FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

17. årgang, nr. 2, oktober 2003

Indhold

Velkommen 3

– Glædelig Jul.

Vinderen 4

– Vi har en vinder!

Strik et Möbiusbånd:
hvorfor og hvordan 5

– Opskriften til den perfekte julegave.

Mig & Menneskeheden 7

– Om den svære balance mellem kunstnerisk frihed og decideret løgn.

Side 9-sætningen 9

– En kuriøsitet.

Et glimt af designteori
med et godt øje til Steiner tripelsystemer. 11

– Et frisk pust fra Leeds.

En replik fra Studenterpræsten 20

– Studenterpræsten alias Nicolai Halvorsen læser også FAMØS.

Opgaver 22

– En gammel og en ny opgave.

Velkommen

Tarje Bargheer

Vi har kontakt med vores læserskare; det lykkelige, at i har reflekteret over - og responderet til Famøs, er hændt. Vi kan således i dette nummer præsentere en svarende præst, samtidig med at vi har udvalgt en (der var flere besvarelser) vinder af opgaven fra sidste nummer. At vores læserskare sørger for at binde Famøs sammen på denne måde, glæder vi os meget over. Og vi håber at i, nu hvor julen er så lykkelig og givende stund, vil overvælde os i lige så udstrakt grad.

Famøs egner sig fremragende til hyggelæsning i de kolde julenætter. Men husk dog, selvom det kan være svært at tro: Julen handler trods alt om mere end blot at læse matematik. Fra Famøs ønsker vi i hvert fald en rigtig

Glædelig Jul

Vinderen

Ulrik Torben Buchholtz

I sidste nummer af FAMØS udlovede vi følgende bog til præmie, meget venligt sponsoreret af Universitetsbogladen: *Remarkable Mathematicians from Euler to von Neumann* af Ioan James. Vi fik flere svar på den første opgave om stambrøker, og vi har valgt at præmiere besvarelsen af Nicolai Bork og Torben Birk fra Kemisk Laboratorium. Opgavestillerens besvarelse følger efter et resumé af opgaveformuleringen.

Stambrøker

Givet et naturligt tal n, på hvor man måder kan stambrøken $1/n$ skrives som sum af to stambrøker? Mere præcist, hvor mange talpar (a, b) af naturlige tal løser ligningen

$$\tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b}?$$

Opgaven er fra „Problem des Monats" oktober 1997 fra Hamburger Schülerzirkel Mathematik.

Besvarelse

Først bemærker vi, at for en løsning (a, b) må vi have $a, b > n$. Vi påstår nu, at antallet af løsninger netop er antallet af divisorer i n^2.

Antag først, at (a, b) er en løsning. Sættes $d = a - n \in \mathbb{N}$ fås

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{n} - \frac{1}{a} = \frac{a-n}{an} = \frac{d}{n^2 + nd},$$

hvoraf vi ser, at $d \mid n^2$.

Antag omvendt, at $d \mid n^2$. Da kan n^2 skrives som produktet de. Sæt $a = n+d$ og $b = n + e$. Nu er

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n+d} + \frac{1}{n+e} = \frac{2n+d+e}{n^2 + (d+e)n + de} = \frac{2n+d+e}{(2n+d+e)n} = \frac{1}{n}.$$

Altså er der en bijektiv korrespondance mellem mængden af løsninger (a, b) og mængden af divisorer i n^2.

Strik et Möbiusbånd: hvorfor og hvordan

Sara Arklint, strikker

Efter sigende er strikning kommet på mode igen. Det er nemlig så skønt at kunne sidde ude i det offentlige rum og signalere overskud.

Der er også universitetsstuderende der er begyndt at strikke. Selv naturvidenskabsstuderende. Vores studenterpræst har endda oprettet en strikkecafe. Og der er set strikkere ved flere forelæsninger på IMF!

Handler dette også om at signalere overskud i et offentligt rum? Måske. Men det handler om mere end det. Jeg vil endda opfordre mine medstuderende til at strikke et (eller flere) Möbiusbånd[1].

Hvorfor

Det bliver nemmere at studere hvis man strikker.

Studenterpræsten oprettede bl.a. sin strikkecafe fordi han ved at det er sundt at foretage sig noget meget konkret når man i dagligdagen ofte foretager sig noget meget abstrakt. Undersøgelser har nemlig vist at det at foretage sig noget konkret (og kreativt) styrker ens evne til at tænke abstrakt (og analysere). Derudover kan man hindre at dele af ens hjerne dør. For hjerneceller dør som bekendt ud hvis de ikke bruges.

Dette er dog slet ikke det bedste argument for at strikke. Det kan nemlig være forbandet smart at strikke under forelæsningerne. Hvis man ikke er i stand til at have al sin opmærksomhed på forelæseren, er det godt at strikke. Hvis man sagtens kan holde sig koncentreret, kan det være dumt at strikke fordi strikketøjet kan tage noget af ens opmærksomhed. Men hvis man ikke kan holde opmærksomheden på forelæseren, dvs. hvis man er ved at falde i søvn, er det smart at strikke. For man hører altså bedre mens man strikker end mens man sover. Og det er meget svært at falde i søvn med et strikketøj i hænderne.

Jeg synes statistik er spændendene. Men statistikere har af en eller anden grund alligevel en utroligt søvndyssende virkning på mig. Jeg har dog kun

[1] Laves som et almindeligt bånd, blot drejes en af enderne en halv omgang inden de sluttes sammen

sovet til en eneste af de 10-15 2SS-forelæsninger jeg har været til: den hvor jeg havde glemt mit strikketøj.

Og hvis man skal strikke, kan man vel lige så godt strikke et interessant matematisk objekt. På `kleinbottle.com` fås Kleinflaskehuer med matchende Möbiusbåndshalstørklæder. Så hvorfor ikke strikke et Möbiusbånd?

Hvordan

Da det er svært at lære at strikke alene udfra en tekst, vil jeg ikke forsøge at forklare hvordan man strikker. Hvis du ikke ved hvordan man strikker, vil jeg derfor opfordre dig til at spørge din mor, din mormor eller måske en af de strikkere der sidder i kantinen. Og vent da med Möbiusbåndet til du har prøvet at strikke fx halstørklæder.

Möbiusbåndet skal strikkes på rundpind.[2] Rundpinden løber langs båndets rand: du starter inde i midten af båndet og strikker ud.

Du skal starte med noget garn i en anden farve end båndet skal have. Det du strikker med dette garn, skal nemlig senere hen pilles eller klippes væk.

Du skal slå lige så mange masker op som hvis du skulle strikke et almindeligt bånd med samme størrelse (hals)åbning. Og rundpinden må ikke være længere end åbningens omkreds.

Strikker du ribstrik med n ret og n vrang, skal du sørge for at det antal masker du slår op er ækvivalent med n modulo $2n$. Strikker du 2 ret og 2 vrang, skal du altså i stedet for 120 masker slå 122 masker op.

Med dit 'rigtige' garn, den farve båndet skal have, strikker du en pind. Når du så når tilbage til den første maske med 'rigtig' farve, skal du strikke videre *uden at tage maskerne af venstre pind*. Når du er nået alle maskerne rundt, skal du så strikke videre på almindelig vis. Det er på denne måde du giver båndet 'drejningen' og får rundpinden til at løbe langs hele randen.

Hvis du ikke vil have meget løse masker, kan du overveje at tage en hæklenål til hjælp mens pindene sidder stramt op ad hinanden.

Når båndet har nået passende bredde, lukker du af på sædvanlig vis.

Det stykke garn med en anden farve der sidder inde lang båndets midte, kan du nu fjerne. Og du skal sørge for at fæstne den garnende fra det 'rigtige' garn der stikker ud inde ved båndets midte.

Båndets midte vil være mere eller mindre tydeligt markeret. Strikker du kun retpinde, vil midten blive kraftigt markeret da den ene halvdel af båndets side vil se ud som var den strikket ret mens den anden vil se ud som var den strikket vrang. Jeg vil derfor anbefale at du strikker på en måde hvor der ikke skelnes mellem ret- og vrangside. Fx ribstrik eller perlestrik.

[2] Opskriften er fra The Geometry Center ved University of Illinois at Urbana-Champaign: `http://geom.math.uiuc.edu/docs/education/institute91/handsout/node15.html`

Side 9-sætningen

Ulrik Torben Buchholtz

Også i dette nummer af FAMØS er side 9-sætningen ganske let fordøjelig, men forhåbentlig også lidt fornøjelig! Jeg har igen været i Ross Honsbergers *Ingenuity in Mathematics* (MAA, 1970), hvor jeg fandt nedenstående kuriøsitet.

Liouvilles generalisation

Det er velkendt, at

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

for alle $n \in \mathbb{N}$ (ellers vises det let ved induktion). Dette nummers side 9-sætning er en lille generalisation af dette resultat, som tilskrives Liouville. I sin formulering minder det om en tryllekunst:

Side 9-sætningen. *Lad $N \in \mathbb{N}$. Lad $d_1 = 1, d_2, \ldots, d_k = N$ betegne de positive divisorer i N. Lad c_i betegne* antallet *af divisorer i d_i for $i = 1, \ldots, k$. Da gælder*

$$c_1^3 + c_2^3 + \cdots + c_k^3 = (c_1 + c_2 + \cdots + c_k)^2.$$

Bevis. Beviset går i en række trin. Først viser vi sætningen for tal på formen $N = p^n$ med primtal p. I dette tilfælde er divisorerne $1, p, \ldots, p^n$, og antallet af divisorer i p^i er $i+1$. Sætningen udsiger altså i dette tilfælde blot det velkendte, at

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + (n+1))^2.$$

Beviset går nu ved fuldstændig induktion efter N. Hvis $N > 1$ vælges primdivisor p i N. Lad p^n være den største potens af p, der går op i N. Vi har altså $N = p^n K$, hvor $n \geq 1$ og $p \nmid K$. Pr. induktion antages sætningen for tallet K. Lad $d_1, d_2, \ldots, d_k$ betegne divisorerne i K og lad $c_1, c_2, \ldots, c_k$ betegne antallet af divisorer i disse. Ifølge antagelsen gælder altså

$$c_1^3 + c_2^3 + \cdots + c_k^3 = (c_1 + c_2 + \cdots + c_k)^2.$$

Divisorerne i $N = p^n K$ er nu præcis de $(n+1)k$ tal

$$\begin{gathered} p^0 d_1,\, p^0 d_2, \ldots, p^0 d_k, \\ p^1 d_1,\, p^1 d_2, \ldots, p^1 d_k, \\ \vdots \\ p^n d_1,\, p^n d_2, \ldots, p^n d_k. \end{gathered}$$

(Her benyttes aritmetikkens fundamentalsætning) Antallet af divisorer i disse tal er henholdsvis

$$\begin{gathered}1c_1,\, 1c_2, \ldots, 1c_k,\\ 2c_1,\, 2c_2, \ldots, 2c_k,\\ \vdots\\ (n+1)c_1,\, (n+1)c_2, \ldots, (n+1)c_k.\end{gathered}$$

For summen, S, af disse antal har vi altså

$$S = (1 + 2 + \cdots + (n+1))(c_1 + c_2 + \cdots + c_k).$$

Idet sætningen kan anvendes på hver faktor for sig, får vi

$$\begin{aligned}S^2 &= (1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3)(c_1^3 + c_2^3 + \cdots + c_k^3)\\ &= (c_1^3 + c_2^3 + \cdots + c_k^3) +\\ &\quad ((2c_1)^3 + (2c_2)^3 + \cdots + (2c_k)^3) +\\ &\quad\ \vdots\\ &\quad + \ (((n+1)c_1)^3 + ((n+1)c_2)^3 + \cdots + ((n+1)c_k)^3).\end{aligned}$$

Dette udtrykker netop sætningens påstand for det givne $N > 1$. □

Som eksempel kan vi anvende sætningen på $N = 48$. Her er divisorerne

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.$$

Antallet af divisorer i disse er hhv.

$$1, 2, 2, 3, 4, 4, 6, 5, 8, 10.$$

Sætningen udsiger altså i dette tilfælde, at

$$1^3+2^3+2^3+3^3+4^3+4^3+6^3+5^3+8^3+10^3 = (1+2+2+3+4+4+6+5+8+10)^2.$$

Dette er faktisk rigtigt, og tallet på begge sider af lighedstegnet er 2025.

Et glimt af designteori
med et godt øje til Steiner tripelsystemer.

Lise-Lotte Sabano

Da jeg var Erasmusstuderende på University of Leeds, stiftede jeg bekendtskab med nogle grene af matematikken, som man ikke normalt får præsenteret her i huset. Den oplevelse vil jeg gerne dele lidt ud af, så her følger et kort indblik i designteori.

Til at starte med opbygger vi lidt intuition om designteoriens begreber. Vi betragter to mængder af objekter med en relation i mellem dem: $\mathcal{V}$ betegner den ene mængde bestående af punkter og $\mathcal{B}$ betegner den anden som består af blokke. Relationen beskriver det tilhørsforhold, der er mellem punkterne og blokkene: En blok består af en delmængde af punkterne. Det kan også formuleres sådan, at relationen foreskriver, hvordan punkterne fordeler sig på blokkene. Vi siger, at et punkt $x \in \mathcal{V}$ ligger i en blok $B \in \mathcal{B}$ eller at B indeholder x.

I euklidisk geometri findes mange eksempler på strukturer, der bygger på en sådan relation. Vi kan f.eks. se på mængden af punkter og mængden af linier i planen, og tænke på linierne som blokke. Hver blok indeholder en mængde punkter og punkterne fordeler sig på blokkene. Tilsvarende kan vi i 3 dimensioner se på linierne som mængden $\mathcal{V}$ af punkter og planerne som mængden $\mathcal{B}$ af blokke. På denne måde kan vi illustrere nogle strukturer som er eksempler på uendelige design, men i det følgende vil vi nøjes med at se på endelige design.

Definition 1. *Givet hele tal t, k, v, b, r og λ med $t < k < v$ og $\lambda > 0$. Et t-*design *med parametrene v, k og λ er en endelig mængde $\mathcal{V}$ af punkter og en endelig mængde $\mathcal{B}$ af blokke, hvor $|\mathcal{V}| = v$, $|\mathcal{B}| = b$ og blokstørrelsen, dvs. antallet af punkter i en blok, er k. Hvert punkt $x \in \mathcal{V}$ ligger i r blokke og hver delmængde i $\mathcal{V}$ af størrelsen t ligger i λ blokke.*

Designteoriens interessante spørgsmål handler om hvilke betingelser der er skal være opfyldt for at sikre eksistensen af et t-design. Generelt er det meget svært at vise noget om, hvilke betingelser der er tilstrækkelige, så vi lægger ud med at se på nogle nødvendige betingelser for parametrene v, k, t og λ.

Lemma 2. *Givet et t-design. Lad $H \subseteq \mathcal{V}$ være en delmængde af størrelse h og lad λ_h betegne antallet af blokke, der indeholder H. Da gælder at*

$$\lambda \binom{v-h}{t-h} = \lambda_h \binom{k-h}{t-h}.$$

Bevis: Vi bruger et tælleargument, dvs. vi tæller antallet af delmængder, som indeholder H på to måder. Der er $\binom{v-h}{t-h}$ delmængder af størrelse t som indeholder H og hver af disse ligger i λ blokke, så $\lambda \binom{v-h}{t-h}$ blokke indeholder H. Samtidig er der λ_h delmængder af størrelse k som indeholder H og de indeholder tilsammen $\lambda_h \binom{k-h}{t-h}$ mængder af størrelse t. Dermed er $\lambda \binom{v-h}{t-h} = \lambda_h \binom{k-h}{t-h}$. □

Ovenstående medfører at et t-design også er et h-design. Almindeligvis sætter vi $b = \lambda_0$ som angiver det antal blokke i et design, der indeholder den tomme mængde, hvilket vil sige alle blokkene. For givne værdier af v og k kan vi konstruere et t-design for $2 \leq t \leq k$ ved at tage samtlige delmængder af $\mathcal{V}$ med størrelse k. Så er der tale om et trivielt design. Der kan ske det at en blok bliver taget med mere end en gang, men vi får mere interessante design ved ikke at tillade gentagne blokke.

Lad os vende blikket mod en særlig type af t-design, nemlig dem med $t = 2$. Det betyder i følge definition (1) at hvert par af punkter ligger i netop λ blokke. Desuden følger det af lemma (2) at det også er et 1-design. Vi skal nu se på nogle nødvendige betingelser for eksistensen af 2-design.

Lemma 3. *Parametrene for et 2-design med parametrene v, k, λ opfylder følgende ligninger:*
i) $bk = vr$.
ii) $b \binom{k}{2} = \lambda \binom{v}{2}$.

Bevis: Vi får $i)$ ved at tælle antallet af punkter i et 2-design: Der er b blokke gange k punkter i hver, hvilket svarer til v punkter gange r, som er antallet af blokke hvert punkt ligger i.

Herefter får vi $ii)$ ved at tælle par af punkter: Der er b blokke med k par, som er lig med λ blokke der indeholder hvert par ganget med antallet af par ialt. □

Definition 4. *Et 2-design er* symmetrisk *hvis $v = b$, dvs. hvis der er lige mange punkter og blokke.*

Vi bemærker at $v = b$ medfører at $r = k$, så i et symmetrisk design svarer blokstørrelsen til det antal blokke et givet punkt ligger i.

Lad os se et eksempel på et symmetrisk 2-design:

Eksempel 5. *Et* 2*-design med parametrene* $7, 3$ *og* 1 *består af de* $v = 7$ *punkter* $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., 7\}$ *og* $b = 7$ *blokke* $\mathcal{B} =$

$$\{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}\}.$$

Her kan det ses at hver blok indeholder $k = 3$ *punkter, hvert punkt ligger i* $r = 3$ *blokke og hvert par (*$t = 2$*) af punkter ligger i* $\lambda = 1$ *blok.*

Definition 6. *Givet et* t*-design med parametrene* v, k *og* λ*, definerer vi designets* $v \times b$ *fordelingsmatrix* A *til at være* $A = (a_{ij})$ *hvor*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ når punktet } i \text{ tilhører blok } j \\ 0, \text{ ellers.} \end{cases}$$

Fordelingsmatricen beskriver hvordan punkterne fordeler sig på blokkene. Når vi opskriver matricen på denne måde betyder det, at rækkerne i A indiceres efter blokkene og søjlerne efter designets punkter. For et symmetrisk design får vi en kvadratisk $v \times v$ matrix.

Eksempel 7. *Fordelingsmatricen for* 2*-designet med parametrene* $7, 3$ *og* 1 *følger her:*

	124	235	346	457	561	672	713
1	1	0	0	0	1	0	1
2	1	1	0	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	0	1
4	1	0	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	0	0
6	0	0	1	0	1	1	0
7	0	0	0	1	0	1	1

Sætning 8. *Lad* I *være identitetsmatricen og* J *være den matrix hvor alle indgange er* 1*. For et symmetrisk design gælder da:*

$$AA^t = (r - \lambda)I + \lambda J.$$

Desuden er $\det(AA^t) = r^2(r - \lambda)^{v-1}$.

Bevis: Vi har at

$$AA^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1v} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{v1} & \cdots & a_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{v1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1v} & \cdots & a_{vv} \end{pmatrix}.$$

Hvis $i = j$ da er $a_{ij}a_{ij} = 1$ netop når $a_{ij} = 1$ hvilket vil sige at punktet i ligger i blok j. Samtidig er der r blokke som indeholder i, hvilket giver (række i)(række j) $= r$ som er diagonalen af AA^t. Hvis $i \neq j$ da er $a_{ij}a_{ji} = 1$ netop når både $a_{ij} = 1$ og $a_{ji} = 1$, hvilket vil sige at punktet i ligger i blok j og punktet j

ligger i blok i. Samtidig ligger punkterne i og j i λ blokke, hvilket giver (række i)(række j) $= \lambda$. Vi har altså

$$\begin{aligned} AA^t &= \begin{pmatrix} r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda \\ \lambda & \cdots & \lambda & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r-\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \\ &= (r-\lambda)I + \lambda J. \end{aligned}$$

Nu kan vi bruge det, at determinanten ikke ændres, når vi lægger et multiplum af en række til en anden række, og at hvis vi ganger en konstant på en række, så ganges determinanten med samme konstant. Vi lægger de sidste $(v-1)$ rækker til den første og trækker derefter λ gange den første række fra de andre. Herved fås

$$\begin{aligned} \det(AA^t) &= \det \begin{pmatrix} r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda \\ \lambda & \cdots & \lambda & r \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} r+(v-1)\lambda & \cdots & r+(v-1)\lambda \\ \lambda & & \lambda \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda & \cdots & r \end{pmatrix} \\ &= (r+(v-1\lambda))(r-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda & r & & \lambda \\ \vdots & & \ddots & \lambda \\ \lambda & \cdots & \lambda & r \end{pmatrix} \\ &= (r+(v-1)\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & r-\lambda & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (r+(v-1)\lambda)(r-\lambda)^{v-1}. \end{aligned}$$

Eftersom $r = \frac{\lambda(v-1)}{r-1}$ har vi $\lambda(v-1) = r^2 - r$ og $\det(AA^t) = r^2(r-\lambda)^{v-1}$ som ønsket. $\square$

Den følgende ulighed giver os en vigtig egenskab ved 2-design, nemlig at der er mindst lige så mange blokke som der er punkter.

Sætning 9. (Fisher's ulighed).[1]
I et 2*-design er* $b \geq v$.

[1]Resultatet blev vist af R.A. Fisher i 1940 og blev generaliseret i 1953 af K.N. Majumdar til også at omfatte andre t-design.

Bevis: Da $k < v$ og $\lambda > 0$ får vi $r > \lambda$. Ved sætning (8) er $det(AA^t) = r^2(r-\lambda)^{v-1} \neq 0$. AA^t er en $v \times v$ matrix og har dermed rank v. Hvis $b < v$ så er rank(A) $\leq b < v$ som giver rank $(AA^t) < v$, men det er en modstrid. Derfor må $b \geq v$. □

Selvom parametrene for et generelt 2-design opfylder de nødvendige betingelser i sætning (9), så er der blevet vist et strengere krav der sikrer deres eksistens. Følgende vigtige resultat bliver brugt til at vise ikke-eksistensen af nogle 2-design.

Sætning 10. (Bruck-Ryser-Chowla).[2]
Antag, at et symmetrisk 2-design med parametrene v, k og λ eksisterer, da gælder følgende:
i) Hvis v er lige, så er $k-\lambda$ et kvadrattal.
ii) Hvis v er ulige, så har ligningen $z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{(v-1)}\lambda y^2$ en løsning for de hele tal x, y og z, som ikke alle er 0.

Bevis: Antag for $i)$ at v er lige. Vi ved at fordelingsmatricen A for designet er kvadratisk, så $(\det A)^2 = \det(AA^t) = k^2(k-\lambda)^{v-1}$. Det giver $|\det A| = k(k-\lambda)^{(v-1)}$ og da dette er et helt tal er $k-\lambda$ et kvadrattal.

For at bevise $ii)$ skal vi bruge nogle talteoretiske resultater, som bliver angivet her uden bevis:

Lemma 11. *Lagrange's identitet for fire kvadrattal.*

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$$

hvor

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 \\ c_2 &= a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 \\ c_3 &= a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4 \\ c_4 &= a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2. \end{aligned}$$

Lemma 12. *Lagrange's sætning.*
Ethvert positivt heltal kan skrives som en sum af fire kvadrattal.

Nu kan vi se på AA^t. Vi kan associere de ubekendte $x = (x_1, x_2, ..., x_v)$ med punkterne i designet og associere en lineær form L_j med den j'te blok, hvor $L_j = \Sigma_{i=1}^{v} a_{ij}x_i$ for $j = 1, 2, ..., v$. L_j er altså summen af de x_i'er hvis index er et punkt i den j'te blok og $(L_1 \cdots L_v) = xA$. Lad $n = k-\lambda$, så har vi $AA^t = nI + \lambda J$. Vi kommer nu frem til

$$\begin{aligned} &L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_v^2 = xAA^tx^t = x(nI + \lambda J)x^t = nxIx^t + \lambda xJx^t \\ &= n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_v^2) + \lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_v)^2. \end{aligned}$$

[2] R.H. Bruck og H.J. Ryser beviste sætningen for $\lambda = 1$ i 1949, mens det generelle tilfælde blev bevist af S. Chowla og Ryser i 1950.

Ved lemma (12) kan vi skrive $n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ og da vi antager at v er ulige, kan vi dele op i to tilfælde:

Tilfælde I: $v \equiv 1$ mod 4. Ved lemma (11) får vi

$$n(x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + x_{i+3}^2) = y_i^2 + y_{i+1}^2 + y_{i+2}^2 + y_{i+3}^2$$

som giver

$$L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_v^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{v-1}^2 + nx_v^2 + y(x_1 + x_2 + \ldots + x_v)^2. \quad (1)$$

Dette kan vi omskrive ved at lade $w = x_1 + x_2 + \ldots + x_v$ og $y_v = x_v$ og får derved

$$L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_v^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{v-1}^2 + ny_v^2 + \lambda w^2.$$

Her er $L_1, L_2, ..., L_v$ og w rationale linearkombinationer af $y_1, y_2, ..., y_v$ og (1) er en ligning med $y_1, y_2, ..., y_v$ som variable. Sæt nu $L_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1v}y_v$. Da kan vi substituere y_1 med en vilkårlig rational linearkombination af $y_2, ..., y_v$ og opnå en ligning med en variabel mindre. Hvis $b_{11} \neq 1$ kan vi sætte $L_1 = y_1$ hvor $y_1 = \frac{1}{1-b_{11}}(b_{12}y_2 + ... + b_{1v}y_v)$. Hvis $b_{11} = 1$ sætter vi $L_1 = -y_1$ hvor $y_1 = -(b_{12}y_2 + ... + b_{1v}y_v)$. Begge disse muligheder giver ${L_1}^2 = {y_1}^2$ så nu har vi

$$L_2^2 + \ldots + L_v^2 = y_2^2 + \ldots + y_{v-1}^2 + ny_v^2 + \lambda w^2.$$

Ved at gentage denne proces fremkommer ligningen ${L_v}^2 = n{y_v}^2 + \lambda w^2$ hvor L_v og w er rationale multipla af y_v. Lad y_v være et heltal x, hvor x er et multiplum af L_v og w's nævnere. Da har vi hele tal x, y og z med $x \neq 0$ således at $z^2 = nx^2 + \lambda y^2$.

Tilfælde II: $v \equiv 3$ mod 4. Lad x_{v+1} være en ny ubekendt og læg $n{x_{v+1}}^2$ til på begge sider af (1). Det giver

$$L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_v^2 + n{x_{v+1}}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{v-1}^2 + nx_v^2 + n{x_{v+1}}^2 + \lambda w^2.$$

Dette kan vi omskrive ved at bruge $y_v = x_v$ og $y_{v+1} = x_{v+1}$ og får

$$L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_v^2 + n{x_{v+1}}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{v-1}^2 + n{y_v}^2 + n{y_{v+1}}^2 + \lambda w^2.$$

Nu kan vi anvende samme fremgangsmåde som i Tilfælde I og når frem til $n{x_{v+1}}^2 = n{y_{v+1}}^2 + \lambda w^2$. Her er x_{v+1} og w rationale multipla af y_{v+1}. Lad y_{v+1} være et helt tal som er et multiplum af x_{v+1} og w's nævnere. Da har vi en heltalsløsning til ligningen $z^2 = nx^2 + \lambda y^2$. $\square$

Vi vil nu betragte en særlig type 2-design.

Definition 13. *Et* 2*-design med* $k = 3$ *og* $\lambda = 1$ *kaldes et Steiner tripelsystem*[3] *af orden* v*, og vi skriver STS*(v).

Sædvanligvis omtales blokkene i et STS(v) som linier. Der er altså tale om et design, hvor hver linie indeholder netop $k = 3$ punkter og vi kan derfor tænke på en linie som en "tripel."Desuden ligger hvert par af punkter i $\lambda = 1$ linie hvilket betyder, at hvis vi vil afgøre om et 2-design er et STS(v), så er det forholdsvis enkelt at se om dette er opfyldt. Her følger en sætning, der giver nødvendige og tilstrækkelig betingelser for eksistensen af et STS(v).

Sætning 14. *Et STS*(v) *eksisterer hvis og kun hvis enten* $v = 0$ *eller* $v \equiv 1$ *eller* 3 *mod* 6.

Det skal bemærkes, at tilfældene $v = 0, 1$ og 3 giver trivielle design; STS(0) har ingen punkter eller linier; STS(1) har et punkt og ingen linier; STS(3) har tre punkter og en linie.

Beviset for sætning (14) er meget omfangsrigt, så vi vil nøjes med at skitsere forløbet. For at vise nødvendigheden, antages det at et STS(v) findes. Vi bruger igen et tælleargument til at fastslå at

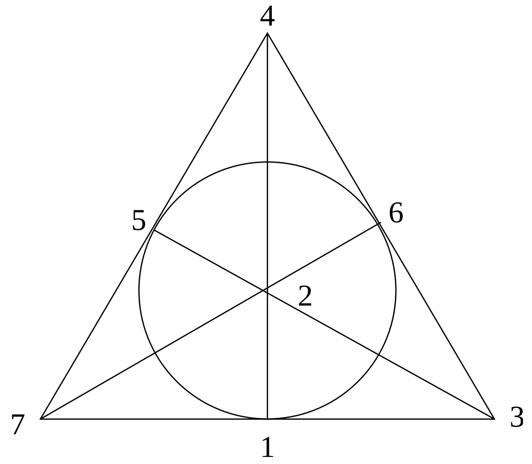
- Ethvert punkt ligger i $r = \frac{(v-1)}{2}$ tripler.
- Der er ialt $b = \frac{v(v-1)}{6}$ tripler.

Herefter bemærkes det at for $n > 0$ er både r og b hele tal og at v er ulige, dvs. $v \equiv 1, 3$ eller 5 mod 6. Til sidst udelukkes muligheden at $v \equiv 5$ mod 6.

Beviset for, at sætningens betingelser er tilstrækkelige, er todelt: For tilfældet $v \equiv 3$ mod 6 benytter vi en direkte konstruktion af punkterne og triplerne, hvorefter deres antal tælles for at sikre, at der er så mange som definitionen af et STS(v) foreskriver. Derefter vises det at to vilkårlige punkter ligger i en entydigt bestemt tripel. For tilfældet $v \equiv 1$ mod 6 tages en rekursiv konstruktion i brug, hvori det vises hvordan vi kan bygge større STS'er ud fra mindre. $\square$

Eksempel 15. *Da* $7 \equiv 1$ *mod* 6 *eksisterer et STS*(7). *Mængden* $\mathcal{V}$ *af punkter og* $\mathcal{B}$ *af linier er opskrevet i eksempel (5) og fordelingsmatricen ses i eksempel (7). Herudover er dette design illustreret på nedenstående figur.*

[3] Denne type design har lidt misvisende fået navn efter J. Steiner som i 1853 fremsatte nogle eksistensproblemer, men de svarer ikke til betingelserne for eksistensen af STS(v).



Indtil nu har vi set på STS(v) med udgangspunkt i kombinatoriske metoder, men vi kan også konstruere sådanne design algebraisk.

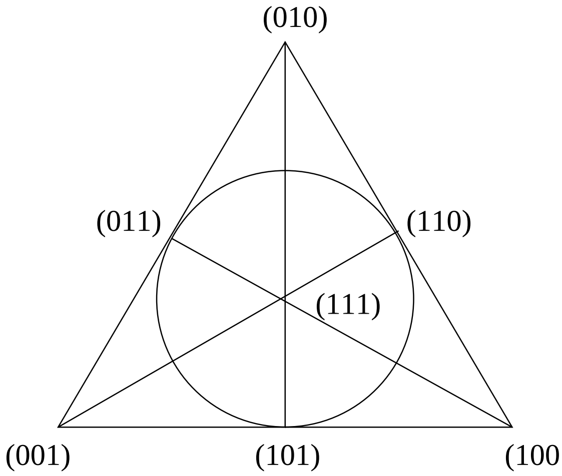
Vi betragter legemet $\mathbb{Z}/2$ og lader W være et vektorrum af dimension $(n+1)$ over $\mathbb{Z}/2$. Vi kan tænke på vektorerne i W som mængden af alle $(n+1)$-tupler bestående af elementer i $\mathbb{Z}/2$. Desuden er $|W| = 2^{n+1}$. Nu lader vi $\mathcal{V}$ betegne mængden af vektorer i W som er forskellige fra nul, hvilket giver $|\mathcal{V}| = 2^{n+1} - 1$. Lad os se på mængden $\{\{x, y, z\} : x + y + z = 0\}$ og vise følgende påstand: Elementerne $\{x, y, z\}$ i den nævnte mængde udgør triplerne i et STS($2^{n+1} - 1$).

Vi kan bemærke, at for $x + y + z = 0$ vil den tredje være fastlagt entydigt, når vi kender to af x, y og z. Nu skal det vises at to vilkårlige punkter (som er vektorerne i $\mathcal{V}$), ligger i netop en tripel. Det svarer til at vise, at hvis $x \neq y$ og begge er forskellige fra 0, så er z forskellig fra begge og $z \neq 0$. Antag at $0 \neq x \neq y \neq 0$, så gælder det at $z = -(x+y) = x+y$, eftersom $-1 = 1$ i $\mathbb{Z}/2$. Da $y \neq 0$ får vi $z \neq y$ og tilsvarende da $x \neq 0$ får vi $z \neq x$, og endelig giver $x \neq y$ at $z = x + y = x - y \neq 0$. Altså kan vi konkludere at to vilkårlige punkter ligger i netop en tripel. Da der er $2^{n+1} - 1$ punkter har vi, i følge definition (13), konstrueret et STS($2^{n+1} - 1$).

Nu ligger det lige for at se på udfaldet af denne konstruktion, når vi sætter $n = 2$. Der fremkommer et STS(7):

Vi får, at W er et vektorrum bestående af $2^3 = 8$ vektorer over $\mathbb{Z}/2$, som giver mængden af punkter $\mathcal{V} = \{(100), (010), (001), (110), (101), (011), (111)\}$ [4] og $|\mathcal{V}| = 7$. Triplerne dannes som i konstruktionen ved at samle tre punkter hvis sum er nul, f.eks. $(100) + (010) + (110) = (000)$. Punkterne og triplerne kan illustreres ved følgende diagram, som vi genkender fra designet i eksempel (15).

[4] Når der står (100) menes der den tredimensionale vektor $(1, 0, 0)$.



Afslutningsvis kan vi indse entydigheden af STS(7): Givet et STS af orden 7. Antag at to vilkårlige tripler B_1 og B_2 ikke har nogen punkter til fælles. Et punkt fra B_1 ligger i en tripel B_3 sammen med et punkt fra B_2, og ydermere ligger der endnu et punkt i triplen B_3. Når punkterne fra B_1 og B_2 kombineres, giver det os 6 tripler i modstid med, at vi lagde ud med et STS(7). Vi kan altså konkludere at to vilkårlige tripler i designet har et punkt tilfælles. Dette betyder at vi kan nummerere punkterne som $1, 2, ..., 7$ og opskrive triplerne som angivet i eksempel (15). Givet to STS(7) kan vi herved finde en bijektiv afbildning, der sender triplerne fra det ene design over i triplerne fra det andet, så STS af orden 7 er entydigt bestemt. Det kan i øvrigt vises, at STS(7) er isomorf med det projektive plan af orden 2.

Denne fremstilling er baseret på følgende tekster:

Litteraturliste

[1] Beth, T.; Jungnickel, D.; Lenz, H.:*Design Theory*, Vol.1, 2nd ed. Cambridge University Press, 1999.

[2] Cameron, P.J.: *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms,* Cambridge University Press, 1994.

[3] Cameron, P.J.; van Lint, J.H.:*Designs, Graphs, Codes and Their Links,* Cambridge University Press, 1991.

[4] Hughes, D.R.; Piper, F.C.:*Design Theory,* Cambridge University Press, 1985.

En replik fra Studenterpræsten

alias Nicolai Halvorsen

I sidste nr. af FAMØS var der en tegneserie af hr. Thomas Edison, hvori der afslutningsvis blev stillet to spørgsmål: „Tror I Studenterpræsten læser FAMØS? Tror I Gud gør?“ Nu kan jeg jo ikke vide hvad læsere af FAMØS tror, så derfor kan jeg ikke besvare det første spørgsmål. Men den implicitte videnskabelige hypotese „læser studenterpræsten FAMØS?“ kan jeg umiddelbart verificere. Ja det gør jeg da. Og jeg har vidner på det. Det er derfor ikke længere et spørgsmål om tro, men en kedelig kendsgerning. Om jeg så forstår det jeg læser er et andet spøgsmål, som generelt kan besvares med et nej. Jeg forstår som regel ikke mange suk af de indviklede matematiske udregninger og opgaver, hvilket alene skyldes min manglende dannelse indenfor matematikken. Som klassisk sproglig student er mine matematiske forudsætninger ganske beskedne og jeg har ikke udviklet dem i stor stil siden gymnasiet.

Det andet spørgsmål, „Tror I Gud læser FAMØS“ kan jo også besvares ved en empirisk spørgeundersøgelse blandt FAMØS' læsere. Den implicitte hypotese „læser Gud FAMØS?“ er derimod vanskeligere at besvare. Det må antages at man ikke kan få et entydigt svar fra Gud på dette spørgsmål. Det kan ikke engang falsificeres, og må derved afvises som et videnskabeligt spørgsmål (iflg. Popper). Selv om hr. Edison skulle få svaret i en direkte åbenbaring , kan man jo så tvivl om, hvorvidt åbenbaringen stammede fra Gud eller andetsteds fra og dermed om svaret rigtighed. Det kunne jo være djævelen som var ude på løjer eller det kunne være hr. Edisons egen hjerne som spillede ham et puds. Dette spørgsmål forbliver altså et trosspøgsmål. Man kunne selvfølgelig forsøge med henvisning til Guds alvidenhed teologisk at sandsynliggøre, at Gud om ikke læste, så dog kendte indholdet af FAMØS, ja ikke alene dette nr. af FAMØS, men også alle forgående og alle kommende nr.

Men spørgsmålet for os er vel om den information gør nogen forskel?

I øvrigt mener jeg at de to udsagn fra Jesus og Hitler ikke kommer ind under fænomenet videnskab og derfor uegnet til at demonstrere T.S. Kuhns teori på. Jeg tror ikke der er nogen teologer eller historikere som vil afvise af Hitler sikkert har sagt noget fornuftigt i et svagt øjeblik (men mente han det?) og at Jesus/Mathhæus ikke kun prædikede næstekærlighed og forsoning. Det som altså hævdes som, „det vi betragter som sikker viden“, er m.a.o. blot fordomme og populære forestillinger. En egentlig fortolkning af det pågældende skriftsted hos Matthæus vil det føre for vidt at præsentere her. (Men jeg har skrevet en prædiken over næsten samme tema som kan læses her[1])

Desuden synes det mig, som om viden og indsigt benyttes i videnskabelig betydning i forlængelse af Kuhn og med henvisning til facts. Men citaterne og cirklen med det politiske betonkedsløb handler om etik, kærlighed, samvittighed, krig, frihed, menneskesyn og politiske/ideologisk retorik, men ikke om videnskab. Man kan jo godt spørge om det (videnskabeligt) sande uden videre også er (etisk) godt.

[1] `http://www.sund.ku.dk/praest/ressourcer/Kirke/Prædikener/2002-02-27%20tema.htm`

Opgaver

Ulrik Torben Buchholtz

Vi fik ingen løsninger til den anden af sidste nummers opgaver. Derfor gentager vi denne, idet vi dog denne gang vil give det hint, at de studerende, der har haft matematik XX, har en smule bedre forudsætninger for at løse den end andre studerende.

En lappeløsning

Et stofstykke med areal 1 har fået påsyet 5 lapper, hver med areal større end eller lig $1/2$. Vis, at der findes to lapper med fælles areal større end eller lig $1/5$. Præcisér om nødvendigt opgaven.

Der skal dog også være plads til en ny opgave. Den kommer her:

En følge, tak!

Vis, at der for ethvert positivt heltal $a_1 > 1$ findes en voksende følge af positive heltal $a_1, a_2, a_3, \ldots$, således at $a_1^2 + \cdots + a_k^2$ er deleligt med $a_1 + \cdots + a_k$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

Vi gør opmærksom på, at der igen vil blive uddelt en præmie for den bedste besvarelse af en eller begge opgaver.

FAMØS december 2003.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-,
Økonomi- og Statistikstuderende ved
Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Mathias Winther Madsen
Tarje Bargheer
Ulrik Torben Buchholtz

Tegner:
Mathias W. Madsen

Deadline for næste nummer:
Fredag den 5. marts 2004

Indlæg modtages gerne og bedes
sendt til `famos@math.ku.dk` – meget
gerne skrevet i LaTeX.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk
Oplag: 500 stk.
ISSN 1395-2145