FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

18. årgang, nr. 4, maj 2005

Indhold

Hvad forsker jeg i

Søren Eilers

Klassifikation af skiftrum

Et skiftrum over et endeligt alfabet $\mathfrak{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ er en delmængde $\underline{\mathsf{X}}$ af $\mathfrak{a}^{\mathbb{Z}}$ som er lukket i produkttopologien induceret af den diskrete topologi på $\mathfrak{a}$ og under skiftafbildningen

$$\sigma : \mathfrak{a}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathfrak{a}^{\mathbb{Z}} \qquad \sigma((a_n)) = (a_{n+1}).$$

Eftersom σ er en homøomorfi af $\underline{\mathsf{X}}$ på sig selv kan vi tænke på $(\underline{\mathsf{X}}, \sigma)$ som et meget simpelt dynamisk system, og sådanne skiftrum har haft stor betydning i teorien for dynamiske systemer som særligt tilgængelige modeller for mere komplekse systemer. For eksempel spillede de en stor rolle i at vise at et trelegemeproblem (som fx bevægelsen af en lille planet i et dobbeltsolsystem) altid har regioner med kaotisk bevægelse.

Eksempel 1. *Lad* $\mathfrak{a} = \{0, 1\}$. *Et skiftrum i* $\mathfrak{a}^{\mathbb{Z}}$ *defineres ved*

$$\{(a_n) \mid \forall N : a_N a_{N+1} \neq 11\}$$

Dette skiftrum indeholder alle elementer der som

$$\cdots 000100100010101000010000100001000101010 \cdots \tag{1}$$

ikke indeholder delordet "11".

På trods af deres simple udseende udgør skiftrummene en meget stor og generel klasse med fascinerende og righoldig intern struktur, og fordi skiftrummene er givet på så konkret vis kan man stille og besvare spørgsmål om dem der ville være umulige for generelle dynamiske systemer. Fx kan man vove sig ud i spørgsmålet om **klassifikation** af dem... altså i spørgsmålet om hvordan man bærer sig ad med at se på to sådanne skiftrum om de er ens eller forskellige. Jeg er blevet ledt til at interessere mig for dette spørgsmål lidt ad omveje gennem et kontaktpunkt med mit hovedforskningsfelt, operatoralgebraen.

Inden man går i gang med at klassificere må man naturligvis afklare hvad man mener med "ens" og "forskellig". Det fundamentale lighedsbegreb i denne sammenhæng er

Definition 1. To skiftrum $(\underline{\mathsf{X}}, \sigma)$ og $(\underline{\mathsf{Y}}, \sigma)$ kaldes *konjugerede* hvis der findes en homøomorfi $\phi : \underline{\mathsf{X}} \longrightarrow \underline{\mathsf{Y}}$ med egenskaben $\phi \circ \sigma = \sigma \circ \phi$.

De to rum skal altså være ens topologisk set, på en sådan måde at skiftstrukturen bevares. Denne form for lighed er imidlertid i mange sammenhænge ret restriktiv, og man ser derfor i stedet på en bred vifte af svagere begreber. Jeg vil her nøjes med at indføre

Definition 2. Sæt
$$S\underline{\mathsf{X}} = (\underline{\mathsf{X}} \times \mathbb{R})/\sim$$
med ækvivalensrelationen genereret af kravet $(x, t+1) \sim (\sigma(x), t)$ og udstyret med kvotienttopologi. To skiftrum $(\underline{\mathsf{X}}, \sigma)$ og $(\underline{\mathsf{Y}}, \sigma)$ kaldes *strømningsækvivalente* (eng.: flow equivalent) hvis der findes en homøomorfi $F : S\underline{\mathsf{X}} \longrightarrow S\underline{\mathsf{Y}}$ med egenskaben at der for hvert $x \in S\underline{\mathsf{X}}$ findes en voksende afbildning $f_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ så at
$$F(\phi_t(x)) = \phi_{f_x(t)}(F(x)).$$
hvor $\phi_t([x, s]) = [x, s + t]$.

Løst sagt er $S\underline{\mathsf{X}}$ en kontinuisering af $\underline{\mathsf{X}}$, og strømningsækvivalens betyder at kontinuiseringerne er ens på en retningsbevarende måde. Den komplicerede definition til trods er strømningsækvivalens et ret naturligt begreb, hvilket bedst af alt ses ved følgende observation:

Proposition 1. *Strømningsækvivalens er ækvivalensrelationen genereret af konjugerethed og*
$$(\underline{\mathsf{X}}, \sigma) \sim (\underline{\mathsf{X}}^{a\star}, \sigma)$$
hvor $a \in \mathfrak{a}$ og $\underline{\mathsf{X}}^{a\star}$ er defineret ved at i hvert $x \in \underline{\mathsf{X}}$ erstatte enhver forekomst af "a" med "$a\star$".

Et element som det givet i (1) vil således give anledning til et element
$$\cdots 0001{\star}001{\star}0001{\star}01{\star}01{\star}00001{\star}00001{\star}00001{\star}0001{\star}01{\star}01{\star}01{\star}0 \cdots$$
i $\underline{\mathsf{X}}^{1\star}$, der er et skiftrum i alfabetet $\{0, 1, \star\}$. Det er rimeligt at tænke på strømningsækvivalens som frembragt af konjugerethed og "forsinkelser".

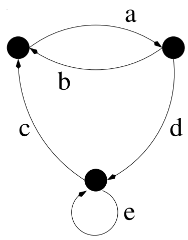
En effektiv måde at specificere et skiftrum er ved at angive en samling af forbudte ord som vi gjorde i Eksempel 1. Det generiske skiftrum kan imidlertid kun specificeres med en uendelig familie af forbudte ord, så klassifikationsspørgsmålet er derfor særligt interessant i de specielle tilfælde hvor skiftrummet kan specificeres ved en endelig datamængde, sådan som vi i Eksempel 1 kunne nøjes med at specificere at "11" var ulovligt. I sådanne tilfælde kan man ligefrem håbe på at der findes en algoritme der ud fra specifikationerne af to skiftrum kan afgøre om de er ens eller forskellige.

Imidlertid er det ukendt om en sådan algoritme eksisterer selv hvad angår konjugerethed af de særligt simple skiftrum *af endelig type*. Sådan benævner man de skiftrum der beskrives ud fra en matrix med indgange i $\mathbb{N}_0$ på følgende vis. Ud fra $n \times n$-matricen A dannes en orienteret graf med n knuder ved at der afsættes a_{ij} kanter fra knude i til knude j for hvert par $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Vi benytter herefter mængden af kanter som alfabet og definerer skiftrummet $\underline{\mathsf{X}}_A$ som mængden af dobbelt uendelige omvandringer på grafen.

Eksempel 2. *Har vi matricen*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og navngiver kanterne som på



får vi et skiftrum over alfabetet $\{a, b, c, d, e\}$ *som fx har elementet*

$$\cdots ababadeeecadcadecababadeeec \cdots$$

Opgave 1. Vis, at skiftrummene i Eksempel 1 og 2 er konjugerede.

Williams viste

Sætning 1. *Lad* A *og* B *være matricer som herover. De to skiftrum* $\underline{\mathsf{X}}_A$ *og* $\underline{\mathsf{X}}_B$ *er konjugerede hvis der findes* $C_0, \ldots, C_l$ *med*

$$A = C_0 \sim C_1 \sim C_2 \sim \cdots \sim C_l = B.$$

hvor relationen $C \sim C'$ *er givet ved*

$$\begin{gathered} \exists D \in \mathbf{M}_n^m(\mathbb{N}_0), E \in \mathbf{M}_m^n(\mathbb{N}_0) : \\ C = DE, C' = ED, \end{gathered}$$

Generelt kan man ikke sige noget om længden l af sådan en kæde eller om størrelsen af de indgående matricer $C_1, \ldots, C_{l-1}$ — bemærk at D og E ikke behøver at være kvadratiske — så det er ikke kendt om denne relation er generelt afgørlig i den forstand at der kan gives algoritmer som beskrevet herover. Der var længe håb om at konjugererethed var det samme som en egenskab benævnt *svag skiftækvivalens* som ved hjælp af de såkaldte dimensionsgrupper faktisk er kendt at være afgørlig. Men indenfor de sidste år er der fremkommet eksempler der viser at dette ikke er tilfældet.

Holder man sig til strømningsækvivalens er billedet meget simplere:

Sætning 2. *Lad A og B være irreducible matricer. De to skiftrum $\underline{\mathsf{X}}_A$ og $\underline{\mathsf{X}}_B$ er strømningsækvivalente hvis*

$$\mathbb{Z}^n / [(\mathrm{id} - A)\mathbb{Z}^n] \simeq \mathbb{Z}^m / [(\mathrm{id} - B)\mathbb{Z}^m] \tag{2}$$

og

$$\det(\mathrm{id} - A) = \det(\mathrm{id} - B)$$

Det er let at på algoritmisk vis afgøre hvorvidt de endeligt frembragte grupper i (2) er isomorfe eller ej. De er jo endeligt frembragte.

Substitutionssystemer

Der er andre måder at generere skiftrum ud fra endelige datamængder på. En metode som jeg har interesseret mig ret intensivt for er ved hjælp af *substitutioner.* Det endelige data er i dette tilfælde en afbildning τ som til hvert bogstav i alfabetet $\mathfrak{a}$ knytter et ord skrevet med bogstaver fra $\mathfrak{a}$. Idet vi benævner ord skrevet med bogstaver fra $\mathfrak{a}$ med $\mathfrak{a}^\sharp$ og det tomme ord med ϵ vil vi koncentrere os om afbildninger

$$\tau : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}^\sharp \backslash \{\epsilon\}.$$

Bemærk at vi ved at sammensætte ord kan definere

$$\tau^N : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}^\sharp \backslash \{\epsilon\}$$

for ethvert N og derefter definere et skiftrum

$$\underline{\mathsf{X}}_\tau = \{(a_n) \in \mathfrak{a}^\mathbb{Z} \mid \forall N \exists M : a_{-N} \dots a_N \text{ er et delord af } \tau^M(c)\}$$

Her er c et fastholdt bogstav i alfabetet, og for at sikre at $\underline{\mathsf{X}}_\tau$ ikke afhænger af valget af c, kræver man at substitutionen har den egenskab der kaldes *primitiv,* og som jeg ikke vil skrive ud her.

Eksempel 3. *Substitutionen*

$$\tau(1) = 12 \qquad \tau(2) = 13 \qquad \tau(3) = 123$$

er primitiv og i $\underline{\mathsf{X}}_\tau$ er der fx et element

$$\cdots 1213121231213121312312131212312131212312131 23\cdots$$

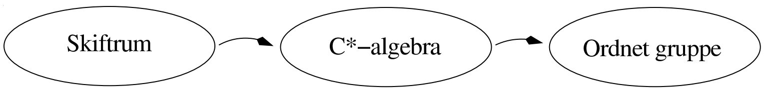
Man ser nemt at disse skiftrum kun kan være konjugerede eller strømningsækvivalente med skift af endelig type hvis de i en vis forstand er degenererede. Faktisk kan man sige at det eneste disse skiftrum har til fælles med dem af endelig type er den endelige præsentation der gør dem interessante i klassifikationssammenhæng.

Klassifikationsspørgsmålet for sådanne skiftrum er temmelig åbent på nuværende tidspunkt. Det mest fundamentale problem er at det er svært at pege på så mange og tilstrækkeligt fintfølende værktøjer at man kan begynde at håbe på at de kan benyttes til at løse opgaven på samme måde som grupperne i (2) løste det for strømningsækvivalens og dimensionsgrupperne løste det for svag skiftækvivalens.

I et projekt med Toke Meier Carlsen lykkedes det os at definere nye invarianter for substitutionssystemer op til strømningsækvivalens ved at inddrage operatoralgebraer, funktionalanalytiske objekter der *a priori* har meget lidt at gøre med skiftrum. Det er et meget interessant projekt for mig at undersøge hvor langt denne nye invariant i samspil med tidligere kendte invaraianter rækker i forhold til at afgrænse strømningsækvivalensklassere for substitutionssystemer og andre systemer

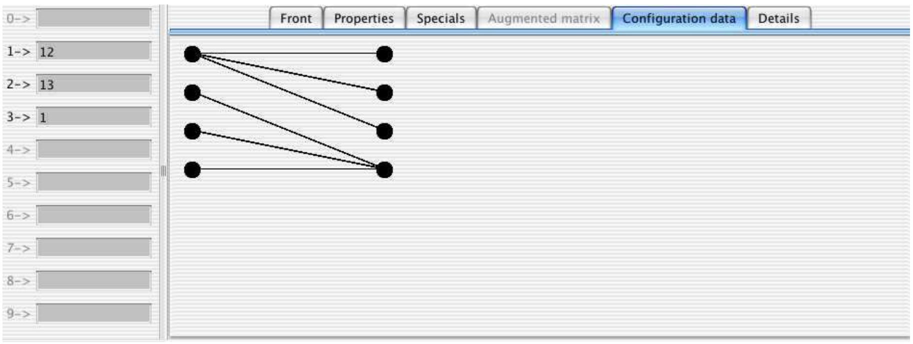
Da dette projekt kun er i sin vorden vil jeg i stedet afslutte med at skitsere hvordan metoder fra operatoralgebra kan spille en rolle her. Dette er på ingen måde et isoleret fænomen – tværtimod tegner der sig et ret generelt billede af at de invarianter man ret naturligt kommer frem til ad denne (om)vej er værdifulde for og svære at udlede direkte fra skiftrumsteorien. Fx var operatoralgebraiske metoder vigtige ved indførslen af de ovenfor nævnte dimensionsgrupper.

Vores invariant er en ordnet gruppe, dvs. en abelsk gruppe udstyret med en samling af positive elementer. Vi knytter ordnede grupper til substitutioner i de to trin



Første trin er en konstruktion indført af Kengo Matsumoto som til ethvert skiftrum knytter en C^*-algebra, altså en mængde af operatorer på et hilbertrum der er lukket under de naturlige operationer. Det er essentielt for konstruktionen at vide at to strømningsækvivalente skiftrum giver det der kaldes stabilt isomorfe C^*-algebraer, og dette resultat bør i den relevante kontekst tilskrives Toke Meier Carlsen. Det andet trin er at benytte den såkaldte K-funktor på den resulterende C^*-algebra, der til enhver C^*-algebra knytter en ordet abelsk gruppe, igen på invariant vis.

Målet med mit projekt med Toke Meier Carlsen var simpelthen at identificere denne sammensatte afbildning. Dette viste sig at være så teknisk krævende at vore resultater måtte deles op i fire artikler, blandt andet fordi vi undervejs erkendte behovet af at give en fuldkommen algoritmisk beskrivelse af afbildningen, således at vi kunne skrive et computerprogram til at beregne en matrix der beskriver den ordnede gruppe ud fra den valgte substitution. Ved hjælp af programmet kunne vi sidenhen få en bedre forståelse af hvordan invarianten fungerede og finde frem til eksempler der afklarede rækkevidden af den. Vi fandt fx et par af substitutioner der ikke kunne adskilles af nogen anden kendt invariant, men godt kunne vises



Figur 1: Skærmdump fra det udviklede program

at være forskellige med vores, og viste dermed at vores invariant var uafhængig af disse.

På `http://www.math.ku.dk/~eilers/myexpo.html` *findes udvalgte referencer, link til det ovenfor nævnte program, og et vink til opgave 1.*

Mere om tælleligheden af de rationale tal

Stefan Holm

I sidste nummer af FAMØS gav Taus et alternativt bevis for den velkendte sætning om tælleligheden af $\mathbb{Q}$. Men ét bevis er jo aldrig nok, så her følger endnu to alternative argumenter for at der faktisk kun er $\aleph_0$ forskellige brøker.

Bevis nr. 1. Vi bemærker først at for et givet $x \in \mathbb{Q}$ kan vi finde entydige tal $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$ og $r \in \{-1, 1\}$ med $\mathrm{sfd}(p, q) = 1$, så $x = r\frac{p}{q}$. For at sikre os at den postulerede entydighed faktisk holder, skynder vi os at sætte $0 = 1 \cdot \frac{0}{1}$.

På grund af entydigheden af vores valg, kan vi opfatte p, q og r som funktioner af x. Og nu er det så ligetil at definere en afbildning $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ ved simpelthen at sætte

$$f(x) = 2^{p(x)}3^{q(x)}5^{r(x)+1}.$$

Injektiviteten, og dermed tælleligheden af $\mathbb{Q}$ følger umiddelbart af aritmetikkens fundamentalsætning. $\square$

Bevis nr. 2. Vi vil atter lege lidt med at finde kanoniske fremstillinger af de rationale tal, og derefter udnytte dem til at give et argument for tælleligheden. Som før kan vi for ethvert $x \in \mathbb{Q}$ finde entydige $p \in \mathbb{Z}$ og $q \in \mathbb{N}$ med $\mathrm{sfd}(p, q) = 1$, så $x = p/q$ — brugen af skråstreg i stedet for almindelige brøkstreg er bevidst.

Som det forhåbentlig er velkendt for læserne af dette blad, har ethvert ikke-negativt heltal en fremstilling som et base 8-tal, der bliver entydig hvis vi forbyder foranstillede nuller (bortset fra i tilfældet 0, selvfølgelig, hvor entydigheden kan sikres ved at vi kræver at der kun er ét 0 i fremstillingen). Hvis vi vil have alle heltal med, bliver vi nødt til at tilføje $-$ til mængden af tilladte symboler, men fremstillingen forbliver entydig (igen er der et 0 der driller, men hvis nu vi pænt undlader at skrive -0, er der intet problem).

Hermed har vi en entydig fremstilling af ethvert rationalt tal som en streng af symboler fra mængden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, -, /\}$, og vi kan definere en injektion $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}_0$ ved simpelthen for et givet rationalt tal at tage den tilknyttede tekststreng, i denne tekststreng erstatte symbolerne "$-$" og "$/$" med "8" og "9", og opfatte den nye tekststreng som et tal skrevet i den almindelige base 10. $\square$

Emmy Noether

Henrik Chr. Grove
(genoptryk fra december 1996)

Nu er det blevet tid til at genoptage vores artikelserie om historiens store matematikere. Denne gang skal vi beskæftige os med en af de største kvindelige matematikere gennem tiden, Amalie Emmy Noether. Denne artikel bygger primært på Auguste Dicks bog "Emmy Noether".

I 1880 giftede matematikeren Max Noether sig med Ida Amalia Kaufmann, og den 23. marts 1882, blev Amalie Emmy Noether så født i Erlangen, som ligger i Sydtyskland. Byen havde et universitet, som var uden kirkens indflydelse, men var kendt bl.a. på grund af Felix Klein.

Som lille viste Emmy Noether ingen tegn på speciel matematisk begavelse. I årene fra 1889-97 gik hun i "Städtische Höhere Töchterschule", som nærmest svarer til en gammeldags realskole. Hun tog udvidet niveau i tysk, fransk og matematik, og desuden modtog hun klaverundervisning, men i modsætning til sin mor, var hun alt andet end god. I april 1900 blev hun uddannet lærer i tysk og fransk med et gennemsnit på 1.2, på en karakterskala fra 1-12 med 1 som den bedste karakter, denne eksamen gav hende lov til at undervise på pigeskoler.

Ene kvinde på matematik

Imidlertid havde Noether mere lyst til at læse videre på universitetet. Dengang kunne kvinder imidlertid ikke gå til eksamen på universiteterne, og de måtte kun følge forelæsninger med forelæserens godkendelse. Dette var sikkert også grunden til, at der i vinteren 1900-01 kun var 2 kvindelige og 984 mandlige studerende ved universitetet i Erlangen. I denne periode er der visse ting der tyder på, at hun måske har forsøgt at læse sprog, men der findes ingen sikre beviser. Samtidig forberedte Emmy Noether sig til sin "Reifeprüfung", som nærmest svarer til en studentereksamen, og som hun bestod den 14. juli 1903. Herefter læste hun et stykke tid ved universitetet i Göttingen, som havde en mere liberal holdning til kvindelige studerende, her blev hun bl.a. undervist af Hilbert og Klein. I denne periode blev loven ændret, sådan at Emmy den 24. oktober 1904 blev officielt indskrevet på matematikstudiet på universitetet i Erlangen, som den eneste kvinde blandt 46 mænd. Den 13. decemeber 1907, forsvarede hun sin Ph.D.-afhandling om algebraiske invarianter. De følgende år arbejdede hun ulønnet ved universitetet i Erlangen, hvor hun dels hjalp sin aldrende far og dels arbejdede med sine egne ting. I april 1915 flyttede hun efter at være blevet inviteret af Klein og Hilbert til Göttingen.

Næsten ansat på Göttingen

Der var flere grunde til at Klein og Hilbert inviterede Emmy Noether til Göttingen, for det første gjorde de deres gamle ven Max Noether en tjeneste, for det andet gav de en talentfuld ung kvindelig matematiker en stor chance, men vigtigst af alt var det nok, at hun kunne støtte deres egen forskning i relativitetsteori. Klein og Hilbert forsøgte at skaffe et lektorat til Noether, men desværre uden succes. Det hjalp heller ikke at Emmy Noether den 9. november 1915 holdt en forelæsning "Om transcendente heltal". Lektoratet blev dømt umulig pga. uopfyldte lovkrav. Det hjalp heller ikke at appellere til kulturministeren. Det var på dette tidspunkt at Hilbert muligvis sagde, at han ikke kunne se at ansøgerens køn havde nogen betydning, det var trods alt et universitet og ikke en badeanstalt. Han er ofte senere blevet citeret for denne udtalelse, men det er aldrig blevet bekræftet at han nogensinde har sagt det. Fra vinteren 1916/17 til '19 assisterede "Frl. Dr. E. Noether" Professor Hilbert med alle hans seminarer, forelæsninger m.m.

Første verdenskrig medførte en del sociale ændringer i Tyskland, der medførte at Noether den 4. juni 1919 blev habiliteret. Hun var næppe nogen god forelæser (hun skulle ofte have været dårligt forberedt), men videregav nærmere inspiration gennem personlige samtaler. Forelæsninger var ikke det eneste hun nedprioriterede, i forhold til sin forskning, efter sigende skulle hun engang have gået en tur med nogle studerende i regnvejr, og hun havde ganske vist en paraply, men den var ikke til megen nytte. Da en af de studerende spurgte hende om hun ikke burde få den repareret, svarede hun (frit oversat): "Jo, men det kan ikke lade sig gøre, for når det regner, skal jeg bruge den, og når det ikke regner, tænker jeg ikke på den!" Den 6. april 1922 blev hun udnævnt til "ausserordentlicher professor", et professorat med begrænsede administrative pligter, en titel uden praktisk betydning. I april 1923 fik hun en kontrakt på at undervise, hvilket gav hende en (lille) fast indkomst. En af Noethers første "doktorer", var Heinrich Grell, som tit senere gjorde offentligt opmærksom på, hvor meget han mente at kunne takke Emmy Noether for, og han sørgede også for at få et af hendes ikke-udgivne manuskripter "Idealdifferentation und Differente", trykt i "Journal für die reine und angewandte Mathematik" i 1950.

Emmy i USA

Kort efter at Hitler var kommet til magten i 1933, blev Emmy Noether suspenderet, officielt for at have huset venstreorienterede studerende, men mon ikke det også havde betydning at hun var af jødisk afstamning. Hermann Weyl kontaktede straks Princeton for at arrangere et gæstelektorat til Emmy Noether. De politiske problemer bekymrede ikke Emmy, og helt frem til begyndelsen af september 1933 agtede hun at vente med at acceptere en invitation fra Bryn Mawr, men den 13. september skrev hun til Hasse, at hun havde modtaget en officiel meddelelse om inddragelse af hendes undervisningstilladelse – men beder ham samtidig fortsætte med at samle vidneudsagn til en sag, for at få den tilbage. I slutningen af oktober var Emmy Noether på vej til USA, om bord på "Bremen".

På Princeton arbejdede Einstein, Weyl, Veblen og Flexner ved siden af deres almindelige arbejde, hårdt med at finde stillinger til deres europæiske (specielt tyske) kolleger. Denne lille gruppe herrer havde skaffet Emmy Noether et gæsteprofessorat for et år på Bryn Mawr College, en pigeskole som både den gang og i dag har et godt ry. I februar 1934 begyndte hun også at undervise på Flexner institutet, som hørte under Princeton og var en slags forskningsinstitut.

De sidste dage

Emmy Noether fik stor indflydelse på matematikken på Princeton, som i de år var inde i en rivende udvikling. I sommeren 1934 besøgte Emmy Noether Tyskland for sidste gang, en grund var for at se sin bror Fritz (som også var blevet matematiker) igen, inden han rejste til Sibirien, han var nemlig af de tyske myndigheder blevet tvunget til at gå på pension. En anden grund var at hun ville nedlægge sin husholdning endeligt, da hun i mellemtiden var blevet klar over at hun aldrig ville komme til at bo fast i Tyskland igen. Hun havde fået sit gæsteprofessorat på Bryn Mawr forlænget med et år, så hun havde noget at vende tilbage til i USA. Hun nåede kun at få en doktor-kandidat (Ruth Stauffer), og bare en uge før sin død, konstaterede Emmy Noether at hun ikke ville få tid til at holde ferie, før i slutningen af juni, fordi hun betragtede det som sin pligt at støtte sin doktor-kandidat hele vejen igennem. Emmy Noethers pludselige død gav derfor Ruth Stauffer uventede problemer, og hun opgav faktisk matematikken efter at hun havde fået sin doktorgrad. Den 7. april 1935 skrev Emmy Noether sit sidste brev til Hasse, og det viser ingen tegn på sygdom, eller en nært forestående operation, men den 14. april 1935 dør Amalie Emmy Noether på Bryn Mawr Hosptal, som følge af en operation.

Nyt fra Fagrådet

Sara Arklint

Vi har planer. Masser af planer. For vi har opdaget at Fagrådet har omtrent 6 300 kroner. Det opdagede vi i vinters da vi fik ny bestyrelse og den nye — og dermed pludseligt eksisterende — kasserer fik adgang til Fagrådets konto hos Forenede StudenterRåd.

Men inden jeg udbreder mig om alt det gode vi har planer om at gøre, må jeg hellere lige forklare hvad Fagrådet er. Fællesmatematisk Fagråd er fagrådet for de studerende på IMF, men i praksis er det desværre kun fagråd for de matematikstuderende. Fagrådet virker som bindeled mellem de studerende og de studenterrepræsentanter vi har i studienævnet, så det er i fagrådet vi diskuterer e.g. studieordninger og ændringer af kurser og eksamensformer. Fagrådet tager dog også hånd om studenterkøkkenet 04.0.01 (køkkenet tidligere kendt som S01), og vi har fx planer om at få Matematikkantinen gjort til rygefrit område.

Fagrådet har også planer om at gøre køkkenet S01 så lækkert at fysikerne bliver grønne[1] af misundelse. Vi vil have komfur og sofaer og male væggene, og vi vil have sat en kortlæser op så kun matematikere kan komme derind og stjæle. Vi vil en masse, for intet er jo så inspirerende som en stor bunke penge. Det skulle da lig være en endnu større bunke penge, så vi har planer om at finde sponsorer. Vi vil allerhelst have A. P. Møller til at sponsorere en udbygning af S01 i form af en udestue med ovenlys, men nu får vi se hvad der sker.

Fagrådet har vist også andre idéer. Ved Den Fællesmatematiske Julefrokost fx havde Fagrådets bestyrelse — bestående af næstformand Marta Díaz, kasserer Niels Woo-Sang og formanden[2] — i en lettere beruset tilstand holdt et bestyrelsesmøde og besluttet at Fagrådet måtte holde en julefrokost når det blev forår. Så det var rent faktisk Fagrådet der fik idéen til Den Fællesmatematiske Påskefrokost[3] som blev holdt i foråret. Vi holdt det bare skjult at vi havde en finger med i spillet for ikke at skræmme folk væk. For det er de færreste der ved at Fagrådets møder handler ligeså meget om kagespisning og planlægning af sociale arrangementer som studenterpolitik.

(Ja, det sidste er ment som en opfordring: kom forbi S01 og få noget kage!)

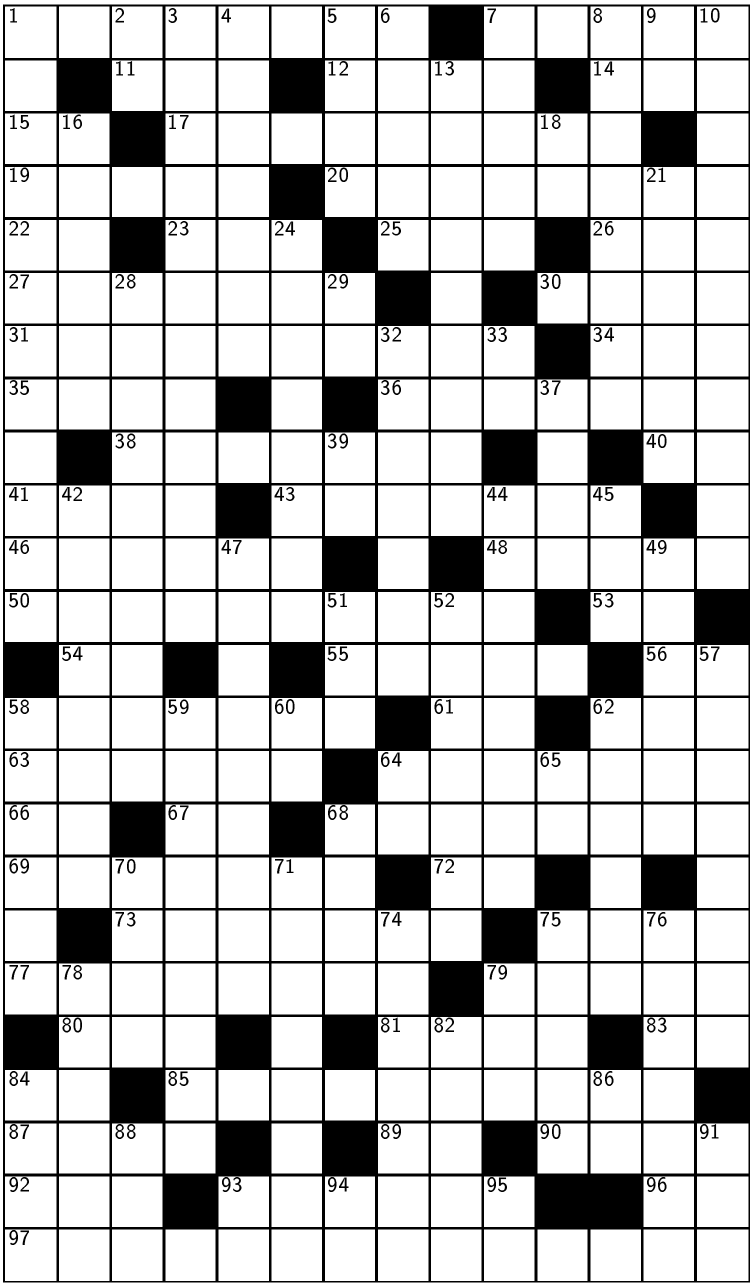
[1] Især Frøen?

[2] Det er mig

[3] Da vi blev ædru, indså vi at en julefrokost om foråret er en påskefrokost

Sommerkryds

Martin “Damskur” Damhus



Kodeord – (værd at huske i denne eksamenstid):

6-58-82   4-96-20   42-13   64-21-11-49-15   72-40-90   71-93-57   28-85-78

Vandret:

1: Antik beklædningsgenstand
7: Gået bort
11: Par
12: Person
14: Præstere
15: LP med udvidet spilletid
17: $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n + \ldots$
19: Dokument
20: i^4, $cos^7 0$, $\sup(]-\infty, 1[\cap[0,2])$
22: LaTeX-kode for μ
23: Sygdom
25: Gud
26: Fransk sommer
27: Udefra kommende (eller: forhenværende tilnærmelsesvis kubiske småstykker)
30: Gulddukater i bunkevis
31: Køretøj
34: In ***
35: Hæderen
36: Træer
38: Bevidstløshed
40: Gas
41: Kejser
43: Forret
46: Landområde
48: Tage på
50: Melankolsk
53: Ankara
54: To ens
55: ***** Mann
56: Open** : Grafikprogrammeringssprog
58: Meget anonym
61: Reklame
62: Gå i ***
63: Synsmæssig
64: Personer
66: Den inderste af Jupiters måner, der er særdeles vulkansk aktiv og har en diameter på 3630 km
67: ** Møller
68: Beslægtet
69: Krumning, vinding eller spiralformet del
72: Besid
73: Befordringsmiddel
75: Indtræffer
77: Udskejelsen
79: Hvedeart
80: B, **b**, B, ʙ81: Afgiv lyd, som havde genstande glas eller porcelæn berørt hinanden let
83: Dvs.
84: Flod, kendt af italienere+krydsordsløsere
85: Balletudtryk
87: Udgang
89: Smertensbrøl
90: Kur
92: Styr
93: (I hvert fald) mere end 7 dage
96: Ujævn
97: De endnu ubrugte kræfter

Lodret:

1: Militærkorps
2: 1500
3: Sønderjysk by
4: Antikke skulpturer
5: Apparater
6: Medmenneske
7: Familie af homeomorfier (σ_i), hvor σ_i afbilder en åben
delmængde af planen over i en åben delmængde af en flade i rummet (udstyret med delrumstopologi)
8: Lidelse
9: Bortsnold
10: Besluttede
13: Person
16: Instrumenter
18: Leffe
21: Delen af den længere rute
24: Parodi
28: Adventskrans-element
29: To ens
32: Rom
33: De ** Soul: Band
37: Overordnet
39: Windows-version
42: Blanding
44: Havdyr
45: Afslør
47: Lægegud
49: Spredes
51: Gnavende bitterhed
52: Væk beundring
57: Udfordrende
59: Ikke simpelt
60: Sprint
62: Makeup
64: ** Bank
65: Rumvæsen
68: Have til hensigt
70: Sikkerhedsorganisation
71: Længsel efter det svundne
74: Kaliningradregionen
75: Udbred
76: Som vedrører toppen
78: Konsollen
79: ***-kort
82: Tøjproducent
84: Fodboldlegende
86: Ordenen af en Sylow-3-gruppe i S_7
88: Indfald
91: Festival-spise
93: Gothersgade-bar, velegnet til torsdagshegn; forkortelse for „undergruppe“; (gammeldags) karakter
94: Findes
95: Betragt

Opgaver og besvarelser

Ulrik Torben Buchholtz

Interessen for flasker synes at være dalet igen – der var kun to besvarelser. Esben Bistrup Halvorsen ('97) svarede rigtigt på opgave 2, men Søren Brander (biokemi '03) svarede rigtigt på begge opgaver, så han vinder en Mystisk Flaske!

Denne gang er den Mystiske Flaske en flaske Turtles-shots, og efter at have fundet Sara Arklint og fået udleveret sin Mystiske Flaske, kan Søren så, som den gode biokemiker han er, løbe gennem HCØs gange og råbe "Pas på! jeg har travlt! Og jeg har en Mystisk Flaske!"[1]

Sørens besvarelser lider af at været skrevet i Word, så de reproduceres ikke her. Desuden er de lidt omstændelige; i stedet får I mine/opgavestillernes udgaver.

Opgave 1 (IMO1988)

Trekant ABC er retvinklet med vinkel A ret, D er skæringspunktet mellem højden fra A og siden BC. Linjen, der forbinder centrum for de indskrevne cirkler i trekant ABD og ACD, skærer AB i K og AC i L. Vis, at arealet af trekant ABC er mindst det dobbelte af arealet af trekant AKL.

Besvarelse: Vi viser først indirekte, at $|AK| = |AL| = |AD|$. Tag K' på AB og L' på AC, så $|AK'| = |AL'| = |AD|$. Lad P være skæringspunktet mellem AD og normalen til AB gennem K'. Da er trekanterne $AK'P$ og ADB kongruente. Lad Q være centrum for den indskrevne cirkel i trekant ADB, som har radius r. Da ligger Q på vinkelhalveringslinjen for vinkel BAD i afstanden r fra AD, og Q er således også centrum for den indskrevne cirkel i trekant $AK'P$. Altså ligger Q på linjen $K'L'$. Helt analogt ligger også centrum for den indskrevne cirkel i trekant ADC på $K'L'$. Dvs. $K = K'$ og $L = L'$.

Nu følger det ønskede umiddelbart.

Opgave 2 (Putnam1981)

Lad $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være defineret ved, at $f(n)$ er antallet af 1-taller i den binære repræsentation af n. Udregn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)}.$$

[1] Ja, dette er en henvisning til MatematikRevyen

Besvarelse: Rækken er konvergent, da $f(n) \leq \log_2(n+1)$. Lad S betegne summen. Bemærk, at $f(2n) = f(n)$ og $f(2n+1) = f(n)+1$, så vi får

$$\begin{aligned}
S &= \frac{f(1)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(2n)}{2n(2n+1)} + \frac{f(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f(n)}{2n(n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{S}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{S}{2} + \log 2,
\end{aligned}$$

hvoraf $S = 2\log 2$.

Ny opgave

Der skal selvfølgelig være en ny opgave, som i eksamenstidens anledning ikke skal handle om matematik (eller måske alligevel). Betragt denne vittighed fra et nyere Anders And-blad:

> To spejlæg sidder i et badekar. Så siger det ene spejlæg: „Ræk mig lige sæben.“ Det andet svarer: „Sig mig, tror du, jeg er en skrivemaskine.“

Opgaven er nu at finde på den mest spændende/interessante/morsomme forklaring af pointen. Vi modtager gerne ligninger, tegninger, haikudigte eller andet og bringer de bedst egnede forslag i næste nummer.

Vi præmierer selvfølgelig det efter vores som altid på ingen måde objektive vurdering bedste bidrag med en Mystisk Flaske!

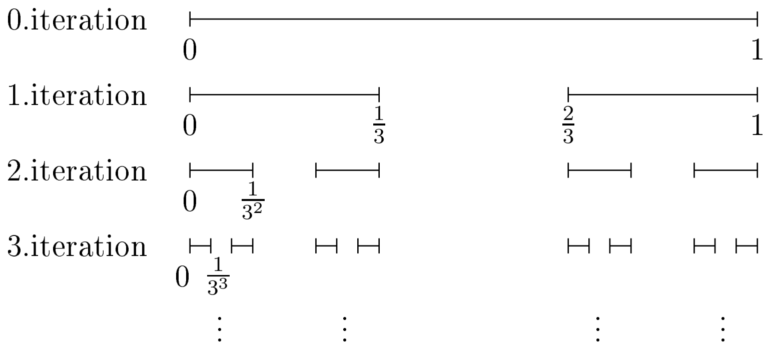
Hausdorff dimension af fraktaler ved selv-similaritet

Henning Røigaard-Petersen

De fleste kender til begrebet fraktaler. Ordet betyder i sig selv "at brække"og kommer af latin "fractus". Den vel nok bedst kendte af disse er Cantor mængderne der kan konstrueres således:
Vælg $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Tag intervallet $I_{0,1} = [0,1]$, bræk det i tre stykker og smid det midterste bort. Tilbage er $I_{1,1} = [0,\lambda], I_{1,2} = [1-\lambda,1]$. Processen fortsættes nu således: Givet intervaller $I_{k-1,1},\dots,I_{k-1,2^{k-1}}$ defineres intervallerne $I_{k1,1},\dots,I_{k,2^k}$, ved at tage et interval $I_{k-1,j}$ og fra dette fjerne et interval af længde $(1-2\lambda)d(I_{k-1,j}) = (1-2\lambda)\lambda^{k-1}$ fra midten af dette, således skabes der to nye intervaller. Vi har således at alle intervallerne $I_{j,k}$ har længde λ^k. Cantormængden $C(\lambda)$ defineres nu ved

$$C(\lambda) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}$$

Oftest betragter man cantormængden med $\lambda = \frac{1}{3}$. Jvf figuren nedenfor:



Der er et problem med fraktaler og det sædvanlige dimensionskoncept i $\mathbb{R}^n$. Da $C(\lambda) \subseteq \mathbb{R}$ ville man ved første øjekast tilskrive den dimension 0 eller 1, men ingen af disse er tilfredsstillende: 0 er for lidt og 1 er for meget. Vi søger altså en meningsfyldt dimension d opfyldende $0 < d < 1$. Der findes utallige dimensionsbegreber, men en alment anvendt måde at gøre dette på, er ved hjælp af Hausdorff dimensionen. Mandelbrot definerede da også fraktaler som værende mængder hvis Hausdorff dimension ikke er heltallig. Desværre er dette dimensionsbegreb ikke altid lige let at arbejde med. I denne artikel vil jeg illustrere en metode til bestemmelse af Hausdorff dimension vha. konceptet *Selv-Similaritet* af mængder. Det er kendt fra Mat2 at Hausdorff dimensionen af $C(\frac{1}{3})$ er $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$. Vi vil anvende teorien til at finde dimensionen af Koch kurven som indføres til sidst.

Kort om Hausdorff målet

For at forstå Hausdorff dimensionen skal man forstå Hausdorff målet. Desværre er der ret meget at sige herom, men en kort udgave er: Hausdorff målet er i virkeligheden en ret stor familie af mål $(\mathcal{H}^s)_{s\in[0,\infty]}$. Den kan indføres på separable metriske rum X med passende pæne egenskaber, herunder $\mathbb{R}^n$, og måler samtlige delmængder af X. Lader vi $d(A)$ angive diameteren af $A \in \mathcal{P}(X)$ er

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^s \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, d(E_i) < \delta, E_i \in \mathcal{P}(X)\}$$

Det skal dog nævnes at vi ikke er sikret at $(X, \mathcal{P}(X), \mathcal{H}^s)$ er et mål i 3MI forstanden, men derimod kun et ydre mål. Vi er kun sikret at $(X, \mathcal{B}(X), \mathcal{H}^s)$ er det, men vi omtaler alligevel afbildningen som et mål.

En central egenskab ved målet er

$$\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty \text{ når } s < t < \infty$$

Fidusen er at $\mathcal{H}^s(A)$ enten er ∞, 0 eller imellem, når s varierer, *og* dersom den antager begge af værdierne 0 og ∞, vil $\mathcal{H}^s(A)$ skifte fra ∞ til 0 i netop ét $s \in [0, \infty[$.

$$\underset{0}{|}\underbrace{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-}_{\mathcal{H}^i(A)=\infty}\underset{s}{|}\underbrace{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-}_{\mathcal{H}^j(A)=0}$$

Værdien af målet i et sådan s kan vi ikke sige noget generelt om.

Vi kan da definere Hausdorff dimensionen ved

Definition 1. *Hausdorff dimension*
Lad X være et separabelt rum udstyret med Hausdorff målet $\mathcal{H}^s$. Da er Hausdorff dimensionen af en mængde $A \subseteq X$:

$$\dim_H A = \begin{cases} 0 & \forall s \in [0, \infty[: \mathcal{H}^s(A) = 0 \\ \infty & \forall s \in [0, \infty[: \mathcal{H}^s(A) = \infty \\ \sup\{s \mid \mathcal{H}^s(A) = \infty\} & \textit{ellers} \end{cases}$$

Begrebet har bl.a. den pæne egenskab at $\mathrm{Dim}_H\mathbb{R}^n = n$ og $\mathrm{Dim}_H A \leq \dim_H B$ for alle $A \subseteq B$. Det bør nu stå klart at denne dimension ikke altid er nem at bestemme. For nærmere om målet, se [1].

Selv-similaritet

Man kan hurtigt overbevise sig selv om at nogle af de kendte fraktaler som f.eks. Cantor mængden $C(\lambda)$ kan beskrives som en art grænse-mængde ved gentagende anvendelse af afbildningerne, som f.eks. $S_1, S_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$S_1(x) = \lambda x, \;\; S_2(x) = \lambda(x-1) + 1$$

på intervallet $[0, 1]$. Dette koncept vil vi lige formalisere.

Definition 2. *Similaritet*
En afbildning $S : X \to X$ siges at være en similaritet *dersom:*

$$\exists r \in \mathbb{R}_+ \forall x, y \in X : d(S(x), S(y)) = rd(x, y)$$

I tilfældet $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d)$ kan det vises at S er en similaritet hvis og kun hvis S er sammensat af afbildninger

$$\mu_r \circ \tau_b \circ O$$

for passende $\mu_r(x) = rx$, translation $\tau_b = x - b$ og ortogonal transformation O. En similaritet kan således betragtes som en "flytning og skalering"af $\mathbb{R}^n$.

Similariteterne er de afbildninger, der ved gentagen anvendelse, skal "frembringe"vores fraktal. Da de fraktaler vi er interesseret i generelt består af iterrationer der formindsker figuren, vil vi fra nu af kun betragte similariteter der er kontraktioner, dvs. $0 < r < 1$.

Definition 3. *Lad (X, d) være et metrisk rum og $A \subseteq X$. Er $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ en mængde af similariteter $S_i : X \to X$, da defineres*

$$\mathcal{S}(A) = \bigcup_{S_i \in \mathcal{S}} S_i(A)$$

Eksempel 1. *Afbildningerne $S_1, S_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $S_1(x) = \frac{1}{3}x, S_2(x) = \frac{1}{3}(x-1)+1$ er similariteter med $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$, og vi finder at $\mathcal{S}([0, 1]) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.*

Der knytter sig en vigtig størrelse til en mængde af disse similariteter. Lader vi $r_1, \dots, r_N$ være de tilhørende Lipschitz konstanter, så vil afbildningen $\gamma(t) = \sum_{i=1}^{N} r_i^t$ være en kontinuert aftagende funktion med $\gamma(0) = N$ og $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$. Der findes da et entydigt bestemt $D \in \mathbb{R}$ så

$$\gamma(D) = \sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1$$

Dette D kalder vi *similaritetsdimensionen* af $\mathcal{S}$.

Det vil vise sig at D er Hausdorff dimensionen for visse *selv-similære mængder*, f.eks. Cantor mængden, hvilket nemt bekræftes.

Invariante mængder og mål

Lad $\mathcal{S}$ være en endelig mængde af similariteter. En delmængde $K \subseteq X$ siges at være *invariant under* $\mathcal{S}$ dersom

$$\mathcal{S}(K) = K$$

Det viser sig at enhver mængde af similariteter har en sådan *entydigt bestemt begrænset og afsluttet* invariant mængde. Betragt mængden $\mathcal{B}(X)$ af afsluttede og begrænsede delmængder af X, og udstyr den med den fra Mat2AN velkendte Hausdorff metrik ρ. Det viser sig at $(\mathcal{B}(X), \rho)$ er et fuldstændigt metrisk rum (ikke trivielt at vise) og at $E \mapsto \bigcup_{i=1}^{N} S_i(E)$ er en kontraktion. Ved Banachs Fikspunktssætning eksisterer en entydigt bestemt afsluttet og begrænset mængde K der er fikspunkt for $\tilde{S}$. Dette er netop vores søgte K.

Vi vil betegne mængden hørende til $\mathcal{S}$ med $|\mathcal{S}|$.

Eksempel 2. *Lader vi igen $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ med S_1 og S_2 som før, kan det nemt indses at $C(\frac{1}{3})$ netop er den invariante afsluttede og begrænsede mængde $|\mathcal{S}|$*

På tilsvarende vis kan vi knytte et invariant sandsynlighedsmål på X til $\mathcal{S}$. Lader vi $\mathcal{M}^1 = \{\mu \,|\, \mu \text{ mål på } X, \mu(X) = 1\}$ kan vi for en Lipschitz afbildning $f : X \to X$ definere

$$f_* : \mathcal{M}^1 \to \mathcal{M}^1, \; f_*(\mu)(E) = \mu(f^{-1}(E))$$

Definition 4. *Lad $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$ være similariteter og lad $\rho = \{\rho_1, \ldots, \rho_N\}$ være en vilkårlig mængde af reelle tal opfyldende $0 < \rho_i < 1$ for alle i og $\sum_{i=1}^{N} \rho_i = 1$. $\overline{(\mathcal{S}, \rho) : \mathcal{M}^1} \to \mathcal{M}^1$ er afbildningen givet ved*

$$(\mathcal{S}, \rho)(\nu) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i S_{i*} \nu$$

dvs. for $E \subseteq X$ er

$$(\mathcal{S}, \rho)(v)(E) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \nu(S_i^{-1}(E))$$

Vi siger da at et $\nu \in \mathcal{M}^1$ er invariant mht. $(\mathcal{S}, \rho)$ dersom

$$(\mathcal{S}, \rho)(\nu) = \nu$$

Afbildningen $(\mathcal{S}, \rho)$ er interessant når ρ vælges til at være mængden $r = \{r_1^D, \ldots, r_N^D\}$, hvor r_i er Lipschitz konstanten hørende til S_i og D er similaritetsdimensionen.

Ved at indføre en passende snedig metrik, involverende de afbildninger der er begrænsede og kontinuerte på begrænsede mængder, kan $\mathcal{M}^1$ gøres fuldstændigt og $(\mathcal{S}, \rho)$ en kontraktion. Igen ved Banachs fixpunktssætning eksisterer entydigt bestemt invariant sandsynlighedsmål, betegnet $||\mathcal{S}||$.

Dette måls rolle er ikke lige så klart som mængden $|\mathcal{S}|$, og det er da også blot et værktøj til bestemmelse af Hausdorff dimensionen af $|\mathcal{S}|$. Ikke desto mindre er det vigtigt, og det viser sig at $|\mathcal{S}|$ og $||\mathcal{S}||$ er knyttet sammen på mange måder, f.eks. er støtten for $||\mathcal{S}||$ netop $|\mathcal{S}|$. Vi kan nu indføre Selv-similære mængder, finde pæne egenskaber for disse mht. Hausdorff dimensionen og vise at $C(\frac{1}{3}) = |\mathcal{S}|$ er selv-similær.

Selv-similaritet af mængder

Igen er $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$ similariteter med similiaritetskonstanter $\{r_1, \ldots, r_N\}$ og similaritetsdimension D.

Definition 5. *Selv-Similær*
Lad $A \subseteq X$ have Hausdorff dimension k. A siges at være selv-similær mht. $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$ dersom

1. *A er invariant mht. $\mathcal{S}$.*
2. *$\mathcal{H}^k(A) > 0$*
3. *$\mathcal{H}^k(A_i \cap A_j) = 0$ for alle $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ så $i \neq j$.*

Hvor $A_i = S_i(A)$.

Eksempel 3. *Vi har fundet Hausdorff dimensionen af $C(\frac{1}{3})$ til at være $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$. Da $C(\frac{1}{3})_1$ og $C(\frac{1}{3})_2$ er disjunkte, er målet af fællesmængden specielt 0. $C(\frac{1}{3})$ er da selv-similær mht. $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$.*

I det følgende vil vi forlade den generelle tilgang til emnet, lade $X = \mathbb{R}^n$ og kun anvende resultaterne i det foregående med $\rho = \{r_1^D, \ldots, r_N^D\}$ (similaritets-konstanterne).

Sætning 4. *Lad $K = |\mathcal{S}|$ og $\dim_H K = d$. Da gælder:*

1. *$\mathcal{H}^D(K) < \infty$, specielt er $d \leq D$.*
2. *Dersom $0 < \mathcal{H}^d < \infty$ gælder*

$$K \text{ er selv-similær } \Leftrightarrow d = D$$

Eksempel 5. *Vi kender dimensionen af $C(\frac{1}{3})$. Da den er sammenfaldende med similaritetsdimensionen giver 4 at $C(\frac{1}{3})$ er Selv-similær. Omvendt, ved vi at $C(\frac{1}{3})$ er selv-similær, så Hausdorff dimensionen må være lig Similaritetsdimensionen.*

For nu at kunne bestemme Hausdorff dimensionen af selv-similære mængder, skal vi bruge en hurtig definition

Definition 6. *ÅMB*
$\mathcal{S}$ siges at opfylde Åben mængde betingelsen *dersom der eksisterer en ikke-tom åben mængde O så*

1. $\bigcup_{i=1}^{N} S_i(O) \subseteq O$.
2. $S_i(O) \cap S_j(O) = \emptyset$ *for* $i \neq j$.

Eksempel 6. $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ *opfylder klart ÅMB med* $O =]0,1[$. *Hvert trin i iterationen giver os samme interval som afbildet under "Cantor Mængden"i det tidligere kapitel, blot med endepunkterne fjernet.*

Der er nu teorien for alvor bliver tung, og anvendelsen af målet $||\mathcal{S}||$ og egenskaben supp $||\mathcal{S}|| = |\mathcal{S}|$ bliver stærkt nødvendigt og ikke-trivielt. Når støvet har lagt sig står hovedsætningen tilbage:

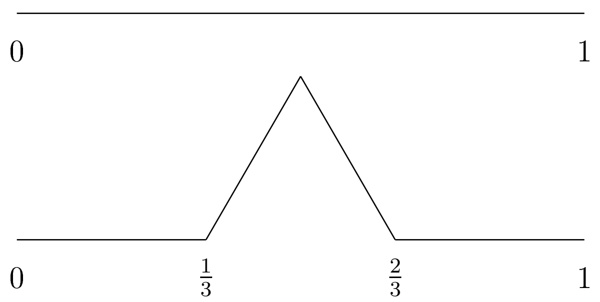
Sætning 7. *Antag at* $\mathcal{S}$ *opfylder ÅMB med en begrænset mængde, og lad* $K = |\mathcal{S}|$ *og* D *similaritetsdimensionen af* $|\mathcal{S}|$.
Da gælder:

$$\dim_H K = D$$

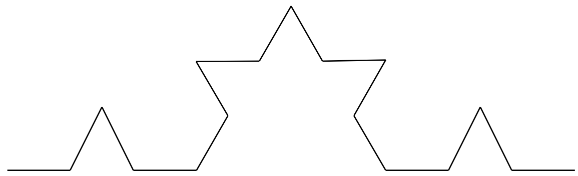
Lad os anvende dette på Koch kurven

Koch kurven

Koch kurven er en delmængde af $\mathbb{R}^2$. Udgangspunktet for iterationen er en ret linie, f.eks. intervallet $[0, 1]$. Vi tager den midterste trediedel af linien, og oprejser en ligesidet trekant med sidelængde svarende til det midterste liniestykke, mens de to endestykker efterlades urørt. Herved fremkommer fire liniestykker:



Processen kan nu gentages på hver af liniestykkerne, hvorved der fremkommer 16 liniestykker:



Processen fortsættes hvorved antalet af liniestykker og trekanter vokser kraftigt, men deres længde aftager! En interessant observation er, at antallet af liniestykker vokser hurtigere en deres længde aftager. Efter det n.trin vil der være 4^n liniestykker, hver af længde $\frac{1}{3^n}$. Den samlede længde af kurven efter den n'te iteration er da

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

En konsekvens heraf er at grænsen af iterationer vil have uendelig længde. Koch kurven defineres til at være grænsen for disse iterationer! På trods af denne egenskab er Koch kurven begrænset. Lad A_n betegne arealet mellem Koch kurven og linien givet ved intervallet $[0,1]$, med $A_0 = 0$. I det n.te trin øges A_{n-1} med arealet svarende til de 4^{n-1} trekanter vi tilføjer. Vi kan vurdere denne størrelse opad ved i stedet at tilføje arealet af kvadratet omspændende trekanterne. Disse har areal $\left(\frac{1}{3^n}\right)^2$. Vi har altså:

$$A_n < A_{n-1} + 4^{n-1}\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = A_{n-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^n$$

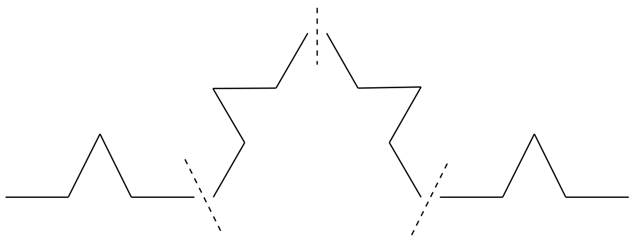
Fortsættes den rekursive betragtning fås

$$A_n < \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^n$$

Dette er en geometrisk række på nær konstantled. Vi kan altså vurdere arealet opdad ved:

$$\lim_{n\to\infty} A_n < \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3^2}\right)^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{4}{3^2}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{3^2}} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

At finde selv-similariteter for Koch kurven går noget nemmere ved at indse at kurven, på ethvert niveau i iterationen, er sammensat af 4 kopier af sig selv.



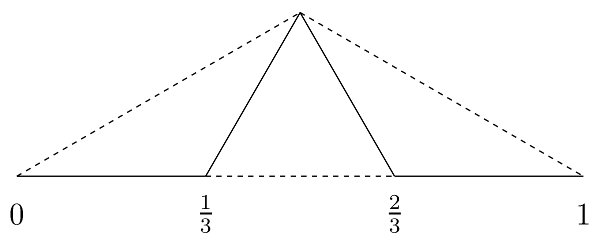
Vi starter i trin 0 med en linie af længde 1. Denne skaleres i trin 1, hvor vi får en linie af længde $\frac{1}{3}$, sammensat 4 gange med sig selv, og evt. drejet i en vinkel på $\frac{\pi}{3}$ i positiv eller negativ retning. Denne proces bliver så ved. Dvs. de similariteter vi skal bruge skal netop kunne skalere og dreje samt tanslatere. Man kan hurtigt overbevise sig selv om at Koch kurven er frembragt af similariteterne $S_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der for $i = 1, 2, 3, 4$ og $x \in \mathbb{R}^2$ er givet ved:

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= \frac{1}{3}x \\
S_2(x) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
S_3(x) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & \sin(\frac{\pi}{6}) \\ -\sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
S_4(x) &= \frac{1}{3}x + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

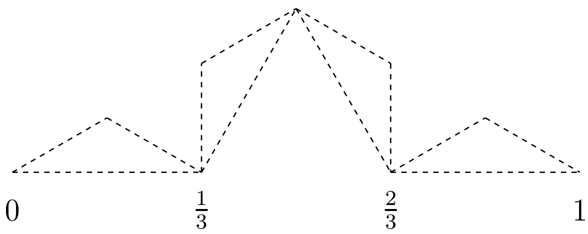
De er alle en skalering, S_4 er yderligere en tanslatering mens S_2 og S_3 tillige er drejninger i positiv hhv. negativ omløbsretning, med en vinkel på $\frac{\pi}{3}$.

De er alle oplagt similariteter med similaritetskonstant $\frac{1}{3}$. Mængden $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ har da similiaritetsdimension $D = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.261$.

Betragt den åbne mængde O givet ved det indre af det konvekse hylster om den 1. iteration:



Anvendes similariteterne på O fås følgende:



Man kan nu overbevise sig om at $\mathcal{S}$ opfylder ÅMB med O. Ved sætning 7 er

$$\dim_H |\mathcal{S}| = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$$

Specielt er Koch kurven en fraktal.

Litteraturliste

[1] M.C. Kaspersen, H. Røigaard-Petersen, *Dimensionsbegreber i Topologien*, Fagprojekt F2004. Tilgængeligt på www.math.ku.dk/~moller/students/specialer.html

FAMØS maj 2005.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-,
Økonomi- og Statistikstuderende ved
Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:
Sara Arklint (ansvh.)
Stefan Holm
Tarje Bargheer
Taus Brock-Nannestad
Ulrik Torben Buchholtz

Tegner:
Anne Vinkel Hansen

Kotegner:
Anne Vinkel Hansen

Deadline for næste nummer:
Fredag den 7. oktober 2005

Indlæg modtages gerne og bedes sendt
til `famos@math.ku.dk` – meget gerne
skrevet i LaTeX.
FAMØS' dueslag på Matematisk
Afdelings sekretariat kan til nøds også
bruges.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
`http://math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk
Oplag: 500 stk.
ISSN 1395-2145