkaldt efter ham. Boy kunne dog ikke finde en parametrisering af fladen, og det var der ingen, der kunne før Bernard Morin, der blev blind som seksårig, fandt en i 1978. Flere parametriseringer blev fundet af Morins student, François Apéry, der skrev bogen „Models of the Real Projective Plane."[1]

Nu til klippe-ud-figuren. Det færdige produkt (vist på forrige side) er en model af Boy's flade fraregnet en disk, og er således et möbius med selvgennemskæringer. Figuren samles således[2]:

- Tag de to midterark ud af nærværende produktion og løs krydsogtværsen. Klip eller skær de seks markerede stykker (tre dele med løkker og tre uden) ud af papirerne.
- Skær gennem en løkke i et stykke og link stykket sammen med en anden løkke, som vist (læsere med adgang til en fjerde rumlig dimension kan foretage denne operation uden at ødelægge den første løkke):



- Bring hjørnerne i løkkerne i kontakt med hinanden og fold benene fra den ene løkke ind i den anden løkke og omvendt:



- Link nu den sidste løkke med begge de linkede løkker (igen må man skære i løkken) på en sådan måde, at den fanger de frie ben fra disse. Således bliver den sidste løkkes ben også fanget af de to andre løkker.
- Indsæt lapperne og tilsæt tape på strategiske steder, et voilà: Boy's flade fraregnet en disk!

[1] Læseren henvises i øvrigt til `http://en.wikipedia.org/wiki/Boy's_surface`.

[2] Læsere, der ikke finder denne beskrivelse tilstrækkelig, eller som kunne ønske sig skabelonerne til udskrivning i større skala og på tykkere papir, henvises til `http://www.math.uic.edu/~fields/topology/Boys_surface.html`.

Sommerskole i anvendt matematik

Tarje Bargheer

Hvert år afholder de matematiske afdelinger på universiteterne i Danmark en sommerskole. Dvs. at hvert år har man mulighed for at bruge en uge af sin (meget lange) sommerferie på at lære studerende fra andre universiteter at kende, samtidig med at man lærer noget fræk matematik.

I år var første gang jeg var på sommerskole. Temaet for dette års sommerskole var anvendt matematik. Den matematikuddannelse jeg har moret mig med de seneste år på KU, har været meget abstrakt. Jeg satte derfor afsted mod Syddansk Universitet, hvor sommerskolen skulle holdes, med en vis skepsis. Jeg forventede, at den matematik man arbejder med i erhverslivet ville være uinspirerende, og den matematik jeg har arbejdet med, ud over det jeg lærte på første år, ville være totalt irrelevant for virksomhedernes problemer.

Jeg har ladet mig fortælle, at traditionelt set har formen på sommerskolerne været sådan, at der var nogen forelæsninger i det emne som var temaet for sommerskolen, og derefter har man så fået lov til at boltre sig i opgaver inden for dette emne.

I år var formen noget ændret, fordi Syddansk Universitet samtidig med sommerskolen også afholdt det såkaldte ESGI (European Study Group with Industry), som er en forsamling af forskere, med interesse inden for den anvendte matematik, og repræsentanter for diverse virksomheder, der har et problem af matematisk karakter,de gerne vil have løst. Forskere kan vist godt lide at se, at de gavner noget, og derfor stiller disse forskere deres enorme viden til rådighed for virksomhederne, med henblik på at komme en løsning af deres konkrete problem nærmere. Sommerskolen var i år kædet sammen med ESGI, sådan at vi studerende også fik lov til at give os i kast med virksomhedernes problemer.

Der var fem virksomheder med problemer, som vi kunne arbejde på. Problemerne var typisk noget med at virksomheden havde noget måleapparatur, som de brugte til at give informationer videre til noget andet maskinel. Virksomheden manglede så en tilstrækkeligt sofistikert matematisk model, til at beskrive hvad deres måleapparatur egentlig målte, sådan at de bedre kunne finindstille deres maskiner herefter.

Mit projekt

Det projekt, jeg sammen med hovedparten af os fra KU, valgte at arbejde på, var et mere datalogisk rettet projekt.

Virksomheden var ved at tage patent på et apparatur, der tog et billede af noget, de af patentmæssige grunde ikke kunne fortælle os hvad var. Virksomheden havde således nogle billeder, hvor der var meget baggrundsstøj på. Ikke desto mindre stod det for ens menneskelige øje klart, at der nogle små sorte cirkulære prikker i billedet. Det var så vores opgave at sætte en computer til at tælle hvor mange sådanne prikker der var pr. areal. Det eneste andet fag end matematik, jeg har haft universitet, er filosofi, så jeg valgte dette projekt, da det virkede som det, der var lettest at gå til, når man nu intet kendte til fx fluid dynamik.

På Århus Universitet, har de ligeledes en meget teoretisk uddannelse, hvilket resulterede i at vores projekt blev overrepræsenterede af studerende fra KU og AU. Forskerne fra ESGI, havde vist stort set alle sammen fundet de opgaver, hvor det var klart at man skulle bruge nogle tunge matematiske modeller til at løse problemet.

Da vi havde fordelt os på projekterne, skulle vi så til at finde ud af, hvordan vi ville gribe det an. Vi fik at vide af vores firma, at havde en algoritme der nogenlunde løste problemet; deres problem var bare, at deres algoritme ikke var hurtig nok. Virksomheden bedte os så om at finde på en helt ny algoritme, for at se, om vi kunne komme på noget, der var hurtigere.

Hele vores uge gik altså med at prøve at få designet et program,der kunne løse problemet. Virksomhedens algoritme, brugte mange beregninger på igennem filtreringer at få glattet billedet så meget ud, at baggrundsstøjen forvandt og de kunne finde de ønskede prikker, som fordybninger i billedet.

Vi løste problemet

Vi besluttede i vores gruppe, at prøve på at gå lidt mere simpelt til værks på problemet, og droppe mange af disse tunge filtreringer. I stedet ville vi putte mere fokus på at os frem til at identificere de store sammenhængende prikker i billedet, og skille dem ad der lå tæt på hinanden.

Jeg lavede så sammen med to andre, en algoritme, der identificerede sammenhængende 1-taller i en matrix, bestående af 1- og 0-taller. Andre i vores gruppe, havde så til opgave at bedømme om hver pixel skulle repræsentere en 1-indgang, eller en 0-indgang i matricen, alt efter hvor sort billedet var.

Syddansk Universitet var enormt gode til at tage sig af os. Stort set hver dag arbejdede vi på problemet i ti timer, hvorefter vi fik en fin middag i universitets restaurant. Derefter festede vi, og var sociale indtil alt for sent på natten, taget i betragtning, at vi skulle op og arbejde ti timer næste dag igen.

Slutproduktet for sommerskolen blev at vi fik lavet et program, der fik talt stort set som vi ville gøre med vores menneskelige øje, samtidig med at vores (meget uslebne) program tilsyneladende kørte hurtigere end virksomhedens.

Det var sjovt

Jeg nåede også at få snust lidt til de andre projekter, og selvom det virkede som om at mange brugte modeller for virkeligheden, som jeg aldrig havde arbejdet med før, så stod det dog ofte klart, hvad det var man skulle gøre, når man fx fik oversat noget til differentialgeometrisk sprog.

Den del af opgaven jeg arbejdede med, var som forventet ikke særligt matematisk i sin karakter. Det var dog på ingen måde, så forfærdeligt at arbejde med anvendt matematik, som jeg havde frygtet.

Faktisk var det enormt sjovt at gå og bryde sin hjerne med noget man vidste andre folk ville have glæde af, og jeg tror at det gik op for mig at al abstrakte matematik, jeg har brugt så stor en del af mit liv på, bestemt ikke har været irrelevant. Selvom det rigtig nok kan virke svært at kæde det over på konkrete hverdagsproblemer, gik det vist op for mig, hvad det er vi matematikere b.la. kan bruges til:

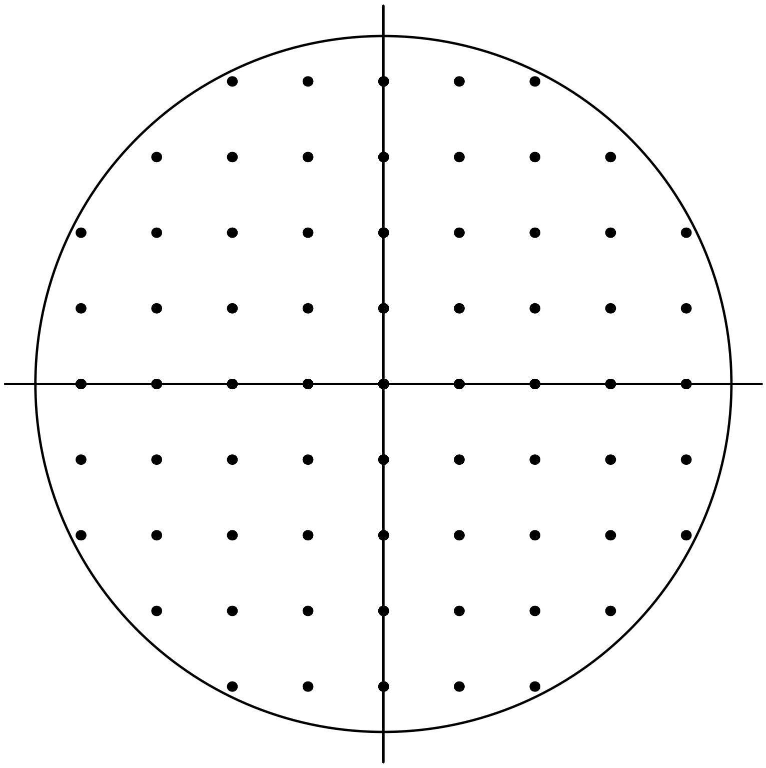
Den typiske ingeniør bruger i sin uddannelse lang tid på at lære en masse matematiske modeller, der passer ind på verden. På den måde bliver de i stand til at klare en hel masse opgaver. De ved simpelthen præcis hvilke formler de skal bruge for at beskrive et givent naturafhængigt system. Noget vi som rene matematikere egentlig aldrig har beskæftiget os med. Derimod har vi brugt næsten en hel uddannelse på at få smidt en ordentlig bunke problemer i hovedet, som vi nøgternt løser ved at forstå problemet så langt til bunds, at også løsningen på problemet til sidst virker klar. Dermed tror lettere at matematikere i forhold til ingeniører kommer på alternative og kreative løsninger af et problem.

Et job i erhversvlivet skræmmer mig således på ingen måde mere. Jeg føler både en lyst til at sætte hænderne ned i virksomhedernes problemer, og det lader til at der rent faktisk er brug for netop mine hænder ude i erhverslivet.

Side 9-sætningen

Taus Brock-Nannestad

Forestil dig, at du står ude i midten af en cirkulær skov med radius $R \geq 1$, hvor træerne er plantet som gitterpunkter i $\mathbb{Z}^2$. Denne figur viser situationen i tilfældet $R = 4.6$:



Alle træerne i skoven har den samme radius r.

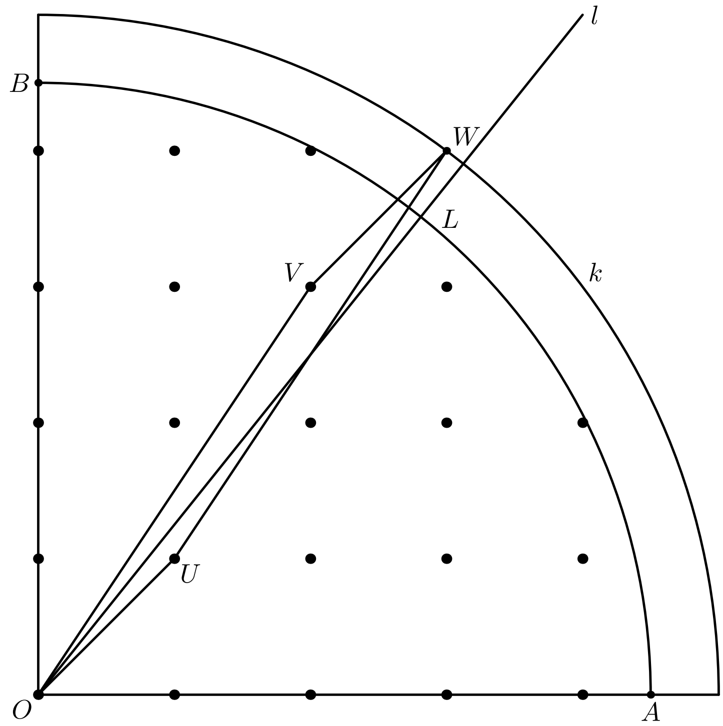
Man kan nu spørge sig selv: Hvor stor en radius skal træerne have for at man ikke længere kan se ud af skoven? Vi kalder denne radius for ρ. Derudover kunne det være rart at vide hvilke retninger man kan kigge ud af skoven i netop tilfældet $r = \rho$. (Vi går ud fra, at en synsstråle der tangerer et træ ikke bliver blokeret af træet). Vi vil nu besvare begge disse spørgsmål.

Side 9-sætningen 1. *Lad $m \in \mathbb{Z}$ være det mindste tal større end R^2, der kan skrives på formen $m = a^2 + b^2$ med $a, b \in \mathbb{Z}$ og $\operatorname{sfd}(a, b) = 1$. Lad k være en cirkel med centrum i origo og radius $\sqrt{m}$. Der gælder så*

1. *Hvis $r > 1/\sqrt{m}$ kan man ikke se ud af skoven.*

2. *Hvis* $r = 1/\sqrt{m}$ *svarer de retninger hvori man kan se ud af skoven til de punkter* (x, y) *på* k *hvor* $\mathrm{sfd}(x, y) = 1$

Før vi går i gang med at bevise dette må vi først lige skabe os et overblik over situationen. Af hensyn til overskueligheden betragter vi kun én enkelt kvadrant af skoven.



Lad A og B være henholdsvis punkterne $(R, 0)$ og $(0, R)$. Lad l være en linie der går gennem origo, og som ikke skærer nogen af de andre gitterpunkter i skoven. Vi kalder skæringspunktet mellem l og skovens kant for L.

Lad U være det gitterpunkt i regionen OAL der ligger tættest på l. Lad tilsvarende V være det punkt i OBL der er tættest på l.

Lad til sidst W være det gitterpunkt der fås ved at rotere O 180 grader omkring midpunktet af UV.

Vi vil nu vise følgende tre resultater:

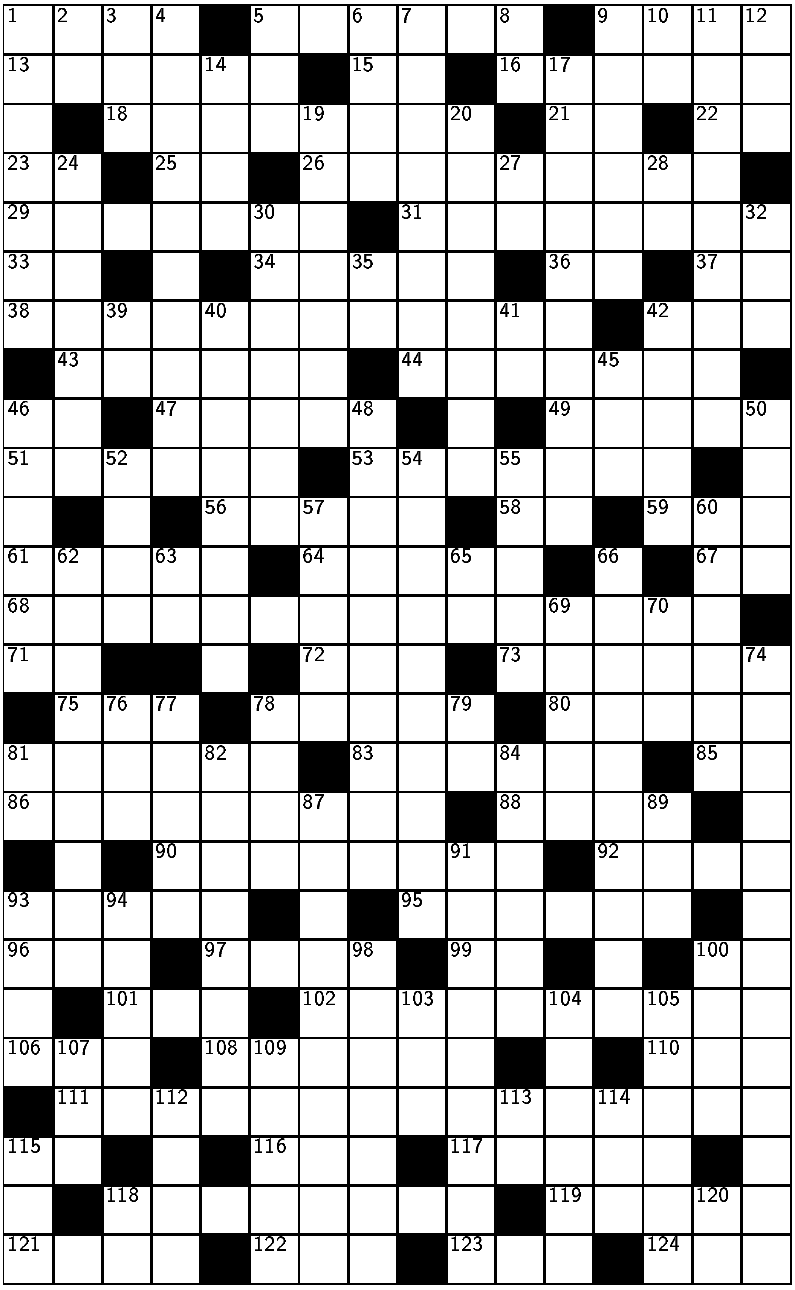
1. Parallelogrammet $OUVW$ har areal 1.
2. Punktet W ligger uden for skoven.
3. Koordinaterne for W er indbyrdes primiske.

Til at vise disse udsagn får vi brug for følgende sætning:

Fortsættes side 19

Efterårskryds

Martin “Damskur” Damhus



Krydsord side 22 og 23

Sætning 2. *Arealet af en simpel polygon hvor alle hjørner ligger på gitterpunkter er givet ved udtrykket $A = i + b/2 - 1$, hvor i er antallet af indre gitterpunkter, og b er antallet af gitterpunkter på polygonens omkreds.*

Beviset for dette elegante resultat gemmer vi til en anden god gang.

1. Antag, at trekanten OUV indeholder et gitterpunkt M forskelligt fra dets hjørner. Punktet M kan ikke ligge på l, eftersom vi antog, at l undgik ethvert gitterpunkt i skoven. Hvis M tilhører OAL så er M et gitterpunkt der ligger tættere på l end U, og dette strider mod vores oprindelige antagelse. Tilsvarende kan M ikke tilhøre OBL, og vores oprindelige antagelse må derfor være forkert. De eneste gitterpunkter i OUV er således hjørnerne, og vi kan derfor udfra Pick's sætning konkludere at OUV har areal $1/2$. Hele parallelogrammet må således have areal 1.

2. Antag nu, at W ligger i skoven. Som før kan W ikke ligge på l, da l kun skærer ét enkelt punkt i skoven, nemlig O. Hvis W tilhører OBL, så ligger punktet W ligger mellem V og skæringspunktet mellem l og forlængelsen af VW. Hvis punktet W tilhører OBL må det derfor ligge tættere på l end V, og dette er igen en modstrid. Tilsvarende kan W ikke ligge i OAL, og vi kan derfor konkludere at punktet W må ligge uden for skoven.

3. Antag at $W = (a, b)$ samt at disse to tal har største fælles divisor $d > 1$. Punktet $(a/d, b/d)$ tilhører trekanten OUV og er forskelligt fra trekantens hjørner. Men dette strider mod vores tidligere resultat om trekantens areal. Vores antagelse må derfor være forkert, og vi kan derfor konkludere, at koordinaterne for W er indbyrdes primiske.

Udfra 2) og 3) kan vi konkludere, at $|OW| \geq \sqrt{m}$. Eftersom $OUVW$ har areal 1 kan vi således konkludere, at afstanden fra punkterne U og V til OV ikke kan være større end $1/\sqrt{m}$. Der gælder lighed hvis W ligger på cirklen k. Hvis W ikke ligger på l, så er enten punktet U eller punktet V tættere på l end det er på linien OW. Alt i alt betyder det, at:

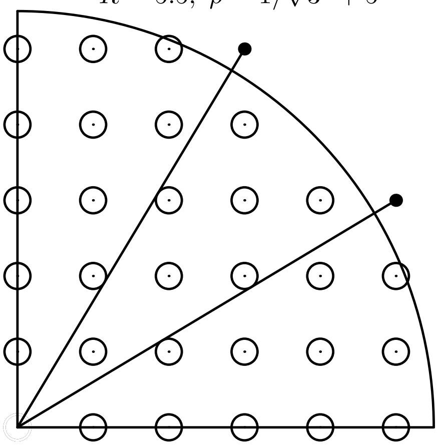
- når $r > 1/\sqrt{m}$ vil enhver linie l blive blokeret af et træ.
- når $r = 1/\sqrt{m}$ vil enhver linie l, som skærer k i et punkt hvis koordinater ikke er indbyrdes primiske, blive blokeret af et træ.

Lad C være et gitterpunkt med indbyrdes primiske koordinater der ligger på cirklen k. Lad N være et gitterpunkt i skoven med ikke-negative koordinater. Eftersom koordinaterne til C er indbyrdes primiske ligger der ikke nogen gitterpunkter på linien OC. Punkterne O, C og M udgør nu hjørnerne på en trekant, og ifølge Picks sætning må denne have et areal større end eller lig med $1/2$. Eftersom $|OC| = \sqrt{m}$ må afstanden mellem M og l være større end $1/\sqrt{m}$, og i tilfældet $r = 1/\sqrt{m}$ vil linien l således ikke være blokeret af et træ i skoven.

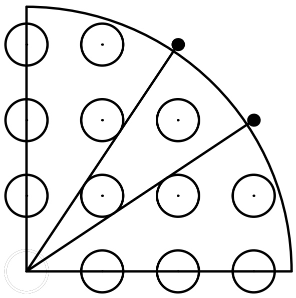
Vi har hermed vist begge de ønskede resultater. Man kan bemærke, at i tilfældet $R \in \mathbb{Z}$ er $\rho = 1/\sqrt{R^2+1}$. Resultatet er således mere interessant hvis R ikke er et heltal.

Til sidst kan vi illustrere sætningen for forskellige værdier af R:

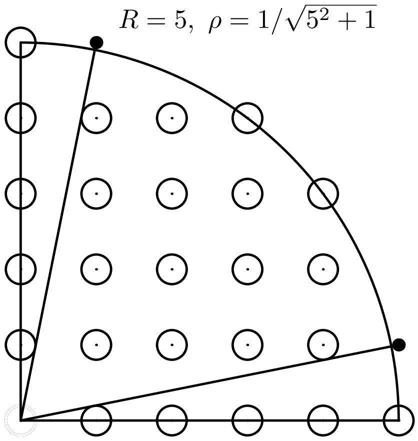
$R = 5.5,\ \rho = 1/\sqrt{3^2+5^2}$



$R = 3.5,\ \rho = 1/\sqrt{2^2+3^2}$



$R = 5,\ \rho = 1/\sqrt{5^2+1}$



Opgaver

Tarje Bargheer

Sune Precht Reeh, en af vores nystartede russer, har fundet en sjov funktion. Med Sunes godkendelse, har vi her i FAMØS fået lov at bringe en lettere modificeret version af Sunes funktion, denne gang bare på præmieopgaveform:

Givet en endelig mængde $\Omega := \{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$; find en (ikke nødvendigvis alle steds kontinuert) funktion, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, således at f er differentiabel netop på Ω; altså find en funktion således at grænseværdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

eksisterer for $x_i \in \Omega$, og grænseværdien ikke eksisterer for $x_i \notin \Omega$.

Som altid er det en Mystisk Flaske man kan vinde!

Skal 04.0.01 hedde 04.0.01?

Sara Arklint

– Hvorfor hedder vores studenterkøkken S01?
– Det hedder det fordi det er lokale ES01, nu 04.0.01.
– Men hvorfor hedder fysikernes Det Absolutte Rum så ikke også S01 når nu det ligger i lokalet DS01, nu formodentlig 03.0.01?

Konkurrence

Find på et navn til studenterkøkkenet! FAMØS udlover en præmie. Send dit forslag til `famos@math.ku.dk` inden fredag d. 2. december.

Til inspiration:

- Køkkenet tidligere kendt som S01
- Underrummet
- Det tomme køkken
- Eks-S01 (forkortes ES01 og udtales S01)

Vandret:

1: Disney-figur
2: Elektroder
3: Husgeråd
13: Gudinde
15: Blødt sølvhvidt metal med atomnummer 3
16: Lektie
18: Fra Filippinerne
21: Internetadresse-endelse for iranske hjemmesider
22: **: Antal ravne Odin benytter som informationsindsamlere
23: Danmark
25: Apparat
26: Ofring af 100 dyr
29: Undersøgelse
31: Gambling-spil
33: Sy
34: Rødhåret havfrue
36: Indium (atomnummer 49)
37: Romer-svar på regnestykket I+III
38: Kognitiv proces, hvori ny-erfarede kendsgerninger relateres til allerede kendte
42: Dokument
43: Streng
44: Og da slet ikke
46: Dvs.
47: Flothed og effekt
49: Forbinde elementer i to mængder således at en bijektion opstår
51: Bæreevne
53: Stærkt smagende græsk hvidvin med tusindårig tradition
56: Hig
58: ** Salvador: Mellemamerikansk land, der fik uafhængighed fra Spanien i 1821
59: Venlig
61: *****-Jacobsen: Dansk filminstruktør, musiker og sangskriver
64: Dr. *****: Nigeriansk-født DJ, musiker og producer
67: Polynesisk regngud
68: Trafikusikre personager
71: Landekode for Eritrea
72: ***-mousse: Lækker fiske-forret
73: Udelukkende
75: Mýrdalsjökull er et islandsk eksempel på en sådan is-formation
78: Skræmt
80: Romersk gud for underverdenen
81: Blødt stof
83: Sanskrit-ord i hinduisme og buddhisme, der primært anvendes med betydningen „kosmos' beskaffenhed“
85: Paramilitær organisation tilknyttet NSDAP („brunskjorterne“)
86: Kim Jong-Il, søn af Kim Il-Sung, har regeret landet ********* siden 1994
88: Længere vandretur med naturoplevelser som mål
90: Musikudtryk
92: Antager
93: Orienten
95: Fra Middelhavsregionen
96: Underlegen dansk læreanstalt
97: **** V: Konge af Norge 1957–1991
99: Engelsk benægtelse
100: Retning
101: Musikalsk grundkursus
102: Berømt
106: Diktator og bagmand bag bl.a. kulturrevolutionen
108: Ildevarslende
110: Dom, fx over serv i tennis, badminton eller squash
111: Ulykkeligheds-indikator
115: Cæsium
116: Pedro *** Ospina: Columbiansk general, der også fungerede som president for Columbia 1922–1926
117: Kystvækst med gule blomster
118: Afsatte
119: Oldnordisk mytologi-dværg, bror til Fafner og Odder, søn af Reidmar
121: Melodisk figur (i rytmisk musik)
122: Sportsudstyr
123: Lydord, der signalerer tøvende enighed
124: Stjæl

Lodret:

1: Krater formet ved vulkansk kollaps
2: ** hej: fart på
3: Fugl
4: Hævder
5: Tre ens
6: Hydrofob væske
7: ******** mængder har kun isolerede punkter
8: By
9: Fagordet
10: Strøm
11: Skønhedselsker
12: Forkortelse i satellit-sprogbrug for geostationært omløb
14: Haveredskab
17: Musikalsk hobby
19: Pigenavn
20: Almindeligt forekommende mineral ($Al_2Si_2O_5(OH)_4$), der benyttes i bl.a. keramik, medicin, papir, mursten, tandpasta, kosttilskud og kosmetik
24: Signaleret
27: Kinesisk-mongolsk folkefærd („de hvide mongoler“) samt romansk uformel anden-person ental
28: Dansk dagblad
30: Behandlet
32: Obligatorisk dagsordenpunkt
35: **-telefoni: Transmission af lyd over internettet
39: For tiden
40: Transportmiddel
41: Spids
42: Landmand
45: *** Kiming: Professor
46: Redskab
48: Fanget i slaveri (som en anden datalog eller statistiker)
50: Bibeltekstforfatter
52: ****-dynastiet: Mongolsk-blodet dynasti, der i 1271–1368 regerede Kina, Det Mongolske Kejserrige, Korea samt dele af Mellemøsten
54: Hermann ********** (1850–1909): Tysk psykolog, der bl.a. studerede hukommelse og lancerede „glemselskurven“
55: Ikke åndsfrisk
57: Dreadlocks med religiøs symbolsk betydning
60: Romersk guldmønt
62: Planteslægt
63: Grundstof, atomnummer 64
65: Et **.: Og andre
66: Tiltrækkende
69: Land
70: Og så videre
74: Informationssikring
76: Styreredskab
77: Justere
78: Kun
79: **: Akronym for Eusko Alkartasuna, baskisk regionalt parti
81: Fransk højreparti grundlagt i 1972 og stadig anført af Jean-Marie Le Pen
82: Tinte af bændelorm i fx menneske- eller dyreorgan
84: Græsk rejsemål
87: Gøre gyldig igen
89: Enhed, der er lig 0,1 mikrojoule (µJ)
91: Særdeles brugt
93: Væskeansamling
94: Svulst
98: Krydderi, oprindeligt bragt til Europa fra Mexico og Columbia af spanske conquistadors. Coca-Cola er største aftager af dette krydderi på verdensmarkedet
100: Halvø
103: Smøleri
104: Bibelsk kvinde
105: Tårnanlæg af fritstående sten på Sardinien, de fleste opført i bronzealderen
107: Top af kornstrå
109: Claude ***** (1840–1926): Fransk impressionist
112: Carl **** (1895–1982): Tysk komponist
113: ** passant: Skaktræk
114: Smyge
115: Nummer, der entydigt identificerer personer i Det Centrale Personregister
118: Efterfølger til Kul- og Stålunionen
120: International farmakologisk enhed

Stanislaw Ulam: Topologi, funktionalanalyse og brintbomber

Sara Arklint

I anledning af 60-året for Hiroshima og Nagasaki starter FAMØS*' nye artikelserie om krigsmatematikere med den polske matematiker Stanislaw Ulam (1909–1984). Det var nemlig Ulam der i Los Alamos fandt ud af hvordan man startede fusionsprocessen i en brintbombe.*
For en matematiker er det interessante ved Ulam dog især de matematikere han samarbejdede med.

Blandt matematikere kendes Stanislaw Ulam nok bedst for *Borsuk-Ulam*. Det er et topologisk resultat som siger at en kontinuert afbildning $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ fra n-sfæren vil opfylde $f(x) = f(-x)$ for et $x \in S^n$. Som navnet antyder, deler Ulam æren for resultatet med en anden polsk matematiker Karol Borsuk.

Topologi og algebraisk topologi er på det nærmeste født i Polen, og Borsuk er med sit arbejde med bl.a. retrakte at regne blandt fædrene. Borsuk og Ulam begyndte at samarbejde i forbindelse med et af Borsuks besøg til universitetet i Lvov, og Borsuk indgik således i det matematiske miljø på *Café Szkocka* (Den Skotske Café) som denne artikels fokus vil være på.

Stefan Banach

Stanislaw Ulam er født i 1909 i byen Lvov som dengang var en del af Polen men som nu ligger i Ukraine.

Eftersom Ulam var med til at udvikle brintbomben i Los Alamos, New Mexico, i 1940'erne, kommer det nok ikke som en overraskelse for læseren at Ulam interesserede sig for fysik.

Da Ulam som 16-årig begyndte at studere matematik, var det faktisk udelukkende for at kunne forstå Einsteins specielle relativitetsteori. Ulam fortsatte dog med matematikken, og fik sin PhD-grad i 1933. Hans vejleder på universitetet i Lvov var Stefan Banach (1892–1945).

Navnet Banach kendes fra sætninger som *Hahn-Banch*, *Banachs fikspunktssætning* og *Banach-Tarskis paradoks*. Banach-Tarskis paradoks – som udelukkende er et paradoks af navn – postulerer at en grapefrugt kan skæres ud i et endeligt antal stykker som kan samles til to grapefrugter med samme størrelse som den oprindelige grapefrugt. Da Banach og Tarski beviste sætningen i 1924, brugte de udvalgsaksiomet til at opdele kuglen i seks stykker som ikke alle var målbare.

Banach og Ulam har vist flere resultater inden for målteori, men Banach er især kendt for sit arbejde i funktionalanalysen.

Funktionalanalyse er meget løst sagt studiet af kontinuerte lineære afbildninger, kaldet begrænsede operatorer, mellem normerede rum. De fleste resultater gælder kun for rum som er fuldstændige med hensyn til den af normen inducerede topologi; denne type rum blev sidenhen kaldt banachrum.

Funktionalanalyse har en central plads på Københavns Universitet, og Ulam har sammen med Banach bidraget til funktionalanalysen.

Om Banach kan desuden nævnes at han arbejdede bedst i støj, og at han derfor tilbragte det meste af sin tid på caféer. Og man kan faktisk roligt sige at funktionalanalysen opstod på en café, nemlig *Café Szkocka*.

Café Szkocka

På Café Szkocka mødtes flere matematikere jævnligt for at drikke øl og diskutere matematik. Ulams vejleder Stefan Banach udgjorde sammen med Stanislaw Mazur (1905–1981) kernen i denne gruppe.

De fik eftersigende sjældent bevist noget når de sad og drak til langt ud på natten, men de fik mange idéer til beviser. Banach noterede sig ofte disse idéer og formåede altid at fuldføre beviserne den efterfølgende dag.

Ulam var en del af dette miljø, og det var her og på denne måde både funktionalanalyse og en del (algebraisk) topologi opstod.

I løbet af de små ti år alt dette stod på, blev der stillet flere hundrede åbne spørgsmål, og disse spørgsmål blev skrevet ned i en bog som værten på Café Szkocka opbevarede. Ud for spørgsmålet blev det eventuelt noteret hvad stilleren udlovede som præmie for en besvarelse. Sobolev har fx udlovet en flaske vin, og en anden har udlovet et kilogram bacon. Steinhaus spurgte til eksistensen af en frekvens, og udlovede ethundrede gram kaviar for en egentlig konstruktion af frekvensen, en letøl for bevis for eksistens, og en halv kop kaffe for et modeksempel. Og John von Neumann (1903–1957) har på et tidspunkt udlovet en flaske whisky med mål strengt større end nul.

En levende gås

I 1936 stillede Mazur spørgsmålet om hvorvidt et seperabelt banachrum altid vil have en schauderbasis. En schauderbasis for et banachrum er en mængde vektorer med egenskaber tilsvarende dem en ortonormalbasis for et hilbertrum har.

For besvarelsen af spørgsmålet om eksistens af schauderbaser havde Mazur udlovet en levende gås. Først i 1972 kom en svensker ved navn Per Enflo med et eksempel på et seperabelt banachrum som ikke har en schauderbasis. Da Enflo ved en forelæsning i Warszawa præsenterede sit resultat, overrakte Mazur ham en levende gås som lovet.

Mazur kendes bl.a. fra Gelfand-Mazur, et resultat fra studiet af banachalgebraer. En banachalgebra er et banachrum udstyret med en multiplikation der opfører sig pænt ifht. rummets norm, og et typisk eksempel på en banachalgebra er de begrænsede operatorer på et banachrum. Gelfand-Mazur siger at hvis en banachalgebra er et legeme, er banachalgebraen blot de komplekse tal.

Gelfand, der som navnet antyder også har en del af æren for Gelfand-Mazur, havde ligesom Banach, Steinhaus, Ulam, Mazur, von Neumann, Sobolev og Schauder sin gang på Café Szkocka.

Den matematiske aktivitet på Café Szkocka ophørte dog mere eller mindre da tyskerne besatte Lvov i juni 1941. Hvis man ville forebygge en opstand, var det åbenbart en tommelfingerregel at man skulle holde akademikerne under kontrol, gerne ved enten at fængsle eller dræbe dem.

I Los Alamos

Siden 1935 havde Ulam dog jævnligt været i USA, bl.a. under invitation fra von Neumann, og i 1939 valgte Ulam fornuftigt nok at blive i USA. Von Neumann regnes ligesom Banach og Mazur for at være en af funktionalanalysens fædre, og navnet von Neumann kendes bl.a. fra begrebet von Neumann-algebra. Von Neumann er dog også kendt inden for datalogi og fysik.

Von Neumann var bl.a. tilknyttet laboratoriet i Los Alamos, New Mexico, hvor man forskede i udviklingen af brintbomben. Og i 1943 fik von Neumann Ulam draget ind i projektet.

Som nævnt i manchetten løste Ulam problemet med at få brintbomben til at virke. *So in a way it was the mathematicians who won the war*, som Jesper Michael Møller sagde ved en forelæsning i Algebraisk Topologi.

Efter Los Alamos

I 1946 fik Ulam hjernebetændelse, men han vedblev med at lave matematik. Bl.a. udviklede han Monte Carlo-metoden som bruges til bl.a. numerisk løsning af integraler.

Stanislaw Ulam døde i New Mexico i 1984. Han havde været med til at udvikle atombomben. Og vigtigere endnu havde han under sin tid i Polen indgået i det matematiske miljø på Café Szkocka, og han havde altså været med da både topologi og funktionalanalyse opstod.

Kilder:

MacTutor: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk`
Mauldin: *The Scottish Café*
(Bogen med de åbne spørgsmål fra Café Szkocka. Står på institutbiblioteket.)

Fraskrivelse af ansvar:

Der tages forbehold for fejl.
Der gøres desuden opmærksom på at forfatteren er algebraiker.

FAMØS oktober 2005.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-,
Økonomi- og Statistikstuderende ved
Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:
Sara Arklint (ansvh.)
Tarje Bargheer
Taus Brock-Nannestad
Ulrik Buchholtz

Tegner:
Stefano Pane

Deadline for næste nummer:
Fredag den 2. december 2005

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til `famos@math.ku.dk` – meget gerne
skrevet i LaTeX.

FAMØS er et internt fagblad.

Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk
Oplag: 500 stk.
ISSN 1395-2145

Puzzles

Her på FAMØS-redaktionen er vi med på noderne, og vi har derfor besluttet at gøre som alle de andre kulørte blade og bringe et af de nymodens sudoku-puzzles. Imidlertid har en luskende snigetyv været inde i vores tophemmelige puzzle-lager og har fjernet både puzzle og løsning. Det eneste der tilbage er et tomt sudoku-kvadrat hvor et ukendt redaktionsmedlem i et anfald af kedsomhed har fyldt en række større-end tegn ind. Kan I hjælpe os med at genskabe den oprindelige løsning?

Reglerne er som i et almindeligt sudoku-puzzle, d.v.s. hver række, hver søjle og hvert 3×3-kvadrat skal indeholde tallene $1, \ldots, 9$ uden gentagelser. Derudover angiver et større-end tegn hvilket forhold der er mellem de celler det knytter sig til.

Husk at præmien er en Mystisk Flaske!