# FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

17. årgang, nr. 1, oktober 2003

Kurt Gödel (1906-1978), logikkens supermand, er mest kendt for sine ufuldstændighedssætninger, der siger, at matematikken enten er inkonsistent (indeholder paradokser) eller ufuldstændig (indeholder sætninger, der hverken kan bevises eller modbevises). Vi håber stadig på det sidste. Gödel var plaget af depressioner og nervøse sammenbrud og endte sine dage i et anfald af paranoia ved at sulte sig i hjel af frygt for forgiftning.

# Indhold

# Velkommen

Tarje Bargheer

Så er FAMØS gået ind i sin 17. årgang! – Men tilsyneladende er vi stadigvæk helt ukendte for det store segment af russer! – Det retter vi her op på, forhåbentligt en gang for alle, ved at fortælle at FAMØS er et gratis fagblad for alle studerende og ansatte ved matematisk institut (se evt. `www.math.ku.dk/famos` for tidligere versioner). Redaktionen består af frivillige studerende (det kunne fx være dig), som gerne bruger en eftermiddag pr. kvartal på at redigere bladet sammen af de tekster som løber ind på `famos@math.ku.dk` (samt opfordre lidt her og der og skrive lidt selv). Alle kan (og bør) skrive et indlæg; næsten det eneste vi forlanger for at bringe indlægget, er at vi kan skelne det fra det hav af spam-mails, som florerer på vores mailingliste!

FAMØS har endvidere (som du sikkert kan se) kulørte for- og bagsider, ikke desto mindre plejer stoffet vi behandler dog at være temmelig disjunkt med hvad de kulørte ugeblade ellers beskæftiger sig med – som en skimning af de øvrige sider i dette blad, sikkert vil overbevise om! Men rusen omkring kronprinsensens forlovelse er dog også nået helt ind i FAMØS' redaktion, så herfra lyder et hurra for kongefamilien! Kronprins Frederiks har nemlig været så venlig at vælge en forlovet på en så snedig måde at Danmarks kommende svigerkonge bliver matematiker! Marys far, John Dalgleish Donaldson er professor i anvendt matematik ved KAIST universitetet i Sydkorea; kan man andet end glæde sig over det?

# Om faktorisering af store tal

Anders Thorup

I FAMØS fra maj 2003 (nr. 4, 16. årgang) skriver Jes Hansen i en fornøjelig artikel om hvordan et tal $n$ med 120 cifre, nævnt i noterne til Matematik 2AL, er blevet faktoriseret. Han slutter med at nævne, at "det ikke var helt så umuligt at faktorisere $n$ som Anders Thorup havde forestillet sig!"

Nu ved Jes Hansen jo nok ikke hvad jeg forestillede mig, da jeg i sin tid konstruerede tallet. Allerede dengang, i 1996, kunne "man" faktisk faktorisere tal med 120 cifre, og det var helt klart, at grænsen for hvad man kunne faktorisere hastigt flyttede sig. Alene af den grund forestillede jeg mig bestemt ikke, at det var *umuligt* at faktorisere tallet. Men jeg påstod, at ingen læsere af noterne ville kunne angive faktoriseringen, vel vidende, at det sikkert kun ville være et spørgsmål om tid før det kunne gøres på en almindelig PC. Det var ment som en provokerende udfordring, og jeg er da glad for at Jes Hansen tog imod den. Og stolt over, at tallet sådan måtte ud på internettet for at blive knust, — og ikke det mindste skamfuld over at min spådom ikke holdt stik.

I dag er tal med 120 cifre i øvrigt meget mindre end, hvad man normalt gider beskæftige sig med. Grænsen for hvor store tal, man kan faktorisere, ligger lige under 160 cifre, og dagens rigtig store udfordring er et tal med 174 cifre; det kan man tjene penge på at faktorisere, se for eksempel

`http://www.rsasecurity.com/rsalabs/challenges`

# Store tal i matematikken

Jes Hansen

Har du tænkt over hvornår du sidst har haft brug for et naturligt tal større end f.eks. $10^{50}$? Selv om matematik også er tallenes videnskab er det ikke særlig tit at man møder andet end "små" tal. I denne artikel vil jeg beskrive to tal fra matematikken der er væsentlig større end hvad man ellers plejer at støde på.

## Skewes' tal

Det første tal jeg vil omtale er Skewes tal. Det forekommer i forbindelse med talteori.

Lad $\pi(n)$ være antallet at primtal mindre end $n$, og lad

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Det viser sig nu at $\pi(n) < \mathrm{Li}(n)$ for $n$ "lille". Man har aldrig fundet en værdi for $n$ hvor uligheden fejler, og således har både Gauss og Riemann formodet at uligheden gælder for alle $n$. Dette viser sig dog ikke at være tilfældet. Littlewood beviste i 1914 at uligheden vender uendelig ofte, når bare $n$ er stor nok. Herefter viste Skewes at $\mathrm{Li}(n) - \pi(n) = 0$ skifter fortegn et eller andet sted før $Sk_1$, hvor $Sk_1$ er

$$Sk_1 \sim 10^{10^{10^{34}}}.$$

Denne grænse er dog senere blevet sænket til $10^{371}$. $Sk_1$ er et ret stort tal. $10^{10^{34}}$ bliver et 1-tal med 10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000 nuller efter sig. Kalder vi dette tal for $k$, så er $Sk_1$ et ettal med $k$ nuller efter sig.

## Pil-notation

Som man kan se kan man med exponentiation alene lave sig nogle ret store tal, men når man for alvor skal til at lave store tal, må man ty til andre midler. Knuth har lavet noget han kalder for pilnotation. Det når ud på følgende:

Vi sætter

$$m \uparrow n = m^n.$$

Så definerer vi

$$
\begin{aligned}
&m \uparrow\uparrow 0 = 1 \textbf{ og } m \uparrow\uparrow n = m \uparrow (m \uparrow\uparrow [n-1])\\
&m \uparrow\uparrow\uparrow 0 = 1 \textbf{ og } m \uparrow\uparrow\uparrow n = m \uparrow\uparrow (m \uparrow\uparrow\uparrow [n-1])\\
&m \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 0 = 1 \textbf{ og } m \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow n = m \uparrow\uparrow\uparrow (m \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow [n-1])\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Fredeligt ser det ud, men skindet bedrager.

$$
\begin{aligned}
m \uparrow\uparrow 2 &= m \uparrow (m \uparrow\uparrow 1)\\
&= m^{m\uparrow\uparrow 1}\\
&= m^{m\uparrow(m\uparrow\uparrow 0)}\\
&= m^{m\uparrow 1}\\
&= m^m
\end{aligned}
$$

og på samme måde

$$
\begin{aligned}
m \uparrow\uparrow 3 &= m \uparrow m \uparrow m = m \uparrow (m \uparrow m)\\
&= m \uparrow m^m\\
&= m^{m^m}
\end{aligned}
$$

Når først man kommer til $m \uparrow\uparrow\uparrow n$ bliver ens forestillingsevne strakt en smule:

$$
\begin{aligned}
m \uparrow\uparrow\uparrow 2 &= m \uparrow\uparrow m\\
&= \underbrace{m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}}}_{m}\\
m \uparrow\uparrow\uparrow 3 &= m \uparrow\uparrow m \uparrow\uparrow m\\
&= \underbrace{m \uparrow m \uparrow m \ldots \uparrow m}_{\underbrace{m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}}}_{m}}\\
&= \underbrace{m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}}}_{\underbrace{m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}}}_{m}}
\end{aligned}
$$

og så videre… Vi kan således udregne

$$
3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{7.625.597.484.987}
$$

Dette tal er i øvrigt det tredje Ackermann tal. Disse er defineret som

$$a_n = n \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{n} n$$

## Grahams tal

Det andet store tal jeg vil tale om er Grahams tal. Ligesom Skewes tal er det en øvre grænse. Her drejer det sig en et konbinatorisk problem indenfor Ramsey teori, hvor Graham viste at dette tal er en øvre grænse. Da jeg først så Grahams tal blev min egen opfattelse af det uendelige flyttet lidt længere ud…

Ved at bruge maskineriet fra før kan vi nu beskrive Grahams tal således: Se på følgen

$$\begin{aligned} G_1 &= 4 \\ G_2 &= 3 \underbrace{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}_{G_1} 3 \\ G_3 &= 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{G_2} 3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ G_{65} &= 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{G_{64}} 3 \end{aligned}$$

$G_{65}$ er da Grahams tal! Dette tal har også æren af at være det største tal der har optrådt i et bevis ifølge Guinnes rekordbog. Som sagt er dette tal en øvre grænse, men dem der ved noget om problemet, formoder at svaret på problemet sandsynligvis er 11. Som det sikkert fremgår kan man ikke skrive alle pilene ud i tallet, så hvis man ikke vil nøjes med at definere tal som sådanne følger må man have fat i noget lidt mere potent.

## Kædepilnotation

Conway har fundet på at lave en slags generalisation af pilnotationen. Den er defineret således:

$$\begin{aligned} m \to n \to p &= m \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{p} n \\ m \to n \to 1 &= m \to n = m^n \end{aligned}$$

Længere kæder evalueres ved følgende regler:

$$
\begin{aligned}
m \to \cdots \to n \to p \to 1 &= m \to \cdots \to n \to p \\
m \to \cdots \to n \to 1 \to q &= m \to \cdots \to n \\
m \to \cdots \to n \to p+1 \to q+1 &= m \to \cdots \to n \to (m \to \cdots \to n \to p \to q+1) \to q
\end{aligned}
$$

For eksempel:

$$
\begin{aligned}
3 \to 3 \to 2 &= 3 \to (3 \to 2 \to 2) \to 1 \\
&= 3 \to (3 \to 2 \to 2) \\
&= 3 \to (3 \to (3 \to 1 \to 2) \to 1) \\
&= 3 \to (3 \to 3 \to 1) \\
&= 3^{3^3} \\
&= 3^{27}
\end{aligned}
$$

Et andet eksempel, som jeg dog vil overlade til læseren at regne helt ud, er

$$
\begin{aligned}
3 \to 2 \to 4 \to 4 &= \cdots \\
&= 3 \to 2 \to (3 \to 2 \to (3 \to 2 \to 9 \to 3) \to 3) \to 3 \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

Med denne notation kan man vise at $G_{65} < 3 \to 3 \to 3 \to 3$.

Dette afslutter historien om de to store tal. Til sidst kan jeg nævne at antallet af elementarpartikler i det synlige Univers næppe overstiger $10^{90}$.

# Side 9-sætningen

Ulrik Torben Buchholtz

## Beattys sætning

Nu har vi jo ikke ligefrem været oversvømmet med forslag til side 9-sætninger her på FAMØS-redaktionen – det ville vi dog slet ikke have noget imod at blive! Derfor må den ærede læser affinde sig med, hvad min begrænsede fantasi kunne diske op med. Det drejer sig om Beattys sætning, og jeg håber, at ikke alt for mange af læserne allerede er bekendt med denne lille perle.

Lad $\alpha$ være et irrationelt tal større end $1$. Da findes et andet irrationelt tal $\beta$, også større end $1$, så ligningen $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ er opfyldt. Givet et reelt tal $x$, lader vi $\lfloor x \rfloor$ betegne det største hele tal mindre end eller lig $x$. For hvert naturligt tal $n$ kan vi så danne de naturlige tal $\lfloor n\alpha \rfloor$ og $\lfloor n\beta \rfloor$. Det giver os altså to voksende følger, $\{\lfloor n\alpha \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{\lfloor n\beta \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$. Disse kaldes beattyfølgerne for hhv. $\alpha$ og $\beta$. Nu er vi klar til at formulere sætningen.

**Beattys sætning.** *Hvert naturligt tal forekommer præcis én gang blandt følgeelementerne for beattyfølgerne for $\alpha$ og $\beta$.*

*Bevis.* Påstanden kommer ud på, at der findes netop ét tal af formen $n\alpha$ eller $n\beta$ i hvert interval $]N, N+1[$, $N \in \mathbb{N}$. Vi viser, at der findes $N-1$ tal af formen $n\alpha$ eller $n\beta$ mindre end $N$ for hvert $N \in \mathbb{N}$.

Der er $\lfloor N/\alpha \rfloor$ tal af formen $n\alpha$ mindre end $N$, og tilsvarende er der $\lfloor N/\beta \rfloor$ tal af formen $n\beta$ mindre end $N$. Vi skal altså vise, at $\lfloor N/\alpha \rfloor + \lfloor N/\beta \rfloor = N - 1$. Men da $\alpha$ og $\beta$ er irrationelle, har vi ulighederne

$$\tfrac{N}{\alpha} - 1 < \left\lfloor \tfrac{N}{\alpha} \right\rfloor < \tfrac{N}{\alpha} \quad \text{og} \quad \tfrac{N}{\beta} - 1 < \left\lfloor \tfrac{N}{\beta} \right\rfloor < \tfrac{N}{\beta}.$$

Lægges disse sammen, fås under udnyttelse af identiteten $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$, at $N-2 < \lfloor \frac{N}{\alpha} \rfloor + \lfloor \frac{N}{\beta} \rfloor < N$. Heraf fås netop det ønskede. $\square$

## Samuel Beatty

Samuel Beatty, 1881–1970, var den første der fik en Ph.D. i matematik fra et canadisk universitet. Han offentliggjorde den sætning, der nu er opkaldt efter ham, i form af et problem i American Mathematical Monthly i 1926. Det elegante bevis, vi lige har givet, er fra 1927 af Ostrowski og Aitken.

Der er en del anvendelser af beattyfølger, af hvilke vi lige vil nævne en.

# Wythoffs spil

Wythoffs spil er et spil for to personer. Spillerne fjerner skiftevis spillebrikker fra to stabler. Vinderen er den, der fjerner den sidste brik. I en tur kan man tage et vilkårligt antal brikker fra én af stablerne eller det samme antal fra begge. Hvis altså $(a, b)$ repræsenterer antallet af brikker i stablerne, kan man altså i en tur reducere til $(a-t, b)$, $(a, b-t)$ eller $(a-t, b-t)$, hvor $t$ er et positivt heltal.

Når man skal finde en strategi for vinde et sådant spil, går det ofte ud på at finde de vindende positioner. Det er positioner, hvor man kun kan tabe, når man er i trækket. I Wythoffs spil er $(0, 0)$ og $(1, 2)$ for eksempel vindende positioner. Der gælder nu det overraskende, at de vindende positioner netop er $(0, 0)$ er $(\lfloor n\tau \rfloor, \lfloor n\tau^2 \rfloor)$, $n \in \mathbb{N}$, hvor $\tau$ er den positive rod i polynomiet $\tau^2 - \tau - 1$, dvs. det gyldne snit plus en. Dette kan læseren selv overbevise sig om, når vi nævner, at disse talpar $(a_n, b_n)$, $a_n \leq b_n$, er de eneste med egenskaberne

1. $b_n - a_n = n$ for alle $n$,
2. $a_n$ er det mindste tal, der ikke har indgået i tidligere par.

# Referencer

Min fremstilling af Beattys sætning baserer sig på Ross Honsbergers *Ingenuity in Mathematics* (MAA, 1970, pp. 94–95). Der findes en meget righoldig referenceliste til emner med tilknytning til beattyfølger i Kenneth Stolarskys *Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators* (Can. Math. Bull. **19** (1976), pp. 473–482), hvor han i øvrigt viser, at fibonaccifølgen, som Søren Eilers introducerede ved et studenterkollokvium i sidste studieår forklædt som et substitionssystem, også kan fås fra beattyfølgen for tallet $\tau$ ovenfor.

# Artikelserie: Hvad forsker jeg i?

Christian U. Jensen

I vores forskerserie er vi nu nået til professor Christian U. Jensen, der blandt andet underviser i 3AL og snart går på pension. Følgende er en foreløbig udgave af en artikel, som Chr. U påtænker at indsende til et tidsskrift. Grundet en kort tidsfrist har Chr. U ikke kunnet nå at oversætte den til dansk og den bringes derfor i engelsk udgave. Artiklens titel er "How many real roots can a solvable polynomial have?"

## Introduction and Loewy's Theorem

By a classical theorem the number of real roots of an irreducible polynomial $f(X)$ of odd prime degree $p$ over a real number field $K$ is either $1$ or $p$ if the Galois group of $f(X)$ over $K$ is solvable.[1]

This result was generalized by A. Loewy in the following way: For a polynomial $f(X)$ we let $r(f)$ denote the number of real roots of $f(X)$.

**Loewy's Theorem.** *Let $K$ be a real number field and $f(X)$ an irreducible polynomial in $K[X]$ of odd degree $n$. If $p$ is the smallest prime divisor of $n$ and the Galois group of $f(X)$ over $K$ is solvable, then $r(f) = 1$ or $p$ or satisfies the inequalities $p \leqq r(f) \leqq n - p + 1$.*

When the degree of $f(X)$ is a prime number the above theorem is an immediate corollary to the following

**Galois's Theorem.** *Let $f(X)$ be an irreducible separable polynomial over a field $K$ having a solvable Galois group over $K$. If the degree of $f(X)$ is a prime number, then any two roots of $f(X)$ generate the splitting field of $f(X)$ over $K$.*

Galois' Theorem which is basically a group theoretic result cannot be generalized to yield a proof of Loewy's theorem.

Indeed, for any odd prime number $p$ there exists an irreducible polynomial $f(X)$ in $\mathbb{Q}[X]$ of degree $p^2$ with solvable Galois group having $p-1$ roots $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ such that no other root of $f(X)$ lies in the field $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$. For instance, for $p = 3$, the polynomial $f(X) = X^9 - 4X^3 + 2$ is such an example.

[1] By the Galois group of a separable polynomial $f(X)$ over a field $K$ we mean the Galois group of the splitting field of $f(X)$ over $K$.

Loewy's theorem was published in [3], a journal which is not easily available. It might then be of some interest to present a proof of that result and also improving it by giving more precise information concerning the number of real roots of such polynomials. The proofs in section 5 only depend on classical Galois theory and could be given in a standard course in Galois theory. Section 5 is more technical where one needs Hilbert's irreducibility theorem and the existence of generic extensions to construct solvable irreducible polynomials with prescribed numbers of real roots. We just outline the strategy of the proofs, but do not give details.

It is convenient to introduce the following notation. For a real number field $K$ and a positive odd integer $n$ we define

$$C_K(n) = \left\{ r(f) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ an irreducible polynomial in } K[X] \\ \text{with solvable Galois group} \end{array} \right\}$$

and define $C(n)$ as the union of the $C_K(n)$'s, $K$ running through all real number fields. In other words a positive integer $N$ belongs to $C(n)$ if and only if there exists a real number field $K$ and an irreducible polynomial $f(X)$ in $K[X]$ having degree $n$ and solvable Galois group such that $r(f) = N$.

By induction on the degree Loewy's theorem is an immediate consequence of the following

**Theorem 1.** *For any positive odd integer $n$ we have the following inclusion*

$$C(n) \subseteq \bigcup C(d')^{<d>} \qquad (\Diamond)$$

*where $d$ and $d'$ run through divisors of $n$ such that $dd' \mid n$ and $d' \neq n$. Here for a set $A$ of integers $A^{<d>}$ denotes the set of numbers that can be written as a sum of $d$ numbers in $A$.*

It is unknown (to the author) if the inclusion ($\Diamond$) in Theorem 1 is always an equality. However, the above inclusion *is* an equality when the degree $n$ is a power $p^h$ of an odd prime $p$. Indeed, for a real number field $K$ there exists an irreducible solvable polynomial in $K[X]$ of degree $p^h$ with $r$ real roots if and only if $r \leqq p^h$ and $r$ is $\equiv 1$ modulo $(p-1)$. In the above terminology this is expressed in

**Theorem 2.** *For every real number field $K$ and every power $n = p^h$ of an odd prime number $p$, the set $C_K(n)$ consists exactly of the natural numbers $\leqq p^h$ which are $\equiv 1$ modulo $(p-1)$.* (Theorema *multo* pulchrius demonstratione quod doleo)

By these results knowledge of the number of real roots of an irreducible polynomial may yield some information about the Galois group of the polynomial. For instance, if the number of real roots of an irreducible polynomial of degree $p^h$ is $\not\equiv 1 \bmod (p-1)$ the Galois group of the polynomial is not solvable.

**Exercise.** *Let $f(X)$ be an irreducible polynomial in $\mathbb{Q}[X]$ of degree 35. If $f(X)$ has exactly 9 real roots, show that the Galois group of $f(X)$ over $\mathbb{Q}$ is not a solvable group.*

# Proof of Theorem 1

The proof of Theorem 1 is based on four lemmas. We omit the proofs of lemma 1 and lemma 2 since they are just easy exercises in standard Galois theory.

**Lemma 1.** *Let $L/K$ be a finite normal extension with Galois group $G$ and let $f(X)$ be a monic irreducible polynomial in $K[X]$ of degree $n$. All irreducible polynomials in $L[X]$ that divide $f(X)$ have the same degree. If $g(X)$ is a monic divisor of $f(X)$ and irreducible in $L[X]$ then $f(X)$ is the product of the distinct automorphic images of $g(X)$ under $G$. The number of irreducible factors of $f(X)$ in $L[X]$ is a divisor of $n$ and of $[L : K]$.*

**Lemma 2.** *Let $K$ be a real number field and $L/K$ a finite abelian extension. If $\beta$ is a real number in $L$, then $\sigma\beta$ is also a real number in $L$ for all $\sigma \in Gal(L/K)$. If $f(X)$ is an irreducible polynomial in $K[X]$ with at least one real root, then every irreducible monic polynomial in $L[X]$ dividing $f(X)$ has real coefficients.*

**Lemma 3.** *Let $K$ be a number field which is invariant under complex conjugation and $c$ a real number in $K$. Assume $K$ contains a primitive $p$-th root of unity $\zeta_p$, where $p$ is an odd prime. Let $L = K(\sqrt[p]{c})$, $\sqrt[p]{c}$ being the real root of $x^p - c$. If $\beta$ is a real number in $L \setminus K$, then $\sigma\beta$ is non-real for $\sigma \in Gal(L/K) \setminus id_L$.*

*Proof.* We may assume that $\sqrt[p]{c} \notin K$. The number $\beta$ can in a unique way be written $\beta = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\sqrt[p]{c})^i$, where $a_i \in K$ and $a_i \neq 0$ for at least one $i$, $1 \leqq i \leqq p-1$. In the following $\overline{x}$ denotes the complex conjugate of a number $x$.

Since $\overline{\beta} = \sum_{i=0}^{p-1} \overline{a_i}(\sqrt[p]{c})^i$ and $\overline{a_i} \in K$ and $\beta$ is real, we conclude that $a_i$ is real for all $i$'s.

For the non-trivial automorphism $\sigma$ in $Gal(L/K)$ we may assume that $\sigma(\sqrt[p]{c}) = (\sqrt[p]{c})\zeta_p$. Now,

$$\sigma\beta = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\sqrt[p]{c}\zeta_p)^i \quad \text{and} \quad \overline{\sigma\beta} = \sum_{i=0}^{p-1} \overline{a_i}(\sqrt[p]{c}\overline{\zeta_p})^i.$$

If $\sigma\beta$ were real, then $\sigma\beta = \overline{\sigma\beta}$ and thus $a_i\zeta_p^i = a_i\zeta_p^{-i}$ for all $i$'s. But there exists an $i$, $1 \leqq i \leqq p-1$, such that $a_i \neq 0$. But since $p$ is odd, $\zeta_p^i \neq \zeta_p^{-i}$. This gives the desired contradiction. $\square$

**Lemma 4.** *Let $K$ be a number field which is invariant under complex conjugation and contains a primitive $p$-th root of unity $\zeta_p$, $p$ being a prime number. Let $\alpha$ be a number in $K$ such that the real value of $\sqrt[p]{c}$ lies in $K$, where $c = \mid \alpha \mid^2 = \alpha\overline{\alpha}$. Then, if $\beta$ is a real number in the field extension $L = K(\sqrt[p]{c})$, all automorphic images $\sigma\beta$, $\sigma \in Gal(L/K)$, are real.*

*Proof.* First, let $\beta$ be an arbitrary number in $L$ and write

$$\beta = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\sqrt[p]{c})^i, \ a_i \in K.$$

If we as before let $\overline{x}$ denote the complex conjugate of $x$ we get:

$$\sqrt[p]{\alpha}\overline{\sqrt[p]{\alpha}} = \sqrt[p]{c}; \ \overline{(\sqrt[p]{\alpha})^i} = \frac{(\sqrt[p]{c})^i}{\alpha}(\sqrt[p]{\alpha})^{p-i}$$

hence

$$\overline{\beta} = \sum_{i=0}^{p-1} \overline{a}_i\overline{(\sqrt[p]{\alpha})^i} = \sum_{i=0}^{p-1} \overline{a_i}\frac{(\sqrt[p]{c})^i}{\alpha}(\sqrt[p]{\alpha})^{p-i}.$$

Since $K$ is invariant under complex conjugation we have:

$$\beta \text{ real} \Leftrightarrow \beta = \overline{\beta} \Leftrightarrow a_{p-i} = \overline{a}_i\frac{(\sqrt[p]{c})^i}{\alpha}, \ 0 \leqq i \leqq p-1.$$

Now let $\beta$ be a real number in $L$. If $\sigma$ is a non-trivial automorphism in $Gal(L/K)$ then $\sigma\beta = \sum_{i=0}^{p-1} \zeta^i(\sqrt[p]{\alpha})^i$, $\zeta$ being some primitive $p$-th root of unity.

Since $\beta$ is real we conclude $a_{p-i} = \overline{a}_i\frac{(\sqrt[p]{c})^i}{\alpha}$, which in turn implies

$$a_{p-i}\zeta^{p-i} = \overline{a_i\zeta^i}\frac{(\sqrt[p]{c})^i}{\alpha}.$$

Consequently $\sigma\beta = \overline{\sigma\beta}$, i.e. $\sigma\beta$ is real. $\square$

We are now in a position to prove Theorem 1. Let $f(X)$ be an irreducible polynomial in $K[X]$ of odd degree $n$, where $K$ is a real number field and the Galois group of $f(X)$ over $K$ is solvable. $f(X)$ has at least one real root.

Let $\zeta$ be an arbitrary root of unit. If $f(X)$ is reducible in $K(\zeta)$ by lemma 1 all irreducible factors of $f(X)$ in $K(\zeta)$ have the same degree, which must be a proper divisor $d'$ of $n$. Since the number of factors $d = n/d'$ is odd and possible factors with non-real coefficients must appear in pairs of complex conjugates there must be at least one factor with real coefficients. Hence $f(X)$ becomes reducible in $(K(\zeta) \cap \mathbb{R})[X]$.

Since $K(\zeta)/K$ is abelian the extension $(K(\zeta) \cap \mathbb{R})/K$ is normal; therefore by lemma 1 all irreducible factors of $f(X)$ in $K(\zeta)[X]$ lie in $(K(\zeta) \cap \mathbb{R})[X]$.

Hence $r(f) \in C(d')^{<d>}$, where $d' \neq n$. Thus $(\Diamond)$ in Theorem 1 is verified in this case.

We may therefore assume that $f(X)$ is irreducible in $K(\zeta)[X]$ for every root of unity $\zeta$.

Let $\gamma$ be a real root of $f(X)$ and consider a radical extension of $K$ containing $\gamma$. Clearly we may assume that the radical extension is built up by simple radical extensions of prime degrees. We let $t$ be the product of all the prime numbers appearing in the degrees of the simple radical extensions. $\zeta_t$ denotes a primitive $t$-th root of unity.

Now, let

$$\begin{aligned} K_0 &= K(\zeta_t), \\ K_1 &= K_0(\sqrt[p_1]{\alpha_1}), \quad \alpha_1 \in K_0, \\ &\vdots \\ K_s &= K_{s-1}(\sqrt[p_s]{\alpha_s}), \quad \alpha_s \in K_{s-1} \end{aligned} \tag{$\star$}$$

be a radical extension of $K$ containing $\gamma$, the degrees $p_1, \ldots, p_s$ being prime numbers.

We replace $(\star)$ by the following radical extension

$$\begin{aligned} K_1' &= K_0(\sqrt[p_1]{\alpha_1\overline{\alpha_1}}), \quad K_1'' = K_1'(\sqrt[p_1]{\alpha_1}), \\ &\vdots \\ K_s' &= K_{s-1}''(\sqrt[p_s]{\alpha_s\overline{\alpha}_s}), \quad K_s'' = K_s'(\sqrt[p_s]{\alpha_s}) \end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

which also will contain $\gamma$.

We note that all the fields in $(\star\star)$ are invariant under complex conjugation. We consider the first field in the series $(\star\star)$ in which $f(X)$ is reducible. We distinguish between to cases:

1) The first such field is $K_i' = K_{i-1}''(\sqrt[p_i]{\alpha_i\overline{\alpha_i}})$ for some $i$, $1 \leqq i \leqq s$, (where we set $K_0'' = K_0$).
2) The first such field is $K_i'' = K_i'(\sqrt[p_i]{\alpha_i})$ for some $i$, $1 \leqq i \leqq s$.

**Ad 1)**

Here $f(X)$ is irreducible in $K_{i-1}''[X]$, but reducible in $K_i'[X] = K_{i-1}''(\sqrt[p_i]{\alpha_i\overline{\alpha_i}})[X]$. Because of lemma 1 $p_i$ must be odd. The minimal polynomial $g(X)$ of $\gamma$ over $K_i'$ is a divisor of $f(X)$ in $K_i'[X]$ and the degree of $g(X)$ is $n/p_i$, since $K_i'/K_{i-1}''$ is a Kummer extension of degree $p_i$.

$g(X)$ has real coefficents; otherwise $\gamma$ would also be a root of the complex conjugate polynomial $\overline{g}(X)$. Since $f(X)$ has real coefficients and $g(X)$

divides $f(X)$ so would $\overline{g}(X)$ .Clearly $g(X)$ and $\overline{g}(X)$ are mutually prime. Consequently $g(X)\overline{g}(X)$ would divide $f(X)$ and thus $\gamma$ would be a multiple root of $f(X)$.

Since $f(X)$ is irreducible in $K''_{i-1}[X]$ at least one coefficient in $g(X)$ is not in $K''_{i-1}$. Since this coefficient is real lemma 3 implies that $\sigma g(X)$ has at least one non-real coefficient for every $\sigma \in Gal(K'_i/K''_{i-1})$, $\sigma \neq id_{K'_i}$. By lemma 1 every monic irreducible polynomial in $K'_i[X]$, which is $\neq g(X)$ and divides $f(X)$ has at least one non-real coefficient. Since $K'_i$ is invariant under complex conjugation each of these non-real factors must occur in pairs of complex conjugates. As before we see that none of these factors has a real root. Hence all real roots of $f(X)$ are roots of $g(X)$.

Therefore $r(f) = r(g)$ and hence $r(f) \in C(n/p_i)(= C(n/p_i)^{<1>})$, where the degree $n/p_i$ of $g(x)$ is a proper divisor of $n$. Thus the inclusion ($\Diamond$) is verified in this case.

**Ad 2)**

Here $f(X)$ is irreducible in $K'_i[X]$ but reducible in $K''_i[X] = K'_i(\sqrt[p_i]{\alpha_i})[X]$. By the construction of $(\star\star)$ the field $K'_i$ contains $\sqrt[p_i]{\alpha_i\overline{\alpha_i}}$.

The minimal polynomial $g(X)$ of $\gamma$ over $K''_i$ divides $f(X)$ and has degree $n/p_i$. Just as in case 1) it follows that $g(X)$ has real coefficients. By lemma 1 the monic irreducible polynomials in $K''_i[X]$ that divide $f(X)$ are automorphic images of $g(X)$ under the action of $Gal(K''_i/K'_i)$. By lemma 4 each of these polynomials has real coefficients. There are $p_i$ such factors of $f(X)$ in $K''_i[X]$. Each of these factors has coefficients in the real number field $K''_i \cap \mathbb{R}$ and is irreducible over this field. Hence $r(f)$ is a number in $C(n/p_i)^{<p_i>}$ and the inclusion ($\Diamond$) is also verified in this case. The proof of Theorem 1 is now complete. $\square$

# Brief outline of proof of Theorem 2 and construction of solvable polynomials with prescribed number of real roots

In this section we first show that the bounds given in the original formulation of Loewy's Theorem are best possible and next in the case where the degree of the polynomial is an odd prime power we give the precise numbers of real roots that can occur.

For this we need the following well-known slight sharpening of Hilbert's irreducibility theorem:

**Theorem 3.** *Let $K$ be an algebraic number field and $F(X, T_1, \cdots, T_u)$ an irreducible polynomial in $K[X, T_1, \cdots, T_u]$. The rational $u$-tuples $(q_1, \cdots, q_u)$ for which $F(X, q_1, \cdots, q_u)$ is irreducible in $K[X]$ are everywhere dense in the Euclidean space $\mathbb{R}^u$.*

*Sketch proof.* By [2] Prop. 3.3 (p.236) the assertion is reduced to the case where $K = \mathbb{Q}$. By iterative use of Kronecker specializations (cf. [2] Prop. 3.1 (p.234)) it is reduced to the case where $u = 1$. The theorem then follows from [2], Cor. 2.5 (p. 231). $\square$

We first prove that for any odd natural number $n$ and any prime divisor $p$ of $n$ there exist—over an arbitrarily prescribed real number field $K$—irreducible polynomials $f_1(X)$ and $f_2(X)$ having degree $n$ and solvable Galois groups such that $r(f_1) = p$ and $r(f_2) = n - p + 1$.

Since there exist cyclic extensions of any degree over any number field the existence of $f_1(X)$ is just a special case of the following

**Theorem 4.** *Let $n$ be an odd natural number and $d$ a divisor of $n$. Then for any real number field $K$ we have the inclusion*

$$C_d(K) \subseteq C_n(K).$$

*Proof.* Let $f(X)$ be a monic irreducible polynomial in $K[X]$ of degree $d$ having a solvable Galois group over $K$. We have to construct an irreducible polynomial $g(X)$ in $K[X]$ of degree $n$ having a solvable Galois group over $K$ and the same number of real roots as $f(X)$ has. The polynomial $f(X^{n/d} + T)$ is irreducible in $K[X, T]$. Indeed, $f(T)$ is irreducible in $K[X, T]$, hence so is $f(X^{n/d} + T)$. Clearly, $f(X^{n/d})$ and $f(X)$ have the same number of real roots, (which are simple). Hence $f(X^{n/d} + q)$ and $f(X)$ have the same number of real roots for every sufficiently small rational number $q$. By Theorem 3 we can choose such a $q$ so that $f(X^{n/d} + q)$ is irreducible in $K[X]$. Clearly, $f(X^{n/d} + q)$ has solvable Galois group and thus has the desired properties. $\square$

The existence of $f_2(X)$ is a consequence of the following theorem whose proof we omit. (It depends on generic polynomials, cf. e.g. [1].)

**Theorem 5.** *For any two odd natural numbers $m$ and $d$ and any real number field $K$ we have*

$$\begin{aligned} C_{md}(K) &\supseteq \{\, d, d + (m-1), d + 2(m-1), \ldots, d + d(m-1) \,\} \\ &= \{\, d + t(m-1) \mid 0 \leqq t \leqq d \,\}. \end{aligned}$$

From Theorem 5 it is also easy to deduce Theorem 2: If $n$ is a power $p^h$ of an odd prime number $p$, it is immediate to check that every number in the set $\cup C_K(d')^{<d>}$ appearing in Theorem 1 is $\equiv 1$ modulo $(p-1)$. Conversely, by application of Theorem 4 and Theorem 5 setting $m = p$ and successively $d = p, d = p^2, \cdots, d = p^{h-1}$, we see that every natural number $\leqq p^h$ which is $\equiv 1$ modulo $(p-1)$ lies in $C_K(p^h)$. $\square$

## References


1. C.U. Jensen, A. Ledet and N. Yui, *Generic Polynomials*, Cambridge University Press, 2002.
2. S. Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer, 1983.
3. A. Loewy, *Über algebraisch auflösbare Gleichungen*, Scripta Univ. Hierosolymitanarum **1(5)** (1923), 1–12.


# Studenterkollokvier og specialeforedrag

Tarje Bargheer

- Tordag d. 23. oktober er der specialerepræsentation i aud. 6: Morten Grove klarer det hele uden problemer i “Kreditspænd i den korte og lange ende - Problemer og løsninger”.
- Fredag d. 24. oktober Holder Stefan Holm foredrag om Keplers formodning (egentlig bare noget om appelsiner). - kl. 15 aud. 8 og sandelig også et specialeforedrag: Heidi Blak Thomsen består uden barierer med “Static and Dynamic Hedging of Barrier Options”.
- Fredag d. 7. november Har Jacob Stordal Christiansen, under et studenterkolokvium, en forklaring på hvorfor det er en god ide at blive kandidat i matematik. - kl. 15 aud. 8
- Fredag d. 21 november forlader Gunnar Restorff studentertiden med et brag af et forsvar: “Klassifikation af Cuntz-Kriegler algebraer”.
- Fredag d. 28. november er der Toke Carlsen foredrag: Matematikken bag Google, kl. 15 aud. 8.
- I starten af december: Dine øjne glider over et funklende nyt nummer af FAMØS!

# Når humanister laver matematik

mwm

Da jeg for nylig (i min egenskab af FAMØS-journalist) var på ekskursion til den såkaldt virkelige verden, benyttede jeg bl.a. lejligheden til at bladre lidt i et popfilosofisk værk ved navn "Politikens bog om de store filosoffer" (Politikkens forlag, 1999).

Heri nævnes den græske filosof Zenon – Et navn enhver matematiker uvilkårligt vil sætte i forbindelse med Zenons paradokser. Bogen fortæller:

> Et af disse paradokser er historien om Achilleus og skildpadden. Achilleus og skildpadden beslutter sig for at løbe om kap. Da Achilleus kan løbe dobbelt så hurtigt som skildpadden, giver han den et langt forspring. Men, forklarer Zenon, når Achilleus når frem til skildpaddens udgangspunkt, så har den bevæget sig et stykke fremad, der svarer til halvdelen af dens forspring. Og når Achilleus så når frem til dét punkt, vil den igen have bevæget sig fremad, hvad der svarer til halvdelen af dette forspring. Og sådan kan man blive ved *ad infinitum*. Achilleus kan altså aldrig nå op på siden af skildpadden, fordi der hver gang sker det, at den, når han når frem til dens udgangspunkt, vil have bevæget sig den halve længde af forspringet fremad. Så Achilleus overhaler aldrig skildpadden.

Så vidt er det en sober og fornuftig gennemgang af, hvordan Zenons argumentation tog sig ud, og altså forsvarligt nok som et stykke filosofihistorie. Men så begynder tragedien; Mens jeg læste det følgende, blev jeg så træt, at man skulle tro, jeg ikke havde sovet siden Zenons dage:

> Pointen er, at vi står overfor et fejlfrit logisk argument, som ikke desto mere fører til en falsk konklusion. [...] Det kan visse mennesker faktisk blive ret fortvivlede over. Der må være noget galt med logikken, siger de. Men der er endnu ingen, der har kunne sætte fingeren på, *hvor* det går galt.

For at vifte lidt yderligere med den røde klud sluttes der med salutten

> Måske bliver det løst en dag, ligesom vi endelig nu, efter ca. 400 års spekulationer, står med løsningen på Fermats store læresætning.

Det, der for alvor gjorde mig trist, var egentlig ikke, at en inkompetent humanist forsøgte at bilde mig ind, at han vidste noget om matematik samtidig med, at han demonstrerede det modsatte; Det var mere, at de ca. 2500 års matematisk udvikling, der adskiller Zenon fra os, tilsyneladende er gået fuldstændig ubemærket hen over hovedet på verden udenfor det matematiske samfund.

Jeg vil derfor dedikere resten af denne artikel til at give min læser våben i hænderne til at gå ud og oplyse de (åbenbart) uvidende masser om, hvad der *egentligt* skete, da Achilleus og skildpadden løb om kap. Fermats store sætning må vi tage en anden dag.

Lad os se, hvad det er, vi har at gøre med: Achilleus og skildpadden løber begge med en konstant hastighed, og deres positioner i forhold til et bestemt udgangspunkt kan derfor beskrives ved to voksende lineære funktioner, $A$ og $S$. Deres afhængighed af tiden kan beskrives ved forskrifterne

$$A(t) = at + A(0), \qquad S(t) = st + S(0), \qquad a, s > 0,\ t \geq 0,$$

hvor $t$ er tiden og $a$ og $s$ er hhv. Achilleus' og skildpaddens hastigheder.

Eftersom placeringen af vores nulpunkt på aksen ikke har nogen betydning (men bare vil forskyde hele problemet med en konstant) kan vi placere det, så $A(0)$ bliver $0$. Vi kan også benytte Achilleus' hastighed som enhed, sådan at $a = 1$. Da vi desuden vidste, at skildpadden løb halvt så hurtigt som Achilleus, bliver $s = 1/2$.

Jeg synes personligt, at det er lidt slattent af den store græske helt, at han ikke kan præstere mere end dobbelt så høj fart som en skildpadde, så lad os istedet sige, at $s = r$, hvor $0 < r < 1$. Så kan læseren selv gøre løbet så retfærdigt eller uretfærdigt, som han/hun ønsker.

De to kombattanters placeringer er nu givet ved forskrifterne

$$A(t) = t, \qquad S(t) = rt + S(0), \qquad 0 < r < 1,\ t \geq 0.$$

Ved at sætte $t = 0$ ser vi, at skilpaddens oprindelige forspring må være $S(0)$, som følgelig må være $> 0$ (Der må være en grænse for uretfærdighederne!).

Nogle ville på nuværende tidspunkt bare løse ligningen $S(t) = A(t)$ grafisk eller symbolsk mht. $t$ og så konkludere, at Achilleus passerer skilpadden, når $t = \frac{S(0)}{1-r}$. Det synes jeg er en lidt for nem måde at slippe udenom problemet på, og jeg vil angribe det fra en anden vinkel, som jeg synes i højere grad forklarer det (tilsyneladende) paradoksale.

Lad os prøve at forholde til Zenons fremgangsmåde: Når Achilleus har tilbagelagt forspringet $S(0)$ (til tiden $t = S(0)$), er skildpadden kommet yderligere $rS(0)$ fremad. Achilleus tilbagelægger dette forspring i løbet af $rS(0)$

og når altså frem når $t = (1+r)S(0)$. I denne periode bevæger skildpadden sig yderligere $r^2 S(0)$ fremad. Når Achilleus har tilbagelagt dette forspring er $t = (1+r+r^2)S(0)$ osv.

Det generelle system anes nu: Zenon danner en følge af tidspunkter $t_0, t_1, t_2, \ldots$ givet ved forskriften

$$t_n = \left(\sum_{i=0}^{n} r^i\right) S(0).$$

Derefter konstanterer han, at hver gang $n$ forøges med $1$ bliver afstanden $S(t_n) - A(t_n)$ ganget med $r$, (i citatet blev afstanden halveret) men den bliver aldrig lig $0$. Zenons argument kan nu gengives således:

Der findes intet $n \in \mathbb{N}$, så $S(t_n) - A(t_n) = 0$,
ergo findes der intet $t \in \mathbb{R}_+$, så $S(t) - A(t) = 0$.

Når det bliver formuleret sådan, er det pludselig klart, at Zenon konkluderer mere, end han har belæg for. Han har ganske vist udpeget uendeligt mange tidspunkter, hvor Achilleus ikke passerer skildpadden, men derfor kan han ikke slutte, at det *aldrig* sker.

Som en ekstra krølle på historien ved vi også, (men Zenon gjorde nok ikke) at følgen af $t_n$'er konvergent med grænseværdi

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} r^i\right) S(0) = \frac{S(0)}{1-r},$$

og desuden er følgen af afstande også konvergent med grænseværdi

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n) - A(t_n) = \lim_{n\to\infty} S(0)\left(1 - (1-r)\sum_{i=0}^{n} r^i\right) = S(0)\left(1 - \frac{1-r}{1-r}\right) = 0.$$

Igen får vi altså bekræftet, at Achilleus rent faktisk overhalede det lille møgkræ kl. $\frac{S(0)}{1-r}$. Gå ud og fortæl det til alle de humanister, I kender.

# Kuglefunktionerne

Dan Rasmussen

Lad os starte med at beskrive et problem fra fysik, hvor kuglefunktionerne spiller en hovedrolle. På baggrund af undersøgelser af lys udsendt fra en brintgas i et geisslerrør[1] opstillede Niels Bohr i starten af det 20 århundrede sin atommodel. Ifølge denne model er det kun muligt for elektronen i brint at befinde sig i visse diskrete energiniveauer. Lys fra et brintatom i et geislerrør opstår så ved at elektronen springer fra et energiniveau med høj energi til et med lavere under udsendelse af en foton med en energi svarende til forskellen mellem de to niveauer. I ikke relativistisk kvantemekanik er det muligt med høj præcision at bestemme disse energiniveauer. Det viser sig at de netop er de negative egenværdier $\lambda$ til ligningen

$$\Big( -\frac{1}{2\mu}\Delta - \frac{q^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big) f = \lambda f. \tag{1}$$

for $C^2$-funktioner[2] $f$ på $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, som konvergerer mod 0 når $(x,y,z) \to 0$ og $x^2+y^2+z^2 \to \infty$. I ovenstående er $\Delta$ Laplace operatoren $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ mens $\mu$ og $q$ er fysiske konstanter, nemlig henholdsvis elektronens masse og dens ladning (målt i passende enheder[3]). Da leddet $-\frac{q^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ er sfærisk symmetrisk er det smart at skifte til sfæriske koordinater[4] $(r,\theta,\phi)$ når man ønsker at bestemme $\lambda$ og $f$ i (1). I sfæriske koordinater bliver (1) til

$$-\frac{1}{2\mu}\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Big(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big)\Big)f - \frac{q^2}{r}f = \lambda f. \tag{2}$$

Operatoren $-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ som indgår på venstresiden svarer i kvantemekanik til kvadratet på det totale angulære moment og betegnes med $\mathbf{L}^2$. Da $\mathbf{L}^2$ kun afhænger af $\theta$ og $\phi$ er det naturligt at separere variable og søge efter løsninger til (2) på formen $R(r)\Phi(\theta,\phi)$. Indsættes dette i (2) fremkommer

[1] Et lukket glasrør, hvori to elektroder er indført, som ved elektriske udladninger bringer brintgassen til at lyse.

[2] $f$ skal strengt taget også ligge i $L^2(\mathbb{R}^3)$, men randbetingelsen vil sørge for at det automatisk er opfyldt.

[3] Bemærk at vi har sat $\hbar = 1$.

[4] Sammenhængen mellem de kartesiske koordinater $(x,y,z)$ og $(r,\theta,\phi)$ er givet ved ligningerne $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ og $z = r\cos\theta$.

ligningen:

$$\Phi(\theta,\phi)\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2\mu q^2}{r}+2\mu\lambda\Big)R(r)=\frac{1}{r^2}R(r)\mathbf{L}^2\Phi(\theta,\phi).$$

Ligningen skal være opfyldt for alle $r\ \in ]0,\infty[$ når $\theta\ \in ]0,\pi[$ og $\phi\ \in\ [-\pi,\pi[$ fastholdes. Derfor må der findes et tal $\gamma\in\mathbb{C}$ sådan at

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2\mu q^2}{r}+2\mu\lambda\Big)R(r) \quad=\quad \gamma\frac{1}{r^2}R(r) \qquad \text{for alle } r\in]0,\infty[, \quad (3)$$

idet $f=R(r)\Phi(\theta,\phi)$ og dermed $\Phi(\theta,\phi)$ per antagelse ikke er identisk lig 0 ($f$ er jo en egenvektor).

Da (3) er opfyldt for alle $r\in]0,\infty[$ må der tilsvarende gælde at

$$\mathbf{L}^2\Phi(\theta,\phi) \quad=\quad \gamma\Phi(\theta,\phi) \qquad \text{for alle } \theta\in]0,\pi[ \text{ og alle } \phi\in[-\pi,\pi[. \quad (4)$$

En fornuftig plan til bestemmelse af energiniveauerne $\lambda$ vil være først at kigge på (4) og bestemme de mulige værdier af $\gamma$ samt de dertil hørende funktioner $\Phi$. Det er netop her kuglefunktionerne kommer ind i billedet.

**Definition 1.** *Givet $l\in\mathbb{N}_0$ og $m\in\{-l,-l+1,\dots,l\}$ definerer vi det associerede Legendre polynomium $P_l^m$ og kuglefunktionen $Y_l^m$ ved*

$$\begin{aligned} P_l^m(t) &= \frac{(1-t^2)^{m/2}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dt^{l+m}}(t^2-1)^l \qquad \textit{for alle } t\in]-1,1[ \\ Y_l^m(\theta,\phi) &= (-1)^m e^{im\phi}P_l^m(\cos\theta) \qquad \textit{for alle } \theta\in]0,\pi[ \textit{ og } \phi\in[-\pi,\pi[. \end{aligned}$$

*(Bemærk at $Y_l^m$ er defineret på hele enhedssfæren $S^2$ i $\mathbb{R}^3$ med undtagelse af "nord-"og "sydpolen".)*

Hovedmålet er nu dels at vise at kuglefunktionerne opfylder (4) og dels at de udgør en ortogonal basis for $L^2(S^2)=L^2([0,\pi]\times[-\pi,\pi[,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi)$ (når de udvides på passende vis til polerne). I første omgang er dette mål dog lige lovligt ambitiøst. Det viser sig at være smart først at kigge på følgende vektorrum:

**Definition 2.** *For givet $l\in\mathbb{N}_0$ lader vi $W_l$ betegne vektorrummet af homogene polynomier på $\mathbb{R}^3$ af grad $l$ og $H_l$ underrummet bestående af de harmoniske funktioner i $W_l$, dvs*

$$\begin{aligned} W_l &= \Big\{g\ \Big|\ g(x,y,z)=\sum_{j+k=0}^{l}c_{j,k}\,x^jy^kz^{l-j-k},\ c_{j,k}\in\mathbb{C}\Big\} \qquad \textit{og} \\ H_l &= \{g\in W_l\mid\Delta g=0\}. \end{aligned}$$

Om $W_l$ og $H_l$ gælder:

**Lemma 1.**
$$\dim W_l = \frac{(l+1)(l+2)}{2} \quad \textit{og} \quad \dim H_l = 2l+1.$$

*Bevis.* Beviset for påstanden overspringes her, men kan for eksempel findes i [Sugiura][5]. □

Lad $H_l|_{S^2}$ og $W_l|_{S^2}$ for $l \in \mathbb{N}_0$ betegne mængden af funktioner i $H_l$ henholdsvis $W_l$ restringeret til enhedssfæren. Ideen er nu i første omgang at vise at kuglefunktionerne (når de udvides så de også er defineret på polerne) udspænder rummene $H_l|_{S^2}$.

**Sætning 2.** *For alle $l \in \mathbb{N}_0$ og $m \in \{-l, -l+1 \ldots, l\}$ kan $Y_l^m$ udvidelses kontinuert til funktioner i $H_l|_{S^2}$. Endvidere gælder der at $Y_l^{-l}, \ldots, Y_l^l$ udgør en ortogonal basis for $H_l|_{S^2}$, når $H_l|_{S^2}$ opfattes som et underrum af $L^2(S^2)$.*

*Bevis.* Lad $l \in \mathbb{N}_0$ være givet. Vi starter med at bemærke at $(x-iy)^l \in H_l$ samt at $(x-iy)^l$ i sfæriske koordinater er $r^l e^{-il\phi} \sin^l \theta$. Det betyder at $Y_l^{-l}(\theta,\phi) = \frac{1}{2^l l!} e^{-il\phi}(1-\cos^2\theta)^{l/2} = \frac{1}{2^l l!} e^{-il\phi} \sin^l \theta$ har en udvidelse $\widetilde{Y}_l^{-l}$ i $H_l|_{S^2}$. Sæt $\mathbf{L}^+ := iz\frac{\partial}{\partial y} - iy\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$ og bemærk at $\mathbf{L}^+$ sender $H_l$ ind i $H_l$. Definer videre

$$\Lambda_l : g \mapsto g|_{S^2}, \quad H_l \longrightarrow H_l|_{S^2}.$$

Afbildningen er klart surjektiv og lineær. Da $g(sx, sy, sz) = s^l g(x,y,z)$ for alle $s \in \mathbb{R}$ og alle $g \in H_l$ ses let at $\Lambda_l$ også er injektiv. Det giver derfor mening, for alle $m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$, at definere elementet

$$\widetilde{Y}_l^m = (\Lambda_l \mathbf{L}^+ \Lambda_l^{-1})^{m+l} \widetilde{Y}_l^{-l} = \Lambda_l (\mathbf{L}^+)^{m+l} \Lambda_l^{-1} \widetilde{Y}_l^{-l}$$

i $H_l|_{S^2}$. Bemærk at $\Lambda_l \mathbf{L}^+ \Lambda_l^{-1}$ i sfæriske koordinater netop er operatoren $e^{i\phi}\big(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\big)$. For alle $m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$ gælder nu at $\widetilde{Y}_l^m(\theta,\phi) = e^{im\phi} g_m(\theta)$, hvor $g_{-l}, \ldots, g_l$ er passende (differentiable) funktioner opfyldende

$$g_{m+1}(\theta) = \Big(\frac{d}{d\theta} - m\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big) g_m(\theta) \qquad \text{for alle } \theta \in ]0,\pi[,\ \phi \in\ [-\pi,\pi[ \tag{5}$$

når $l \geq m+1$. Påstanden vises ved induktion. For $m = -l$ har vi allerede i det ovenstående set at $\widetilde{Y}_l^{-l}$ har formen $e^{-il\phi} g_{-l}(\theta)$. Antag nu at der er givet $m$ med $l \geq m+1$ og at $\widetilde{Y}_l^m$ er på formen $e^{im\phi} g_m(\theta)$, så er

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}_l^{m+1}(\theta,\phi) = \Lambda_l \mathbf{L}^+ \Lambda_l^{-1} \widetilde{Y}_l^m(\theta,\phi) &= e^{i\phi}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) e^{im\phi} g_m(\theta) \\
&= e^{i(m+1)\phi}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} - m\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big) g_m(\theta)
\end{aligned}$$

[5] Proposition 7.3

for alle $\theta \in ]0,\pi[$ og $\phi \in [-\pi,\pi[$. Det viser at $\widetilde{Y}_l^{m+1}$ har formen $e^{i(m+1)\phi}g_{m+1}(\theta)$ hvor $g_{m+1}(\theta) = \Big(\frac{\partial}{\partial\theta} - m\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big)g_m(\theta)$ som ønsket. Hvis vi sætter $t = \cos\theta$ og definerer $p_m(t) = g_m(\theta)$ for alle $\theta \in ]0,\pi[$ ses det at (5) kan omskrives til

$$p_{m+1}(t) = \Big( -(1-t^2)^{1/2}\frac{d}{dt} - \frac{mt}{(1-t^2)^{1/2}}\Big)p_m(t) \qquad \text{for alle } t \in ]-1,1[.$$

Sæt yderligere $u_m(t) = (-1)^m(1-t^2)^{-m/2}p_m(t)$ (for alle $t \in ]-1,1[$) og bemærk at

$$\begin{aligned} u_{m+1}(t) &= (-1)^{m+1}(1-t^2)^{-m/2-1/2}\Big( -(1-t^2)^{1/2}\frac{d}{dt} \\ &\quad - \frac{mt}{(1-t^2)^{1/2}}\Big)(-1)^m(1-t^2)^{m/2}u_m(t) \\ &= (1-t^2)^{-m/2-1/2}\Big((1-t^2)^{1/2}\frac{m}{2}(1-t^2)^{m/2-1}(-2t)u_m \\ &\quad + mt(1-t^2)^{m/2-1/2}u_m + (1-t^2)^{1/2+m/2}\frac{d}{dt}u_m\Big) \\ &= \frac{d}{dt}u_m. \end{aligned} \tag{6}$$

Da $u_{-l} = (-1)^{-l}(1-t^2)^{l/2}p_{-l}(t) = (-1)^{-l}\frac{1}{l!2^l}(1-t^2)^{l/2}(1-t^2)^{l/2} = \frac{1}{l!2^l}(t^2-1)^l$ får vi ved brug af (6) at

$$\begin{aligned} p_m(t) &= (-1)^m(1-t^2)^{m/2}\frac{d^{m+l}}{dt^{m+l}}u_{-l} = \frac{(-1)^m}{l!2^l}(1-t^2)^{m/2}\frac{d^{m+l}}{dt^{m+l}}(t^2-1)^l \\ &= (-1)^m P_l^m(t) \end{aligned}$$

for alle $t \in ]-1,1[$. Dermed gælder for alle $\theta \in ]0,\pi[$ og $\phi \in [-\pi,\pi[$, at

$$Y_l^m(\theta,\phi) = e^{im\phi}(-1)^m P_l^m(\cos\theta) = e^{im\phi}p_m(\cos\theta) = \widetilde{Y}_l^m(\theta,\phi).$$

Altså har vi vist at kuglefunktionerne $Y_l^m$ kan udvides kontinuert til funktioner $\widetilde{Y}_l^m$ liggende i $H_l|_{S^2}$. Da $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m'-m)\phi}\mathrm{d}\phi = 0$ for alle $m, m' \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$ med $m \neq m'$ er det ikke svært at se at funktionerne $\widetilde{Y}_l^m$ er parvis ortogonale (når opfattes $H_l|_{S^2}$ som et underrum af $L^2(S^2)$). Afbildningen $\Lambda_l$ er bijektiv og lineær, så dimensionen af $H_l|_{S^2}$ må være $2l+1$ (ligesom dimensionen af $H_l$). Da antallet af funktioner $\widetilde{Y}_l^m$ også er $2l+1$ og da disse er parvis ortogonale må der gælde at

$$H_l|_{S^2} = \operatorname{span}\big\{\widetilde{Y}_l^m \bigm| m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}\big\}. \qquad \square$$

I lyset af forrige sætning er målet at vise at $L^2(S^2) = \overline{\operatorname{span}}(\bigcup_{l\in\mathbb{N}_0} H_l|_{S^2})$. Først får vi dog brug for et par hjælpesætninger.

**Lemma 3.** *Lad $k, l \in \mathbb{N}$ være givet. Hvis $l \geq 2k$ og $g \in W_{l-2k}$ er*

$$\Delta r^{2k} g = 2k(2l - 2k + 1) r^{2k-2} g + r^{2k} \Delta g$$

*Bevis.* Overlades som en øvelse til læseren :-) $\square$

**Sætning 4.** *For $l \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ er*

$$W_l = H_l + r^2 W_{l-2}.$$

*Bevis.* Det bemærkes først at $H_l$ og $r^2 W_{l-2}$ er underrum i $W_l$. Vi ønsker at vise at $H_l \cap r^2 W_{l-2} = \{0\}$. Beviset føres indirekte. Antag derfor at der er givet et $g \in H_l \cap r^2 W_{l-2}$ som ikke er $0$ på hele $\mathbb{R}^3$. Da $g \in r^2 W_{l-2} \setminus \{0\}$ findes et $k \in \mathbb{N} \cap [1, l/2]$ og $g_k \in W_{l-2k}$ så $g = r^{2k} g_k$ og så $g_k$ ikke er deleligt med $r^2$. Funktionen $g$ ligger i $H_l$ så ved brug af Lemma 3 får vi at

$$\begin{aligned} 0 = \Delta g = \Delta(r^{2k} g_k) &= 2k(2l - 2k + 1) r^{2k-2} g_k \; + \; r^{2k} \Delta g_k \\ &= r^{2k-2}(2k(2l - 2k + 1) g_k \; + \; r^2 \Delta g_k). \end{aligned} \tag{7}$$

Nu er $l \geq 2k$ og $k \geq 1$ så $2k(2l - 2k + 1) \geq 2k(2k + 1) > 0$. Dermed kan $g_k$ ifølge (7) skrives på formen

$$g_k = -r^2 \, \frac{\Delta g_k}{2k(2l - 2k + 1)}.$$

Vi har antaget at $g_k$ ikke er delelig med $r^2$ så dette er en modstrid. Altså må $H_l \cap r^2 W_{l-2} = \{0\}$. Da det let ses at $\dim W_l = \dim H_l + \dim W_{l-2} = \dim H_l + \dim r^2 W_{l-2}$ fås derfor at $W_l = H_l + r^2 W_{l-2}$. $\square$

**Korollar 5.**

$$\operatorname{span}(\cup_{l \in \mathbb{N}_0} H_l|_{S^2}) = \operatorname{span}(\cup_{l \in \mathbb{N}_0} W_l|_{S^2})$$

*forstået som underrum i $L^2(S^2)$.*

*Bevis.* Da $W_1 = H_1$ og $W_0 = H_0$ giver gentagende anvendelse af Sætning 4 at

$$W_l = \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} r^{2k} H_{l-2k},$$

hvor tallet $\lfloor l/2 \rfloor$ er defineret som det største heltal mindre eller lig $l/2$. På enhedssfæren er $r^2 = 1$ og dermed følger den ønskede påstand. $\square$

Vi er nu omsider nået frem til artiklens hovedsætning.

**Sætning 6.**

1. *Kuglefunktionerne er egenfunktioner til operatoren $\mathbf{L}^2$. Mere præcist gælder der for alle $l \in \mathbb{N}_0$ og $m \in \{-l, -l + 1, \ldots, l\}$ at*

$$\mathbf{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = l(l + 1) Y_l^m(\theta, \phi) \qquad \textit{for alle } \theta \in ]0, \pi[ \textit{ og } \phi \in [-\pi, \pi[.$$

2. *Kuglefunktionerne udgør en ortogonal basis for* $L^2(S^2)$.

*Bevis.* 1. Lad $l \in \mathbb{N}_0$ og $m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$ være givet. Funktionerne i $H_l$ opfylder $g(sx, sy, sz) = s^l g(x, y, z)$ for alle $s \in \mathbb{R}$, så da $Y_l^m \in H_l|_{S^2}$ er $r^l Y_l^m \in H_l$. Dermed er

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta r^l Y_l^m(\theta, \phi) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} r^l Y_l^m(\theta, \phi) + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} r^l Y_l^m(\theta, \phi) - \frac{1}{r^2}\mathbf{L}^2\, r^l Y_l^m(\theta, \phi) \\ &= (l(l-1) + 2l) r^{l-2} Y_l^m(\theta, \phi) - r^{l-2}\mathbf{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) \end{aligned}$$

for alle $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in ]0, \pi[$ og $\phi \in [-\pi, \pi[$. Ved nu at sætte $r = 1$ fås den ønskede identitet.

2. Lad $l, l' \in \mathbb{N}_0$, $m \in \{-l, -l+1, \ldots, l\}$ og $m' \in \{-l', -l'+1, \ldots, l'\}$ være givet. Hvis $l = l'$ og $m \neq m'$ har vi ifølge Sætning 2 at kuglefunktionerne $Y_l^m$ og $Y_{l'}^{m'}$ er ortogonale i $L^2(S^2)$. Hvis $l \neq l'$ $Y_l^m$ og $Y_{l'}^{m'}$ også ortogonale da de i det tilfælde er egenfunktioner med forskellig egenværdi til den symmetriske operator $\mathbf{L}^2$ (på vektorrummet $\mathrm{span}(\cup_{l\in\mathbb{N}_0} H_l|_{S^2})$). Vi mangler nu blot at redegøre for at det lineære span af kuglefunktionerne er tæt i $L^2(S^2)$. Ifølge Weierstrass' approksimations sætning [6] er $\mathrm{span}(\cup_{l\in\mathbb{N}_0} H_l|_{S^2}) = \mathrm{span}(\cup_{l\in\mathbb{N}_0} W_l|_{S^2})$ tæt i $C(S^2)$ mht. til den uniforme norm. Da målet af enhedssfæren er endeligt (nemlig lig $4\pi$) bliver $\mathrm{span}(\cup_{l\in\mathbb{N}_0} H_l|_{S^2})$ også tæt i $C(S^2)$ mht. $L^2$-normen. Påstanden er derfor vist hvis vi kan argumentere for at $C(S^2)$ er tæt i $L^2(S^2)$. At dette er rigtigt følger f.eks. af [Rudin] Sætning 3.14 og Sætning 2.18. Alternativt kan man (hvis man har haft 3MI) udnytte at $C_c(\mathbb{R}^3)$ er tæt i $L^2(\mathbb{R}^3)$ ([3MI] Sætning 7.28) og derefter benytte Fubinis sætning samt [3MI] Sætning 7.20 til at vise at $C(S^2)$ må være tæt i $L^2(S^2)$. Detaljerne overlades til læseren[7]. $\square$

**Korollar 7.** *Når vi kræver at* $\Phi$ *i (4) er restriktionen til enhedssfæren af en funktion i* $C^2(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ *er de eneste mulige egenværdier* $\gamma$ *netop* $l(l+1)$ *hvor* $l \in \mathbb{N}_0$.

*Bevis.* Lad $\langle\cdot,\cdot\rangle$ betegne det indre produkt på $L^2(S^2)$. Hvis $\Phi$ er restriktionen til enhedssfæren af en funktion i $C^2(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ og løser (4) har vi at

$$\gamma\langle\Phi, Y_l^m\rangle = \langle\mathbf{L}^2\Phi, Y_l^m\rangle = \langle\Phi, \mathbf{L}^2 Y_l^m\rangle = l(l+1)\langle\Phi, Y_l^m\rangle \tag{8}$$

for alle $l \in \mathbb{N}_0$ og $m \in \{-l, \ldots, l\}$. Da $\Phi \in L^2(S^2)$ og kuglefunktionerne udgør en ortogonal basis for $L^2(S^2)$ viser (8) den ønskede påstand. $\square$

Idet vi nu kender de mulige værdier af $\gamma$ i (4) er det muligt ved brug af Frobenius metode at løse (3) med den pålagte randbetingelsen[8] og dermed

[6] Vises i kurset 3AN, se [MV] Sætning 4.16.

[7] Givet en funktion i $h \in \mathcal{L}^2(S^2)$ er ideen f.eks. at betragte funktionen $1_{]1/2,3/2[}(r)h(\theta,\phi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$.

[8] $R(r) \to 0$ for $r \to 0$ og $r \to \infty$

også egenværdi problemet opstillet i først i artiklen. Vægten i denne artikel er på kuglefunktionerne så jeg vil ikke forklare hvordan dette gøres[9] men blot opskrive de egenværdier $\lambda$ man finder:

$$\lambda_n = -\frac{q^4\mu}{2n^2}, \qquad \text{hvor } n \in \mathbb{N}.$$

(Ved at indsætte de relevante fysiske værdier for $q$ og $\mu$ finder man at $q^4\mu/2 = 13.6$ eV)

De energier en foton udsendt fra et brintatom kan have bliver derfor netop tallene $|\lambda_n - \lambda_m|$ hvor $n, m \in \mathbb{N}$.

# Litteratur liste


[3MI] Christian Berg & Tage Gutmann: *Mål- og intergralteori.* Matematisk Instituts Notetrykkeri (1998).

[CL] Earl A. Coddington & Norman Levinson: *Theory of Ordinary Differential Equations.* Robert E. Krieger Publishing Company, Inc. (1984).

[EP] C.H. Edwards, Jr. & David E. Penney: *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems, Third edition.* Prentice-Hall, Inc. (1993).

[Liboff] Richard L. Liboff: *Introductory Quantum Mechanics, Third Edition.* Addison Wesley Longman, Inc. (1998).

[MV] Reinhold Meise & Dietmar Vogt: *Introduction to Functional Analysis (Oxford Graduate Texts in Mathematics; 2).* Oxford University Press (1997).

[Merz] Eugen Merzbacher: *Quantum Mechanics, Third Edition.* John Wiley & Sons, Inc. (1998).

[Rudin] Walter Rudin: *Real and Complex Analysis, Third Edition.* McGraw-Hill Book Co. (1987).

[Sugiura] Mitsuo Sugiura: *Unitary Representations and Harmonic Analysis, An Introduction, Second Edition.* North-Holland/Kodansha (1990).


[9] En gennemgang for tilfældet $\gamma = 0$ (dvs. $l = 0$) kan findes i [EP] kapitel 3.7. Det mere generelle tilfælde løses stort set lige sådan.

FAMØS maj 2003.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-,
Økonomi- og Statistikstuderende ved
Københavns Universitet.

**Redaktionsgruppe:**

Mathias Winther Madsen
Steffen Juul Christensen
Tarje Bargheer
Kristoffer Søndergård Martinsen
Ulrik Torben Bucholtz

**Tegner:**
Mathias W. Madsen

Deadline for næste nummer:
Fredag den 19. september 2003

Indlæg modtages gerne og bedes
sendt til `famos@math.ku.dk` – meget
gerne skrevet i LaTeX.

FAMØS er et internt fagblad.



Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk
Oplag: 500 stk.
ISSN 1395-2145

# Opgaver

Ulrik Torben Buchholtz

FAMØS udvælger den bedste besvarelse af en/begge af nedenstående opgaver med følgende bog, der meget venligt er sponsoreret af Universitetsbogladen: *Remarkable Mathematicians from Euler to von Neumann* af Ioan James.

I øvrigt kan vi nævne at svaret på sidste nummers opgave med Hr. P og Hr. S er 14 og 3, hvilket kan ses ved inspektion og brug af computer.

## Stambrøker

Givet et naturligt tal $n$, på hvor man måder kan stambrøken $1/n$ skrives som sum af to stambrøker? Mere præcist, hvor mange talpar $(a, b)$ af naturlige tal løser ligningen

$$\tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b}?$$

For $n = 2$ har vi for eksempel de tre løsninger givet ved

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}.$$

## En lappeløsning

Et stofstykke med areal $1$ har fået påsyet $5$ lapper, hver med areal større end eller lig $1/2$. Vis, at der findes to lapper med fælles areal større end eller lig $1/5$. Præcisér om nødvendigt opgaven.