FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

16. årgang, nr. 1, sept 2002

Indhold

Velkommen

Velkommen, velkommen til aktuarerne, til algebraikerne, analytikerne, bayerianerne, C*-algebraikerne og dialektikerne. Velkommen til frekventisterne, geometerne, historikerne, intuitionisterne, K-teoretikerne og logikerne. Vi byder jer velkommen neokeynzianister, operationsanalytikere og operatoralgebraikere. Kom! Vær velkommen repræsentationteoretikere, statistikere, topologer – også de algebraiske og differentielle; ja, velkommen til Zermelo-Frankel tilhængere og økonomer. Velkommen kære læser af vort blad! Læn dig tilbage og nyd disse sider!

Med det nye semester kom der ændringer til FAMØS. Gamle kræfter bag FAMØS har nået til det naturlige punkt i deres liv, der hedder specialet; og må derfor snart forlade FAMØS såvel som universitetet. Men netop da det så allerværst ud for FAMØS' fremtid, sprang en ung, dynamisk, målrettet og samfundsbevidst gruppe af matematikere til undsætning. Vi er nu, i samarbejde med den afgående, redaktionen på FAMØS.

Vi har forsøgt at lægge FAMØS' stil markant om; for selvfølgelig var FAMØS noget vi alle kunne være stolte af, med dets Side 9-sætning og dets højtfaglige artikler, men efterhånden var der så få indlæg at Side 9-sætningen blev til Side 4-sætningen fordi bladet ikke var på mere end otte sider: da var det gruppen af unge, dynamiske, målrettede og samfundsbevidste matematikere trådte til og besluttede at det var tid for FAMØS at få en saltvandsindsprøjtning. Efter lidt eftertanke, besluttede vi dog at ting som beretninger fra diverse sociale begivenheder, flere tegninger og opgaver, en tegneserie og en læserdebat nok ville være mere gavnligt end saltvand.

De der føler at FAMØS er ved at blive ødelagt, kan trøste sig med at ikke alle vores ideer er blevet realiseret. Her er stadig ikke så mange tegninger i bladet og endnu mangler vi både en tegneserietegner og nogle debatindlæg! (Ja, dette er en opfordring! FAMØS' gamle tegner er også meget velkommen til fortsat at tegne.)

De nye vinde blæser dog ikke kun på FAMØS! Også Fagrådet og S01 oplever friske pust. Fagrådet har fået en ny ung, dynamisk, målrettet og samfundsbevidst formand, og håbet er at der igen vil være mange fagrådsmøder med mange deltagere og meget kage. Hvad angår S01 er der nu opstået et såkaldt S01-udvalg som vil friske lokalet op. Men begge disse nye tiltag kan du læse mere om i bladet!

Vi vil slutte af med endnu engang at byde dig velkommen: *Velkommen til et mere poppet FAMØS!*

Opgaver – med præmie!

Sara Arklint

Her i bladet, spredt lidt rundt omkring, kan du finde ialt ni små opgaver. Famøs udlover en præmie til den der besvarer flest opgaver først! Din besvarelse kan sendes til `famos@math.ku.dk` og vi skal have modtaget den senest fredag d. 29. november 2002.

Lad os lige komme med et eksempel så alle forstår vinderkåringsreglerne: har Oluf sendt svarene på to af opgaverne allerede en time efter Famøs udkom og sender Styrbjørn svarene på tre af opgaverne d. 28. november, er det Styrbjørn der vinder den højsteftertragtede præmie.

Og lad os tilsidst påpege at 'forkerte svar' ikke tæller som svar og at ubegrundede svar kun tæller som semisvar.

Opgave – Trekantduellen

Euklid, Arkimedes og Pythagoras bliver enige om at udkæmpe en pistolduel under usædvanlige betingelser: Efter at have trukket lod om hvem der skal skyde som hhv. nr. 1, nr. 2 og nr. 3, tager de plads i hjørnerne af en ligesiddet trekant. Det aftales at de skal skyde et skud ad gangen efter tur, og at de skal fortsætte i samme rækkefølge, indtil to af dem er døde. Hvert enkelt skud må rettes mod hvem som helst. Alle tre duellanter ved, at Euklid altid rammer sit mål. Arkimedes skyder med firs procents træfsikkerhed og Pythagoras med halvtreds procents.

Hvis vi går ud fra, at de alle tre benytter sig af den bedst mulige strategi, og at ingen bliver offer for en vildfaren kugle, hvem har da de bedste muligheder for at overleve?

Hvad er de eksakte sandsynlighedstal for hver af de tre grækere med hensyn til muligheden for at overleve?

Opgave – Vodka og juice

To glas indeholder lige meget vædske. I det ene glas er vodka, i det andet glas er juice. Et mål af indholdet i vodkaglasset hældes nu over i juiceglasset, som herefter blandes indtil de to vædsker er jævnt fordelt. Et tilsvarende mål af blandingen hældes nu tilbage i vodkaglasset indtil der igen er lige meget vædske i de to glas.

Hvordan er forholdet mellem juice og vodka i hvert af de to glas?

Leg med Tal
eller
Matematik er sjovt - for helvede

Lise-Lotte Sabano

Hvem har ikke drømt om at blive artist i Cirkus Naturligvis, hvor man kan få naturen i hovedet - helt gratis.

Vi var en lille trup af matematiske artister, der gjorde et stort nummer ud af Möbiusbånd og balloner i vores (ottende-)del af cirkusteltet. Publikum var krævende hver gang vi stod på scenen og viste vores kunster, men humøret var højt hos alle. En interaktiv forestilling på 25 minutter med en 3.- 6. klasse forløb nogenlunde således:

Scene 1.
På to borde ligger rigeligt med sakse, tusser, tape, balloner og papirstrimler. En artist står ved hvert bord, deres optræden er ikke synkroniseret. Publikum, bestående af 20-25 elever og 2-4 lærere, indfinder sig og forsøger at fordele sig ved de to borde.
- Velkommen, her skal vi lave matematik. Hvad synes I matematik går ud på?
Eventuelt rækkes fingre i vejret.
- Tal. Regning. Og sådan noget. Hvad skal vi bruge balloner til?
- Her skal vi se at matematik også kan være noget andet end tal.

Artisterne klipper en papircylinder midt over på langs, ingen bliver overraskede. Utålmodig fumlen med strimler eller balloner. Artisterne viser hvordan tapen skal sidde rigtigt på et Möbiusbånd. Mindst to af eleverne sætter tapen forkert, og deres uopmærksomme lærer retter et Möbiusbånd til en cylinder. Alle klipper Möbiusbåndet midt over på langs. Stor overraskelse over resultatet.
- Orv, hvor sejt! Min blev dobbelt så stor!
- Må vi så få en ballon?

Alle laver endnu et Möbiusbånd og klipper forsøgsvist en tredjedel fra kanten. Artisterne laver feberredninger af de bånd der går i stykker undervejs. Igen stor overraskelse.
- Hey! Min blev til to, men de hænger jo sammen.

Scene 2.

Samme borde, materialer og personer, sandsynligvis i ændrede positioner.

- Nu tager I en ballon og puster den op.
- Må vi så gerne tegne et ansigt på? Jeg kan ikke puste.

Efter have pustet et passende antal balloner op viser artisterne hvordan prikker og streger på ballonen identificeres med henholdsvis byer og veje.

- For enden af en vej skal der ligge en by. Hvis to veje krydser skal der ligge en by i krydset. Når I så har tegnet færdig, skal I tælle hvor mange byer, veje og marker I har.

Herefter følger en uigennemskuelig ombytning af personer, balloner og tusser. Artisterne afslutter med at udvise deres synske evner.

- Nu skal I lave et regnestykke på jeres ballon: Byer + Marker - Veje. Jeg forudser at resultatet er 2.

Det er lige før tiden er inde til at publikum skal videre til næste del af teltet.

- Så har du kigget på min ballon!

Publikum går, synligt oplivede af underholdningen, og efterlader et virvar af oppustede balloner og krøllede Möbiusbånd. Artisterne rydder eventuelt op før næste forestilling begynder.

Tæppe.

Tak til Krogh's Køkken og Kirken i Møllegade.

4.c i Cirkus Naturligvis

Sara Arklint

En fjerdeklasse fra Greve er i Cirkus Naturligvis. Under et skilt påskrevet 'Leg med tal' står de nu ved to borde og pusler med papir, saks og tape: ved begge borde står en matematikstuderende og instruerer dem i at lave Moebius-bånd. De laver ialt to bånd som de så klipper i stykker på to forskellige måder; den ene måde giver et længere bånd, den anden giver to sammenhængende bånd. De resultater havde ingen af dem vist regnet med.

Camilla og Amanda, som jeg snakkede med, havde ihvertfald ikke.

De syntes begge at det med Moebius-båndene var sjovt, men de kunne ikke se at det havde noget med matematik at gøre. Ihvertfald ikke det matematik de beskæftigede sig med; men det var jo så også primært plus- og minusstykker. Amanda fortalte at hun er meget glad for matematik; hun kan godt lide store tal, men der er desværre mange minusstykker for tiden så resultatet bliver ikke så stort. Camilla var tilgengæld ikke så glad for matematik, hun kan bedst lide små tal, forklarede hun, men hun vil egentlig gerne kunne 'finde ud af det'.

Børnene udstyres nu hver med en ballon og en tusch. Efter at have pustet ballonen op skal de tegne byer i form af prikker på den. Byerne skal så forbindes med veje; og disse veje må ikke krydse hinanden, men være de kortest mulige veje fra by til by. Børnene får derefter besked på at skrive på ballonen hvor mange byer, veje og marker der er. En mark er et stykke land afgrænset af veje; og her er det vigtigt når man tæller, at huske at har man lavet en lille sammenklumpning af byer på den ene side af sin ballonplanet, vil der udenom bysammenklumpningen ligge én meget stor mark.

Den matematikstuderende, ved det bord hvor jeg står er det mat-kemikeren Tine, holder nu en planche op hvor der med både bogstaver og tegninger står 'byer + marker – veje ='; børnene får besked på at udføre regnestykket og alle får det samme resultat! Tine forklarer at man altid vil få resultatet to; hvis der vel at mærke ingen huller er i planeten. Hun finder nu en badering frem hvorpå der er tegnet byer og veje, og hun og børnene hjælpes ad med at tælle og regne. Her er resultatet nul og Tine forklarer at hvis man har en planet med ét hul i, vil resultatet altid blive nul.

Børnene kunne vist ikke helt indse det storslåede i dette resultat, men de syntes tilsyneladende at det var ganske mystisk. Det er ikke til at vide om oplevelsen har fået dem til at revurdere deres syn på matematikken, men det var vist en sjov oplevelse for dem. Og for de matematikstuderende der for en kort periode var ansat i et cirkus, var det vist også en sjov oplevelse at formidle sit fag på en anderledes måde til nogle søde og sjove børn.

Det Rejsende Cirkus Naturligvis

Sara Arklint

Den fjerde oktober var sidste dag for Cirkus Naturligvis på græsplænen mellem DIKU og Zoologisk Museum, men for Det Rejsende Cirkus Naturligvis er sæsonen ikke slut endnu. De tager nemlig rundt til forskellige grundskoler og optræder der.

Her er der dog ingen mulighed for børnene for at opleve noget matematik for der er desværre ikke ansat nogen matematikstuderende i Det Rejsende Cirkus Naturligvis eftersom ingen har meldt sig. Men måske var det noget for dig?

Læs mere på `www.ku.dk/cirkus` !

Studenterkollokviet

Lars Myrup Jensen (m98lmj) og Mette Gerster (m98mgh)

Vi er godt i gang med efterårets kollokvier. Der har allerede været afholdt to: I starten af september holdt Ole Lund Jensen et foredrag om kodning af de naturlige tal og fredag den 4. oktober holdt Peter Harremöes et foredrag om Zipfs Lov og informationsteori. Planen for resten af semesteret er:

- 25/10: Den hyperbolske plan v. Emiko Dupont
- 8/11: Tensorprodukter i C^*-algebrateori v. Gunnar Restorff
- 22/11: Poincaréformodningen - What actually happened on the beaches of Rio v. Stefan Mabit
- 29/11 Nyt fra primtallenes mystiske verden v. Kasper K. S. Andersen
- 13/12[1]: Søren Eilers om ?

Man er selvfølgelig velkommen til at kontakte en af os, hvis man har lyst til at holde et kollokvium. Husk, at man kan holde et kollokvium, som en af de to formidlingsaktiviteter, man skal lave for at blive kandidat.

Nu til det alvorlige: Ved udgangen af dette semester stopper vi begge to med at arrangere studenterkollokviet. Vi efterlyser derfor efterfølgere, da vi synes at studenterkollokviet er en for vigtig faglig/social institution (!) til at forsvinde. Vi vil gerne være behjælpelige med gode råd, kontakter og andet relevant. Hvis man er interesseret, bedes man henvende sig til een af os - og gerne så hurtigt som muligt.

Hva' er et Studenterkollokvium? Det er et foredrag henvendt til studerende med interesse for matematik. Som regel tager det udgangspunkt i 2. og noget 3.års matematik, men lad dig ikke skræmme. Læs abstractet, som hænger rundt omkring på instituttet ca. en uge inden foredraget og hvis det lyder interessant, så duk op. Husk at studenterkollokvierne ikke er det samme som de fagligt tungere matematikkollokvier, som holdes om tirsdagen.

[1] Med forbehold for ændringer

Side 9-sætningen: Vandermondes determinant

IanKiming

Lad n være et naturligt tal ≥ 2. For tal $a_1, \ldots, a_n$ definerer vi *Vandermondes determinant* $V_n(a_1, \ldots, a_n)$:

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} .$$

Sætning: For Vandermondes determinant haves:

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i>j} (a_i - a_j) .$$

Bevis: Hvis 2 af tallene $a_1, \ldots, a_n$ er lig hinanden, ser vi, at begge sider af den ønskede identitet er lig 0, og følgelig lig hinanden: For dette er klart for højresidens vedkommende, og venstresiden er determinanten af en matrix med 2 ens søjler, – altså determinanten af en singular matrix.

Vi kan altså gerne antage, at tallene $a_1, \ldots, a_n$ er indbyrdes forskellige.

Induktion efter n. Påstanden er klar for $n = 2$. Antag derfor $n \geq 3$ og påstanden for $n - 1$. Betragt følgende funktion af x:

$$f(x) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} .$$

Udvikler vi determinanten efter 1. søjle, ser vi, at $f(x)$ er et polynomium af grad højst $n - 1$ i x:

$$f(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \ldots b_1 x + b_0 .$$

Vi kan beregne b_{n-1}: Vi finder:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= (-1)^{n+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot V_{n-1}(a_2, \ldots, a_n) = (-1)^{n-1} \cdot V_{n-1}(a_2, \ldots, a_n) \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \prod_{i>j\geq 2} (a_i - a_j) \, , \end{aligned}$$

hvor den sidste lighed følger af induktionsantagelsen. Idet vi har antaget, at tallene $a_2, \ldots, a_n$ er indbyrdes forskellige, ser vi da, at $b_{n-1} \neq 0$, så $f(x)$ har grad $n-1$.

Vi ser også, at $f(a_2) = \ldots = f(a_n) = 0$: For vi har:

$$f(a_i) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_i^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \; ;$$

hvis $i \geq 2$ har matricen 2 ens søjler og har følgelig determinant 0.

Polynomiet $f(x)$ af grad $n-1$ har altså de $n-1$ indbyrdes forskellige rødder $a_2, \ldots, a_n$; det følger, at:

$$f(x) = b_{n-1} \cdot (x - a_2) \ldots (x - a_n) \, .$$

Altså er:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_2) \cdots (x - a_n) \cdot (-1)^{n-1} \cdot \prod_{i>j\geq 2} (a_i - a_j) \\ &= (a_2 - x) \cdots (a_n - x) \cdot \prod_{i>j\geq 2} (a_i - a_j) \, , \end{aligned}$$

hvormed

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1) = (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \cdot \prod_{i>j\geq 2} (a_i - a_j) = \prod_{i>j} (a_i - a_j) \, .$$

q.e.d.

Rusturen 20002

Morten Dam, Hold Mugendai

Ja, jeg er så blevet sat til at skrive om rustur. Det bliver ikke nogen lang fortælling og heller ikke noget journalistisk mesterværk. Kort og godt bliver det kort, men til gengæld bliver det dårligt.

Op til rusturen blev der afholdt 2 introduktionsdage på universitetet. Det hele startede såmen for de flestes vedkommende hos en vejleder, der inviterede på morgenmad. Her fik man det første møde med 10 af sine fremtidige medstuderende og 4 (1) af sine vejledere. Man vil næppe vove at påstå, man blev skuffet, for man havde vel forventet en flok kedelige nørder på et studium som matematik? Jeg vil da ikke svine nogle individer til personligt i denne sammenhæng, så lad os bare slå fast med det samme, at alle var s**** d***. Ja, vi asociale nynazister er jo svære at tilfredsstille. Heldigvis var der en ting ved morgenmaden, jeg syntes om; NAVNELEG. I alt sin enkelthed skulle man lære en remse, der var mere afhængig af folks geografiske lokation end deres navne. Dette skal selvfølgelig forstås på den måde, at man 1 minut efter legen kunne huske folks navne, såfrem de ikke skiftede plads i lokalet. Efter dette meget opfindsomme introduksive møde med sine nye medstuderende, gik vi, det vil sige nogle cyklede, ned til HCØ. Her var der fremlagt et stort program, der inkluderede leg, rundvisning og vist nok og introduktion til Mat1GA ved rusvejlederne. For mit vedkommende startede det med rundvisning på HCØ og Cafeen?. Rundvisningen på HCØ gjorde bare forvirringen større, da vi før TROEDE at stedet var uoverskueligt. Det var dog en glimrende mulighed for at spørge vejlederne om forskellige ting vedrørende stedet. Den bedste del ved rundvisningen var dog Cafeen?, hvor vi fik købt en øl (2), og fik de lave medlemsnumre. Personligt blev jeg tildelt nr. 15, dette er dog siden skiftet ud med B1 (bartender 1). Tilbage på instituttet var det nu blevet tid til leg. Vi legede her gæt og grimasser, og alle opgaver havde en sammenhæng med det orientalske tema, der var lagt for rustursugen. F.eks. skulle man gætte "en ond japaner", hvilket jeg med mit kendskab til verdens bedste ølspil kunne gætte ... . Nåh ja, så var der også det der Mat1GA noget, men nok om det. I middagspausen (ja, vi havde en sådan pågældende dag), var vi kun 3 russer i Cafeen?, hvilket var yderst skuffende.

2. dagen blev startet med introforelæsninger i samtlige fag (stod der på planen). Jeg mødte dog først op, da vi skulle afsted. Vi var blevet inddelt i 2

hold. Førsteholdet hed "hold Mugendei"(japansk for ∞), og andetholdet hed Seppuko (japansk for selvmord). 2 busser holdt mellem Jagtvej og HCØ. Den ene en gammel bus. Mit gæt er, at der ikke var toilet, rygtet siger den kørte nonstop, men heldigvis fik dem med den dårlige bus de værste omgivelser af de to hold. Den anden bus var af en mere kedelig, moderne stil, med behagelige ryglæn, toilet og hvad dertil hører. Den sørgelige nyhed var så, at vi skulle helt til Limfjorden, og at bussen kun holdt 2 rygepauser. Den første var umiddelbart efter Odense. Det første der skete var, at der blev afholdt en ølspurt, som jeg også selv deltog i (jeg vandt dog ikke). Lige inden vi kørte blev der afholdt endnu en spurt, og igen måtte jeg se mig besejret, denne gang dog med en anden vinder. Næste stop var i Arnborg, der ligger 15-20 km sød for Herning. Her blev der kun afholdt en spurt, men til gengæld vandt jeg. Vores destination for busturen var ved en færgerute 3 km nord for Struer. Herfra kunne bussen ikke komme videre, da Venøfærgen er ret lille, men den sejlede også en distance, man kunne pisse på en god dag. Med forsyninger (øl) begav vi os på en lang 2 kilometer march til vores hytter.

Jeg vil herfra ikke længere skrive synkront, men blot forklare kort, hvad der skete på rusturen. Hovedvægten vil blive lagt på mine personlige oplevelser.

Rusvejlederne havde lavet adskillige gode og få mindre gode arrangementer. Navneleg var bestemt ikke min favorit, men så var der jo morgenkata, der var så sygt, at jeg blev væk. De fleste så dog ud til at kunne lide det. Der var blandt de mere interessante arrangementer nogle mindre seriøse. F.eks. gennemgik 2 vejledere studiestrukturen, studievejlederne var på besøg men en formiddag desværre, vejlederne blev delt op i 9 hold, og fortalte hvert om et fag, men der var selvfølgelig også arrangementer, der var både seriøse og sjove. Kranen var ikke et arrangement, men det blev spillet meget. Spillet er i alt sin enkelthed meier, hvor man ikke kender andre meldinger end kranen (21), og så lærer man resten hen af vejen. Ølkroket var et andet godt arrangement. Her skulle man drikke en masse, slå til en bold ind imellem og ellers gå rundt og placere tomme flasker. To spillere prøvede på at vinde spillet, hvilket resulterede i et hårdt økonomisk slag på ølregningen. Vi brugte også en del tid på at lave skuespil, der blev fremført en af aftenerne. Her blev vi tildelt nogle opgaver, f.eks. blev den gruppe jeg var i stillet følgende: rekvisit der skal indgå; trylledrik, karakter der skal være med; Dracula, handling; "En mand tror hans kone er død og begår seppuko. Derefter vågner konen og ser sin døde mand og begår seppuko"og sidst men ikke mindst genre; tysk porno. Der var ialt 5 teatergrupper, og det blev til 5 MEGET sjove skuespil. Rusvejlederne fik også arrangeret et natløb. Jeg syntes personligt det var trist, fordi vi tabte, men ellers var det spændende. Fra et objektivt synspunkt vil jeg nok kalde det, det bedste natløb jeg har set. Den sidste aften var der, efter et lettere mislykkedes måltid med gode intentioner ((sovsen blev for dårlig) (ingen boullion og for lidt karry)), så fest. Det startede med at jeg lagde mig til at sove (jeg var ikke den eneste). Dette var dog ikke vedvarende, da to vejledere gik rundt og vækkede folk. Den ene udfordrede mig til, at begive mig ned til festen i daværende påklædning (boksershorts) + strømper, sko og bøllehat. Som kompensation ville vedkommende betale for drikkevarer, så længe påklædningen forblev uforandret. Festen var dog så godt som død. Nå!, men! der skete da lidt. der var gruppedans til VLTJ, som jeg mener, det er Tørfisk, der har skrevet. En af vores 9 sejeste rusvejledere lavede et stripshow sammen med en eller anden dum rus, efter denne var blevet påklædt. Der var dog ikke den store entusiasme for showet, men det var jo så p.g.a. dårligt puplikum, da showet i sig selv var veludført, og med to grimme (men IKKE overvægtige) mænd, der bare gjorde det fordi de kunne. Jeg gider ikke skrive om hjemturen, mest fordi vi stoppede ved McDonald's, men også fordi jeg, efter udfylding af spørgeskema, gav mig til at sove.

Nu handler rustur jo ikke kun om druk, derfor var der afsat tidspunkter (midt i tømmermændene) til at fortælle om studierelavante ting. Det (at rusturen ikke kun handler om druk) blev også bekræftet ved det faktum, at vi havde en rusvejleder, der var ædru mere end en hel dag. Dette var dog en person, der aldrig indtager alkohol. Det jeg personligt bedst har kunnet lide ved rusturen var i tilfældig rækkefølge teater, manglen på popmusik, spurtkonkurrencen (hvor jeg vandt ca. 40 ud af 50 spurter), kranen, ølkrokket, druk og de mennesker man tilbragte tiden med. Der blev uddelt nogle karatebælter til folk for specielle præstationer. Et bælte (det sorte) gik til den person, som regel blev en dreng, der drak mest. To personer havde dette bælte to dage hver, og sammenlagt blev det vundet af en pige. Et andet bælte måtte derfor udgå, dette blev givet til den pige, der drak mest. Et bælte gik til den person, der havde lavet den største dumhed. Dette blev vundet af den dreng, der lavede flest knock-outs på piger. Og slutteligt var det grønne bælte en slags vandrepokal, som var tegn på, at man havde vundet den sidste spurt. Selvom alle kunne udfordre, så dette burde skifte ejermand ofte, tilhørte dette bælte hele turen minus ca. et halvt døgn samme person.

Kort om Sport

Stefan Lindhard Mabit

Det er en kold blæsende efterårs-fredags-eftermiddag. Deres udsendte medarbejder har bevæget sig til en fodboldkamp mellem matematik(ZFC) og datalogi. Den afgørende kamp om en plads i efterårets semifinaler. De omkringsiddende ZFC-fans ser ud som om Caféens? varme er savnet, men sidder alligevel trofast og støtter deres hold. Og når enden er god er alting godt, efter spænding i 45 minutter afgør ZFC kampen ved med to hurtige mål at komme på 3-1. Kampen ender 4-1 og ZFC er dermed kvalificeret til den ene af semifinalerne.

Ovenstående fortæller at der rent faktisk befinder sig et fodboldhold på instituttet, men det er ikke hele sandheden. Splittet som instituttet er kan det selvfølgelig ikke nøjes med et fodboldhold, men må have tre. De to andre hold er henholdsvis Mat.-Øk. og Stat.-Act.. At de tre hold gør det godt kan man se i statistikerne over forgange tiders turneringer. Af ni mulige titler har instituttets hold taget de seks og der er siden turneringens start i 1998 aldrig blevet spillet en finale uden deltagelse fra instituttet. Det bliver heller ikke tilfældet i år, da ZFC og Mat.-Øk. møder hinanden i den ene semifinale. Ud over fodbold, aktiviteten plejer af vejrmæssige årsager at holde vinterpause omkring efterårsferien, er der også andre tilbud til instituttets studerende.

Foreningen ZFC, som er åben for alle, som har lyst til at dyrke noget motion, har følgende tilbud denne vinter:

- Volley på Stevnsgade Skole mandag 18-20
- Basket på Stevnsgade Skole onsdag 18-20
- Volley på Jagtvejens Skole torsdag 18-20

For statistikere, aktuarer og mat-øk’er byder Stat.-Act. IF på:

- Volley på Vibenhus Skole, tirsdag 20-22
- Hockey på Stevnsgade Skole, onsdag 20-22

Eksistens af Walras-ligevægte

Thomas Jensen

I denne artikel vil vi behandle eksistensproblemet i generel ligevægtsteori. Dvs. spørgsmålet om, hvilke antagelser der sikrer eksistens af en Walras-ligevægt. Hvis man kender lidt til mikroøkonomi, vil man have stiftet bekendskab med generel ligevægtsteori med endelig mange varer (Arrow-Debreu modellen). Der findes imidlertid også modeller med uendelig mange varer, og sådanne har jeg beskæftiget mig med i mit speciale. I artiklen vil vi først præsentere et eksistensresultat for økonomier med endelig mange varer. Dernæst vil vi betragte en bestemt type økonomier med uendelig mange varer og se på, hvilke nye problemer der så dukker op. Vi vil holde os til rene bytteøkonomier, dvs. vi ser bort fra produktion.

Økonomier med endeligt mange varer

En bytteøkonomi $\mathcal{E}$ med I forbrugere og L varer består af initialressourcer $\omega_i \in \mathbb{R}^L_+ \setminus \{0\}$ og nyttefunktioner $u_i : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, I$. Altså har vi implicit antaget, at hver forbruger har $\mathbb{R}^L_+$ som forbrugsmulighedsområde og præferencer, der kan repræsenteres af en nyttefunktion. Det giver naturligvis ikke den mest generelle model med endeligt mange varer, men det er heller ikke vores fokus her.

Måderne de samlede ressourcer i en økonomi $\mathcal{E}$ kan fordeles på, er givet ved mængden af allokationer, som er defineret ved

$$\mathcal{A} = \{(x_1, \dots, x_I) \in \mathbb{R}^{LI}_+ \mid \sum_{i=1}^{I} x_i = \overline{\omega}\}, \tag{1}$$

hvor $\overline{\omega} = \sum_{i=1}^{I} \omega_i$, summen af forbrugernes initialressourcer. En Walras-ligevægt (herefter bare kaldet en ligevægt) i $\mathcal{E}$ er så en allokation $(x_1, \dots, x_I)$ og en prisvektor $p = (p_1, \dots, p_L)$, så alle forbrugere maksimerer nytte under hensyntagen til deres budgetbetingelse. Dvs., for $i = 1, \dots, I$,

$$p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i \quad \text{og} \quad u_i(x_i) = \max\{u_i(x) \mid p \cdot x \leq p \cdot \omega_i\}. \tag{2}$$

Den første betingelse udtrykker, at prisen på varebundtet x_i ikke er højere end prisen på forbruger i's initialressourcer, altså at han har råd til x_i. Indholdet i den anden betingelse er, at ingen af de varebundter, forbruger i har råd til, giver højere nytte end x_i.

Følgende sætning er et eksempel på et eksistensresultat (se [MWG], Proposition 17.C.1).

Sætning 1 (Eksistens af ligevægt, endeligt mange varer). *Lad $\mathcal{E}$ være en bytteøkonomi med I forbrugere og L varer. Antag de samlede ressourcer $\overline{\omega}$ er en strengt positiv vektor*[1] *og at nyttefunktionerne er kontinuerte, strengt monotone og strengt quasi-konkave. Da har $\mathcal{E}$ en ligevægt.*

En type af økonomier med uendeligt mange varer

Nu skal vi så til at kigge på økonomier med uendelig mange varer. Man skal huske, at man i dynamiske modeller skelner mellem samme fysiske vare til forskellige tidspunkter eller i forskellige tilstande af verden. Derfor, hvis man betragter modeller med uendelig mange tidspunkter eller tilstande, så får man naturligt en økonomi med uendelig mange varer.

Her vil vi fokusere på at modellere forbrug af en (fysisk) vare over diskret tid med uendelig tidshorisont. I det tilfælde består et varebundt af en reel følge $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, hvor x_t er antal enheder af varen til tiden t. Da mængden af ressourcer i verden er begrænset, er det naturligt kun at tillade begrænsede følger. Dvs. at vores varerum bliver l_∞ (i modellen med L varer var det $\mathbb{R}^L$). Vi antager, at alle forbrugerne kan forbruge enhver ikke-negativ mængde af varen til alle tidspunkter, så forbrugsmulighedsområdet bliver

$$l_\infty^+ = \{x \in l_\infty \mid x_t \geq 0 \text{ for alle } t \geq 0\}. \tag{3}$$

En økonomi $\mathcal{E}$ er så, analogt til det endeligdimensionale tilfælde, defineret ved initialressourcer $\omega_i \in l_\infty^+$ og nyttefunktioner $u_i : l_\infty^+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, I$.

Spørgsmålet er så, under hvilke betingelser vi har eksistens af en ligevægt. Først må vi præcist definere en ligevægt, for der er en lille teknisk vanskelighed. Hvis vi bare overfører definitionen fra Arrow-Debreu modellen skal et prissystem være en følge $p = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$ så prisen på et varebundt $x \in l_\infty^+$ er $p \cdot x = \sum_{t=0}^{\infty} p_t x_t$. Men for at prisen på et ethvert varebundt bliver endelig, må vi kræve, at prissystemer skal være summable (dvs. $\sum_{t=0}^{\infty} |p_t| < \infty$). Altså vil vi kun betragte prissystemer i l_1. Med det in mente er definitionen af en ligevægt helt analog til den i tilfældet med endeligt mange varer.

Det er naturligt at prøve at overføre betingelserne for eksistens af en ligevægt fra Arrow-Debreu modellen til den type økonomier, vi nu betragter, og så se, om det er tilstrækkeligt. Betingelserne om streng monotonicitet og streng konkavitet af nyttefunktionerne kan umiddelbart overføres (vi lader l_∞ være udstyret med den punktvise ordning, dvs. $x \geq y \Leftrightarrow x_t \geq y_t$ for alle t).

Der er to oplagte generaliseringer (fra vektorer til følger) af, at de samlede ressourcer $\overline{\omega}$ skal opfylde $\overline{\omega}_l > 0$ for alle $l = 1, \ldots, L$. Den svage er, at $\overline{\omega}_t > 0$

[1] En vektor siges at være strengt positiv, hvis alle koordinaterne er strengt positive.

for alle $t \geq 0$. Den stærke er, at der findes en konstant $c > 0$ så $\overline{\omega}_t \geq c$ for alle $t \geq 0$. Sålænge vi kun betragter vektorer er de to betingelser ækvivalente, men i vores model med uendelig horisont (og dermed følger som varebundter) er de forskellige. Den første sikrer, at der til alle tider er noget af varen, men det kan være vilkårlig lidt. Den anden sikrer derimod, at der altid er mindst c enheder af varen. Det viser sig, at den stærke variant er nødvendig.

Betingelsen om kontinuitet af nyttefunktionerne er den vanskeligste at overføre. Problemet er, hvilken topologi på l_∞ vi skal vælge. Det er fristende at vælge topologien givet ved normen $\|x\|_\infty = \sup_{t\geq 0} |x_t|$, men norm-kontinuitet er desværre ikke nok. Vi skal have fat i en topologi, så l_1 er den topologisk duale til l_∞. Den stærkeste sådanne topologi, kaldet Mackey-topologien med hensyn til dualsystemet $\langle l_\infty, l_1 \rangle$, giver således den svageste tilstrækkelige kontinuitets betingelse.

Det viser sig, at ovenstående betingelser sikrer eksistens af en ligevægt. Vi har altså følgende sætning, som er et specialtilfælde af [Be], Theorem 1 og 2.

Sætning 2 (Eksistens af ligevægt, uendelig mange varer). *Lad $\mathcal{E}$ være en bytteøkonomi med I forbrugere og en vare til hver $t = 0, 1, 2, \ldots$ som beskrevet ovenfor. Antag der findes $c > 0$ så $\overline{\omega}_t \geq c$ for alle $t \geq 0$. Antag envidere, at nyttefunktionerne er strengt monotone, strengt quasi-konkave og kontinuerte mht. $\langle l_\infty, l_1 \rangle$-Mackey-topologien. Da har $\mathcal{E}$ en ligevægt.*

Betingelsen, at nyttefunktionerne skal være Mackey-kontinuerte, er svær umiddelbart at fortolke økonomisk. Men det kan vises, at det er nødvendigt, at forbrugerne er *asymptotisk utålmodige*. En forbruger med nyttefunktion u er asymptotisk utålmodig, hvis der, for alle $x, y \in l_\infty^+$ og $c > 0$, findes $T \in \mathbb{N}$ så

$$u(x) > u(y) \quad \Rightarrow \quad u(x) > u(y + c^T), \tag{4}$$

hvor c^T er følgen givet ved

$$c_t^T = \begin{cases} 0 & \text{hvis} \quad t \leq T \\ c & \text{hvis} \quad t > T \end{cases} . \tag{5}$$

Dvs., at hvis forbrugeren foretrækker x for y, så vil han også foretrække x for y *plus* c enheder af varen til alle $t \geq T$. Løst sagt må et konstant forbrug fra et tidspunkt i den fjerne fremtid ikke betyde noget særligt.

Et eksempel på en forbruger, der ikke er asymptotisk tålmodig, er en med nyttefunktionen

$$w(x) = \liminf_{t \geq 0} x_t. \tag{6}$$

Lad nemlig $x = (1, 1, 1, \ldots)$ og $y = (0, 0, 0, \ldots)$, så vil $w(x) = 1 > 0 = w(y)$. Men

$w(x) = 1 = w(y + 1^T)$ for alle T. Hvis vi har en sådan forbruger, er kontinuitetsbetingelsen i Sætning 2 altså ikke opfyldt.[2]

Nu må det så være på sin plads at give eksempler på nyttefunktioner, der faktisk er Mackey-kontinuerte. I denne type økonomier betragter man ofte nyttefunktioner af typen

$$u(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t v(x_t) \ , \tag{7}$$

hvor $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ og $0 < \beta < 1$ er en såkaldt diskonteringsfaktor. Hvis v er strengt monoton og strengt konkav, så har u også disse egenskaber (ses let). Man kan tænke på v som en tidsuafhængig nyttefunktion og β som sandsynligheden for at overleve fra en periode til den næste. Set fra $t = 0$ vil nytten af a enheder af varen til $t = t'$ så være $\beta^{t'} v(a)$, nemlig sandsynligheden for at leve til tiden t' gange den tidsuafhængige nytte af varemængden a. Den aggregerede nytte over alle tider af et varebundt $x \in l_\infty^+$ bliver så $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t v(x_t)$.

Det følger som et specialtilfælde af [Be], Appendix II, at hvis v er kontinuert og $v(0) = 0$, så er u Mackey-kontinuert (faktisk svagt kontinuert). Således kan fx. funktionerne $v(x) = x^\lambda$, $0 < \lambda \leq 1$, bruges.

En mere generel type af nyttefunktioner er givet ved

$$\widetilde{u}(x) = v_0(x_0) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t v_1(x_{t-1}, x_t), \tag{8}$$

hvor $v_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $v_1 : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ og $0 < \beta < 1$. Hvis vi fortolker $\beta^{t'} v_1(x_{t'-1}, x_{t'})$ som nytten til tiden $t = t'$ (hvor $t' \geq 1$) set fra $t = 0$, så ser vi, at denne også kan afhænge af forbruget i den forrige periode. Den ene fysiske vare kunne f.x. være en bestemt mængde af forskellige fødevarer, så virker det rimeligt at antage, at det en forbruger spiste i går hjælper med til at gøre ham mæt i dag og således har positiv indflydelse på hans nytte i dag.

Streng monotonicitet og streng konkavitet af $\widetilde{u}$ følger let, hvis vi bare antager at v_0 og v_1 har disse egenskaber. Hvis v_0 er kontinuert og v_1 er glat (helt op til randen på $\mathbb{R}_+^2$) med begrænset ∇v_1, så er $\widetilde{u}$ Mackey-kontinuert (igen faktisk svagt kontinuert). Om det, analogt til u, er nok at kræve, at v_1 er kontinuert og normaliseret så $v_1(0, 0) = 0$, har jeg ikke undersøgt. Det er helt klart værd at undersøge, idet vi, hvis svaret er positivt, så kan tillade v_1'er med uendelig hældning (marginal nytte) på randen.

[2]Den opmærksomme læser vil bemærke, at $w(x) = \liminf_{t \geq 0} x_t$ heller ikke er strengt monoton eller strengt quasi-konkav. Men disse betingelser kan lempes, hvorimod Mackey-kontinuitet er nødvendig for eksistens.

Litteratur

[ABB]: **Aliprantis**, C. D., D. J. **Brown** og O. **Burkinshaw**, *Existence and Optimality of Competitive Equilibria.* Springer-Verlag, 1989.

[Be]: **Bewley**, T. F., *Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities.* Journal of Economic Theory, 4 (1972), p. 514-540.

[Je]: **Jensen**, T., *Economies with Infinite Dimensional Commodity Spaces.* Speciale, juni 2002.

[MWG]: **Mas-Colell**, A., M. D. **Whinston** og J. R. **Green**, *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, 1995.

Opgave – Selskabsleg

En morsom selskabsleg kan udføres således: Bed en af de tilstedeværende om at nedskrive et et eller andet trecifret tal og at gentage cifrene i den rækkefølge således at han får et sekscifret tal (e.g.: 364 bliver til 364.364). De vender ryggen til, så De ikke kan se tallet og beder A række B det papir, han har skrevet tallet på. B anmodes nu om at dividere tallet med 7.
– Bryd Dem ikke om resten, siger De til ham, for der bliver ingen rest. B opdager til sin overraskelse, at De har ret. B tilføjer resultatet på papiret. Uden at nævne resultatet for Dem giver B papiret til C, som anmodes om at dividere tallet med 11. Endnu en gang påstår de at der ikke vil være nogen rest og endnu en gang viser dette sig at være rigtigt.
Stadigvæk med ryggen til og uden kendskab til de tal, der er nået gennem de forskellige udregninger anmodes D om at dele det sidste resultat med 13. Pány går divisionen op. Dette endelige resultat skrives på et stykke papir, som foldes sammen og overrækkes Dem.
Uden at se på papiret lader De det gå videre til A.
– Her er det tal, De oprindeligt skrev, siger De.

Bevis at tricket aldrig kan mislykkes lige meget hvilket tal, der vælges af A.

DMF's sommerskole

Af Mikkel Øbro

Den 12. til 14. august i år afholdt DMF[1] en sommerskole for matematikstuderende fra hele landet. Det foregik på den såkaldte Søminestation i en lille skov i nærheden af Holbæk. Vi var omtrent 50 studerende fordelt på (næsten) alle landets matematiske institutter, dvs. KU, AU, SDU, RUC og AAU. Der var desværre ingen studerende fra DTU. Synd for dem. De gik glip af en masse.

Sommerskolen havde to overordnede formål:

- At præsentere aktuelle matematiske forskningsområder på en tilgængelig facon.
- At skabe kontakt mellem studerende på tværs af universiteter.

Det faglige bestod i år af i alt seks oplæg à halvanden til to timers varighed. Emnerne spændte vidt, og vi hørte om specielle funktioner, ikke-lineære dynamiske systemer, matematisk modellering, stokastiske differentialligninger og prisfastsættelse af optioner. For at få udbytte af foredragene og gruppearbejdet var det ikke nødvendigt at kende til emnerne i forvejen. "Lidt matematisk modenhed er nok", påstod arrangørere og oplægsholdere. Og det viste sig at være sandt: Undertegnede vidste absolut intet om emnerne, ja kunne knapt nok stave til de dersens lange ord, men fik alligevel en masse med hjem.

Programmet var presset, men der var heldigvis levnet tid til socialisering og andet godt. Den første aften kom Jan Phillip Solovej forbi og fortalte lidt om John Nash (Jan P har faktisk mødt ham på Princeton!), og derefter blev der vist "A Beautiful Mind" på storskærm.

Den anden og - desværre - sidste aften stod i festens tegn. Køkkenet sørgede for god mad og der stod vin på bordene, så samtalerne straks blev lidt hyggeligere. KU'erne arrangerede "Jeg er en matematiker fra HCØ" som fællessang, og en RUC'er svarede igen ved at tage sin medbragte guitar frem og kvæde et lille kvad. Så flød øllet, humøret steg og musikken spillede op. Det blev selvsagt en ganske fornøjelig fest.

Det er meningen at DMF's sommerskole skal blive en årligt tilbagevende begivenhed, og årets sommerskole var den anden af sin slags. Sidste år foregik det på Sandbjerg Gods ved Sønderborg og emnerne var (frit citeret efter

[1] DMF står for Dansk Matematisk Forening. Foreningen blev grundlagt i 1873 *med det formål at virke til gavn for den matematiske forskning og den matematiske undervisning,* som der står på hjemmesiden www.dmf.mathematics.dk.

hukommelsen) kryptografi, ligningsteoriens historie og grafiske modeller i retsgenetik. Jeg har personligt fået meget ud af at deltage i de to sommerskoler, og kan ikke rose initiativet nok. På trods af Danmarks beskedne størrelse er der meget lidt kontakt universiteterne imellem. I hvert fald på studenterniveau. Og det er synd synes jeg. Man kan lære meget af at høre hvad en matematikuddannelse indeholder og betragtes som andetsteds.

Hvis du vil med på næste års sommerskole, så vær på udkig efter de opslag der kommer op til foråret, eller kig ind på DMF's hjemmeside i ny og næ. Og hvis du har gode ideer til faglige oplæg eller forslag til foredragsholdere, eller måske har lyst til at hjælpe med planlægningen af sommerskolen anno 2003, så mail til `mabit@math.ku.dk` eller `oebro@math.ku.dk`.

Opgave – Med passer og lineal

Arthur kan godt lide at lege med passer og lineal oppe i sit kvistkammer. Han kan bruge flere timer på at sidde og pusle med forskellige små problemer; fx at halvere en vinkel eller at lave en omskreven cirkel til en given trekant. Han synes ikke han har løst problemet hvis løsningen afhænger af den måde han har tegnet fx en trekant på; så du kan nok forstå at Arthur er en ihærdig lille geometriker! Arthur har dog været meget ked af det de sidste par dage, for der er et problem han ikke kan løse: han vil så gerne dele en vinkel i tre lige store vinkler! Han har forsøgt og forsøgt, men han kan ikke helt få den rigtige ide. Han er dybt ulykkelig og springer måske snart ud af vinduet!

Red Arthurs liv; del en vinkel i tre!

Opgave – 'Jorden rundt'-flyvning

En gruppe flyvemaskiner har en base på en lille ø. Hver flyvemaskines tank kan rumme netop halvt så meget brændstof som er nødvendigt for at flyve jorden rundt. Det er i luften muligt at overføre brændstof fra et fly til et andet. Flyvemaskinerne adskiller sig ikke fra hverandre på nogen måde. Der er ikke andre brændstofdepoter end det på øen.

Hvad er det mindste antal flyvemaskiner der skal til for at et fly bliver i stand til at flyve en hel omgang rundt om jorden?

Råd til russerne

Sara Arklint

Kære rus! Som ældre studerende (ja, jeg har jo læst et helt år mere end du!) vil jeg nu give dig et par råd. Jeg er sikker på at du af ikke så få instruktorer, forelæsere og ældre elever allerede har fået forklaret hvor vigtigt det er at regne opgaver, og hvor givtigt det er at regne dem sammen med dine medstuderende! Men har nogen af dem fortalt dig hvor du kan gøre det henne?

Det sted du ikke skal sætte dig, er ved de matematikstuderendes borde i kantinen; her er alt for megen larm og alt for mange forstyrrende elementer. Men er du småsulten, er det jo smart at sidde tæt på kantinen, og sætter du dig i den del af Vandrehallen der vender ud mod Nørre Allé, er der ikke så mange forstyrrende elementer: især hvis du sætter dig i den ende der vender ned mod Panum, der er der meget fredeligt. Ovenover Vandrehallen ligger Svalegangen, her er der også ganske fredeligt, og her er der bløde stole og grøn udsigt.

Vil du have det mere hyggeligt, og har du ikke penge, men derimod en plasticboks med gårsdagens aftensmad med, er S01, køkkenet, måske et bedre sted at sidde. Her er der både microbølgeovn, kaffemaskine, elkedel, bløde stole og en tavle; her er også både køkken- og køleskab, og bare du skriver navn og dato på maden, kan du sagtens have et helt lille madlager opbevaret her. Og vil du skrive dine afleveringer ind i LaTeX, er S03 jo ikke langt væk.

Et andet hyggeligt sted er Caféen? som jo har åbent i alle hverdagene. Niels-Peter, der er bestyrelsesmedlem i Caféen?, har gjort opmærksom på at Caféen? sagtens kan bruges som regnestue; det gør en del fysikere og kemikere allerede. Bliver du tørstig eller småsulten under regnerierne, opholder du dig jo et sted hvor du, til meget rimelige og for en café lave priser, kan købe bl.a. øl, toast og saft fra Søbogaard, og går du og din regnegruppe døde i regnerierne, kan I tage en lille bordfodboldspause. Du skal dog huske ikke at stole på alt hvad mere eller mindre fulde ældre studerende på Caféen? fortæller dig om løsningerne til dine opgaver! Vil du have professionel hjælp, skal du i stedet søge hen på MatLab.

En enkelt forelæser har måske fortalt dig om Matematik-laboratoriet (MatLab). MatLab ligger i E-32, altså på Caféen?s side af Jagtvej, og der er åbent kl. 10-17 i hverdagene; af og til vil MatLab være 'bemandet med en kvalificeret person', som Søren Eilers skriver på 1GAs hjemmeside. Sidste semester var denne kvalificerede person en Ph.D.-studerende ved navn Henrik Holm, og af og til var mandag kl. 15-17 og fredag kl. 10-12. Jeg ved ikke hvornår der er nogle derovre i dette semester, men selvom der ikke lige er nogen kvalificeret person derovre, er MatLab garanteret meget stille og fredeligt.

Du kan nu nok forstå at der er masser af gode steder for regnegrupper at sidde på HCØ, så find en gruppe og et sted at sidde og kom igang med regnerierne!

Fornyelse af S01

Selvom det er rart at vi har et køkken, er vores køkken ikke rart.

At viskestykkerne blev vasket oftere end kun to gange om året, er vel noget alle køkkenets brugere ønsker. Vi er dog nogle der drømmer om mere, måske et komfur, mere behagelige møbler eller nye farver på væggene og gardiner; og vi vil forsøge at gøre noget ved det!

Vi starter med at rydde op i S01 i efterårsferien. Senere gør vi mere ved køkkenet.

'Vi' er desværre ikke så mange; så har du lyst til at hjælpe lidt med, eller har du bare nogle ideer til hvad vi skal gøre ved S01, må du meget gerne sende en mail til `m01sea@math.ku.dk`.

Opgave – Cirklen på skakbrættet

Et skakbræk har felter med sider af længden 2cm.

Hvad er den maksimale radius for en cirkel tegnet på skakbrættet så cirkelperiferien udelukkende ligger på sorte felter?

Den internationale Matematikerkongres i Beijing 2002

Christian Berg

Hvert fjerde år afholdes en international matematikerkongres (forkortet ICM), og i år foregik den fra den 20. til 28. august i Beijing, Kina. Der er tradition for, at der ved åbningsceremonien uddeles en eller flere Fields medaljer, som er den mest prestigefyldte anerkendelse, en matematiker kan modtage. Jeg vil nedenfor fortælle lidt mere om disse Fields medaljer, men jeg kan straks afsløre, at der er tradition for kun at tildele dem til matematikere under 40 år. I år blev der uddelt Fields medaljer til

- Laurent Lafforgue, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette, Frankrig.
- Vladimir Voevodsky, Institute for Advanced Study, Princeton, USA.

Som tegn på hvor stor betydning magthaverne i Kina tillægger matematik skal fremhæves, at den kinesiske præsident Jiang Zemin var til stede ved åbningshøjtideligheden i Folkets Hus på Tianmen Pladsen, og han overrakte medaljerne til de to matematikere.

Udover Fields medaljerne uddeltes Nevanlinna prisen for et betydningsfuldt arbejde indenfor teoretisk datalogi, og den tilfaldt Madhu Sudan, f. 1966 i Madras, og som nu arbejder ved MIT i Boston.

Derefter blev der givet en kort matematisk præsentation af de tre matematikeres arbejder. Jeg skønner, at der var ca. 4500 deltagende matematikere, hvoraf halvdelen var fra Kina. Fra Danmark deltog en halv snes. Efter en pause blev der i samme bygning serveret middag for alle ved store runde borde. Kina har kapacitet til at håndtere store forsamlinger.

1. Hvad skete der ellers på ICM?

Hver formiddag var der 2-3 ettimers foredrag, de såkaldte plenary lectures, som foregik i et kongrescenter i en mægtig sal, hvor alle deltagere kunne være tilstede. Det første af disse foredrag blev givet af Lafforgue, men det er ikke reglen, at Fieldsmedalje vinderne automatisk holder et sådant foredrag. Voevodsky gjorde det ikke. Det er naturligvis en stor ære at blive inviteret til at holde et ettimes foredrag, og hvis Fields medalje vinderne altid var inviteret til dette, kunne man jo allerede af programmet se, hvem der nok ville få medaljerne, og det er normalt en godt beskyttet hemmelighed indtil åbningen af kongressen.

Det skal nævnes, at der kun har været 2 danskere, der har holdt disse ettimes foredrag, nemlig Børge Jessen ved kongressen i Amsterdam i 1954 (Børge Jessen, 1907-1993, var professor ved Københavns Universitet) og Uffe Haagerup, professor ved Syddansk Universitet i Odense, som holdt foredrag i Beijing.

Om eftermiddagene foregår mange 45-minutters inviterede foredrag i 6 parallele sessioner, idet matematikken er opdelt i 19 områder. Der var fx 8 foredrag i algebra, 9 foredrag i talteori, 9 foredrag i topologi, 8 foredrag i reel og kompleks analyse og 2 foredrag i matematikkens historie.

At blive inviteret til at give et 45-minutters foredrag er også en stor ære.

Derudover har alle deltagere ret til at præsentere en poster eller holde et 15-minutters foredrag, forudsat at det er tilmeldt og godkendt inden en vis dato. Der er altså mange foredrag at vælge imellem hele tiden. Programmet over hele forløbet fylder da også ca. 150 sider.

Søndagen var fri, og jeg selv benyttede lejligheden til et besøg på den Kinesiske Mur ca. 50 km fra Beijing–det var en spændende men varm oplevelse.

Jeg er meget imponeret over den udvikling Kina er inde i. Der var enorm byggeaktivitet overalt–man var bl. a. i fuld gang med at bygge til Olympiaden i 2008. Trafikken var intens (og osende), og der var ikke længere de store horder af cyklister. Der var godt nok brede cykelstier på begge sider af vejene, og også mange ladcykler, hvor varerne fyldte 10 gange så meget som cyklisten, men biltrafikken var den dominerende. Der var masser af forretninger og gadehandlende, og mit indtryk var, at man kunne købe alt. Der var moderne indkøbscentre af samme standard som det bedste, vi har i Danmark, og skolebørnene var ligeså optaget af SMS'er på mobiltelefonen som danske. Gik man ind i mere ydmyge kvarterer, var det klart, at boligstandarden var langt fra Danmarks, men folk levede afslappet på fortovet i de lune sommeraftener (25-30 grader)–der spilledes kort og skak, der blev strikket/syet og børnene legede. Om morgenen var der gymnastik i parkerne eller øvelser i de offentlige fitness-centre. Ved flere boligblokke var et antal instrumenter til fri afbenyttelse.

En af aftenerne var der et kæmpe udendørs party, hvor alle deltagerne fik lejlighed til at smage mange spændende kinesiske retter–dog hverken hunde eller svalereder. Det er ikke så let at holde et glas i den ene hånd og en tallerken med mad i den anden og så spise med pinde, men jeg gik ikke sulten fra festen.

Ved kongressens afslutning inviterede matematikere fra Spanien til den næste ICM i Madrid i 2006.

2. Fields medalje modtagerne

Lafforgue (f. 1966 i Frankrig) fik medaljen for sit bevis for Langlands formodning vedrørende funktionslegemer. Lafforgues resultater er karakteriseret ved formidabel teknisk kunnen og dyb indsigt. Hans seneste arbejde er netop udkommet, se [3].

Langlands programmet er opkaldt efter matematikeren Robert P. Langlands, som er professor ved Institute for Advanced Study i Princeton. Han formulerede det første gang i 1967 i et brev til den franske matematiker André Weil. Programmet indeholder nogle formodninger om forbindelse mellem to teorier, der tilsyneladende ligger langt fra hinanden. Den ene teori vedrører Galois teori, mere præcist den såkaldte absolutte Galois gruppe $G_{\mathbb{Q}}$. For at beskrive den skal man huske, at legemet af de algebraiske tal er det dellegeme $\mathcal{A}$ af de komplekse tals legeme, som består af samtlige rødder i alle mulige polynomier med rationale koefficienter. Tallene i, $\sqrt[3]{2}$ er algebraiske som rødder i henholdsvis $x^2+1=0$ og $x^3-2=0$, men fx. er hverken e eller π algebraiske–de er transcendente. Cantor viste, at der kun er tælleligt mange algebraiske tal, så i en hvis forstand er det en undtagelse, at et komplekst tal er algebraisk. Gruppen $G_{\mathbb{Q}}$ består af samtlige automorfier $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, som har alle rationale tal som fixpunkter. Der skal altså om bijektionen σ gælde

$$\forall x, y \in \mathcal{A} : \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y), \quad \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) \tag{1}$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} : \sigma(x) = x. \tag{2}$$

Gruppekompositionen i $G_{\mathbb{Q}}$ er sammensætning af automorfier. Man er meget langt fra at forstå denne gruppe i detaljer. Man kan kun angive 2 elementer i gruppen eksplicit, nemlig identiteten og kompleks konjugering, men man kan ved en grænseproces vise, at der er kontinuert mange. Gruppen kan gøres til en kompakt topologisk gruppe ved initialtopologien for afbildningerne af gruppen ind i $\mathbb{C}$, $\sigma \mapsto \sigma(a)$, hvor a gennemløber $\mathcal{A}$.

I den ene teori i Langlands programmet studeres bl.a. homomorfier af $G_{\mathbb{Q}}$ ind i matrix grupperne $GL_n(\mathbb{C})$ af regulære $n \times n$ matricer af komplekse tal. Grunden til, at man interesserer sig for disse homomorfier er, at de siger interessante ting om klassiske algebraiske tallegemer.

I den anden teori studeres bl.a. nogle specielle holomorfe funktioner i den øvre halvplan–de såkaldte automorfe former.

Langlands program giver en formodning om, hvordan man på en ret præcis måde kan beskrive objekterne i den ene teori ved objekterne i den anden og således kombinere to ret forskellige emner som talteori og kompleks analyse.

Langlands programmet vedrører også nogle analoge teorier til ovenstående, hvor legemet $\mathbb{Q}$ erstattes af legemer af rationale funktioner med koefficienter i et endeligt legeme, og det er sådanne Lafforgues teori handler om.

Man kan sige, at Langlands programmet har sine rødder i reciprocitetsloven om kvadratiske rester, som først blev vist af Gauss i 1801. Den kan udtrykkes

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}, \tag{3}$$

hvor p, q er ulige primtal, og Legendres symbol $\left(\frac{p}{q}\right)$ er defineret til at være 1, hvis der findes hele tal x så $x^2 \equiv p \pmod q$, altså så $x^2 - p$ er deleligt med q, og symbolet har værdien -1, hvis der ikke findes sådanne x. Fx er $\left(\frac{3}{11}\right) = 1$ fordi $5^2 \equiv 3 \pmod{11}$ og $\left(\frac{11}{3}\right) = -1$, fordi der ikke findes hele tal x som opfylder $x^2 \equiv 11 \pmod 3$. Højresiden i (3) er $(-1)^5 = -1$ i dette tilfælde.

Lafforgue har fortsat arbejde påbegyndt af Vladimir Drinfeld fra Ukraine. Han fik i 1990 Fields medaljen for sine arbejder, som også var relateret til Langlands program.

Man kan også sige, at Andrew Wiles berømte bevis i 1994 for Fermats formodning (også kaldet Fermats store Sætning): $x^n + y^n = z^n$ har ingen løsninger $x, y, z \in \mathbb{N}$ når $n \in \mathbb{N}$ er ≥ 3, bekræfter en del af Langlands program. Selv om Wiles løste et af de ældste og mest kendte matematiske problemer, var han ved ICM i Berlin i 1998 over 40 og fik derfor ikke nogen Fields medalje. Som en særlig gestus fik Wiles en speciel sølvmedalje overrakt i Berlin, hvor der blev uddelt 4 Fields medaljer til: Richard Borcherds, William T. Gowers, Maxim Kontsevich, Curtis McMullen.

Voevodsky (f. 1966, uddannet i Moskva) arbejder indenfor algebraisk geometri, og han har udviklet nye kohomologiteorier for algebraiske mangfoldigheder, altså nulpunktsmængden for k polynomier i n variable. En kohomologiteori knytter en følge af grupper til den algebraiske mangfoldighed, og disse grupper siger noget om mangfoldigheden. Voevodskys forskning har sine rødder i Alexander Grothendiecks arbejder om algebraisk geometri. Grothendieck havde nogle visioner om dybtliggende strukturer, som skulle forene talteori og geometri. Grothendieck revolutionerede flere områder af matematikken i perioden 1950-1970, f. eks teorien for tensor produkter af Banachrum i 50'erne, før han kastede sig over den algebraiske geometri, som han gav et helt nyt abstrakt grundlag. Han fik Fields medaljen ved kongressen i Moskva i 1966.

I 40 år har man arbejdet på at lave gode kohomologiteorier for algebraiske mangfoldigheder. Et virkeligt gennembrud kom da Voevodsky skabte 'motivisk kohomologi', se [4], som har forbindelse med algebraisk K-teori. Ved hjælp af sin teori blev han istand til at løse en 30 år gammel formodning af Milnor.

3. Fields medaljerne

Historien om Fields medaljerne eller Fields prisen går tilbage til 1924, hvor præsidenten for den Internationale Matematikerkongres i Toronto i 1924, John Charles Fields foreslog, at man begyndte at give guldmedaljer for exceptionelle opdagelser i matematik. Der har aldrig været en Nobel pris i matematik. De første Fields medaljer blev uddelt ved kongressen i Oslo i 1936. De blev givet til Lars Ahlfors (Finland) og Jesse Douglas (USA). Man kan se en liste over medaljevinderne gennem tiden i fx. den Store Danske Encyklopædi.

De internationale matematikerkongresser startede i 1897 i Zürich og der-

efter fulgte den berømte kongres i Paris i 1900. Ved den lejlighed gjorde Hilbert status over matematikken ved århundredskiftet, og han præsenterede 23 problemer, som han anså for særligt vigtige at få løst i det 20. århundrede. (Læs om Hilberts tale og problemerne:
`http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html`).

Det blev naturligvis forbundet med stor prestige at finde løsning på disse problemer, og de har som sådan haft enorm indflydelse på forskningen. Der er udgivet flere bøger om Hilberts problemer med beskrivelse af de løsninger, der blev givet i løbet af århundredet, se fx [1], [2], [5]. Da 2000 er kongruent med 1900 modulo 4 skulle man have forventet, at der også var ICM i 2000, men 2 verdenskrige ændrede på mulighederne for at arrangere internationale konferencer. Den første ICM efter 2. Verdenskrig fandt sted i Cambridge, Massachusetts i 1950, og der blev uddelt Fields medaljer til Atle Selberg (Norge, senere Professor ved Institute for Advanced Study, Princeton) og Laurent Schwartz (1915-2002, Frankrig). Den første for sit bevis for primtalssætningen uden brug af kompleks funktionsteori, den sidste for sin indførelse af distributionsteorien. Det var iøvrigt den danske matematiker Harald Bohr, som motiverede Fields medaljen til Schwartz og fortalte om distributionsteorien. Da 1950 og 2000 ikke er kongruente modulo 4 har vi her forklaringen på ICM 2002. Der er uddelt 3 medaljer til skandinaver–den sidste er svenskeren Lars Hörmander, der fik den for sine arbejder om partielle differentialligninger ved kongressen i Stockholm i 1962.

Der har iøvrigt været ICM i 1983, som heller ikke er kongruent med 1950 modulo 4, men dette skyldes krigsretstilstanden i Warszawa i 1982, og derfor blev det besluttet at udskyde kongressen i Warszawa til 1983. Efter hver ICM er der udgivet Proceedings over mødet, og på Matematisk Afdelings bibliotek kan man se disse Proceedings fra starten. De er tilsammen på mange tusind sider, men de beskriver matematikkens udvikling de sidste 100 år.

I år 2000, som ikke var et ICM år, blev der også holdt foredrag om matematikkens status og om vigtige problemer at få løst. Bl. a. har Clay Foundation udlovet priser for løsning af 7 vigtige matematiske problemer. Løsningen af hvert af dem giver 1 million USD, se `http://www.claymath.org/index.htm`.

Litteraturliste

[1] F. E. Browder, (ed.) *Mathematical developments arising from Hilbert problems.* In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXVIII, American Mathematical Society, 1976.

[2] J. Gray, *The Hilbert Challenge*, Oxford University Press, 2000.

[3] L. Lafforgue, Chtoutcas de Drinfeld et correspondance de Langlands, *Invent. Math.* **147** (2002), 1–241.

[4] V. Voevodsky, Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic. *Int. Math. Res. Not.* no **7** (2002), 351–355.
[5] B. Yandell, *The Honors class*, A K Peters, 2002.

Opgave – Sum af primtal

Forestil dig at Arne har et lige tal der er større end tre. Arne er meget glad for sit tal og går rundt og praler med det; uden dog at fortælle hvilket lige tal større end tre det er! Børge er sur på Arne fordi Børge er lun på Arnes kæreste Carina, så for at ærgre Arne begynder han at sprede et rygte om at han har to primtal hvis sum er lig Arnes tal.

Taler Børge sandt? Kan han virkelig have to sådanne primtal?

Opgave – Købmandsvægten

Du har 12 lodder og en ganske almindelig købmandsvægt. Dvs. en af de her balancevægte med en skål på hver side af et balancepunkt. Desværre er der en fejl ved det ene af de tolv lodder. Uheldigvis er det ikke muligt at kende forskel på lodderne, og det er uvist om loddet vejer for meget eller for lidt.

Kan du på kun tre vejninger afgøre hvilket af lodderne, som er defekt og om det vejer for meget eller for lidt? Hvordan?

Givet n lodder hvoraf præcis et er defekt, hvis du skal kunne identificere det defekte lod vha. kun fire vejninger, hvad må da gælde om n?

Fagrådet for de matematiske fag

Antallet af studerende som dukker op til fagrådsmøderne, tyder på at I, kære medstuderende, har misforstået de muligheder I har for at påvirke jeres studier ved at møde op til møderne. Derfor bringer vi fra redaktions side følgende gamle forklaring på formålet med fagrådet, forfattet af Mikkel Øbro, samt en kommentar fra den nye formand, Mathias Madsen.

Fagrådets formål

Hvad er et fagråd for noget? Jo, som bekendt (?) sidder der studenterrepræsentanter i såvel studienævnet som institutbestyrelsen. Studienævnet (SN) har ansvaret for alt hvad der har med uddannelserne at gøre, dvs. bestemmer kursernes udbud og indhold, undervisnings- og eksamensformer, meritoverførsler, dispensationssager, osv. SN består af fem studerende og fem VIP'ere (VIdenskabeligt Personale). Institutbestyrelsen står for den anden halvdel af universitetets virke, nemlig forskningen, samt driften af instituttet, f.eks. bibliotekerne. Det er instituttet, der ansætter VIP'er, som så skal bruge cirka halvdelen af tiden på at varetage den undervisning, som studienævnet ønsker afholdt. I institutbestyrelsen sidder der to studerende (plus en ekstra studerende med observatørstatus), fem VIP'ere og to TAP'ere (Teknisk og Administrativt Personale, f.eks sekretærer).
Fagrådet kommer ind i billedet, når studenterrepræsentanterne forsøger at tale de studerendes sag i nævnet og bestyrelsen, for hvad mener de studerende egentlig om dette og hint? Fagrådet er det forum, hvor studenterrepræsentanterne kan møde "den almindelige studerende"og fremlægge aktuelle sager for at høre "den almindelige studerendes"mening. Ved at møde op til fagrådsmøderne kan man forholdsvis nemt få indflydelse på de beslutninger, der angår ens eget studieforløb.

Fagrådets kommentar

Der har i det forløbne ikke været den store aktivitet i fagrådet. Med to møder med et samlet deltagerantal på omtrendt ti mennesker har rådet i praksis ligget brak i undervisningsåret 2001-2002. Det er selvfølgelig uheldigt, fordi vi (dvs. de studerende på de matematiske fag) dermed forpasser oplagte mulig-

heder for at gøre vores meninger gældende. At deltage i fagrådsmøderne er den nemmeste og mest direkte måde at påvirke de beslutninger som i praksis dikterer hvordan vores dagligdag som studerende ser ud. For tiden raser f.eks. en heftig debat om, hvordan matematikstudiet skal se ud, når den nye, altomfattende studiereform bliver ført ud i livet. Reformen kommer til at ændre radikalt ved studiet, og der skal træffes mange afgørelser, som får betydning for os som studerende. Vi har mulighed for at få indflydelse, men hvis vi ikke aktivt griber den, overlader vi beslutningerne til de andre parter i studienævnet.
Der er begyndt at ske ting og sager i fagrådet her på det sidste - der er kommet nye kræfter til og fremtiden tegner sig lidt lysere end den hidtil har gjort. Vi håber selvfølgelig i fagrådet at disse ændringer er tegn på en tendens, og vi vil stadig opfodre alle til at komme til møderne og deltage i debatten uanset årgang.
Ingen bør lade sig skræmme; Fagrådet er i forhold til andre politiske organer meget åbent, menneskeligt og nemt at gå til, og så arbejder vi desuden på en kageordning.

Formanden

Opgave – Regnestykke

Erstat bogstaverne med cifre i følgende regnestykke så det går op

$$\mathrm{TO} \cdot \mathrm{TRE} = \mathrm{SEKS}$$

Det skal altså forstås sådan at for T=2, O=1, R=4, E=5, S=9 og K=8 er regnestykket det falske udsagn

$$21 \cdot 245 = 9589$$

Det kreative hjørne – TETRAEDER

– Saml selv dit eget platoniske legeme!
På næste side har du din helt egen tetraeder, lige til at klippe ud og samle!
Du skal bare huske at du skal klippe ud efter de egentlige linjer og folde efter de punkterede linjer.
Du kan samle dit tetraeder helt uden brug af lim eller tape!

FAMØS 16.1; sept 2002.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)
Mathias Winther Madsen
Sara Esther Arklint
Stefan Lindhard Mabit
Steffen Juul Christensen
Tarje Bargheer

Tegner:
Martin Uffe Terp Damhus

Deadline for næste nummer:
Fredag den 6. december 2002

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 600 stk.

ISSN 1395-2145

Kalenderen

- Fredag d. 11. oktober skejer Mat-Øk'ere ud til en fest med Mat-Øk'ere fra provinsen (Århus).
- Fredag d. 1. november er der pubcrawl for tørstige matematikrusser.
- Lørdag d. 2. november er der gallafest for matematikere. Køb billet i uge 43 og find smokingen/festkjolen frem.
- Fredag d. 15. november arrangeres Caféen?s Frebar af selveste hold Mugendai fra matematik.
- Fredag d. 29. november holder matematiks lokale helte fra ZFC julefrokost på lægeforeningens kollegium – Kun medlemmer af ZFC (alle kan dog blive medlemmer!) er inviteret; men mon ikke der skulle komme andet end aksiomer, trods alt!
- Mandag d. 9. december tager også matematikrusserne julens glæder på forskud – julefrokost – og så på en mandag!
- I starten af december: Dine øjne glider over et fuklende nyt nummer af FAMØS!

Vi føler ikke at vores kalender er omfattende nok! – Vi ved at der må foregå noget et eller andet sted, hvorom vi intet ved! Hvis du ved noget der kan dække over vores uvidenhed, så send en mail til `famos@math.ku.dk` med dato og titel for arrangementet; ligger arrangementet et sted mellem december og marts, vil vi se om vi kan presse det ind i FAMØS' kalender!