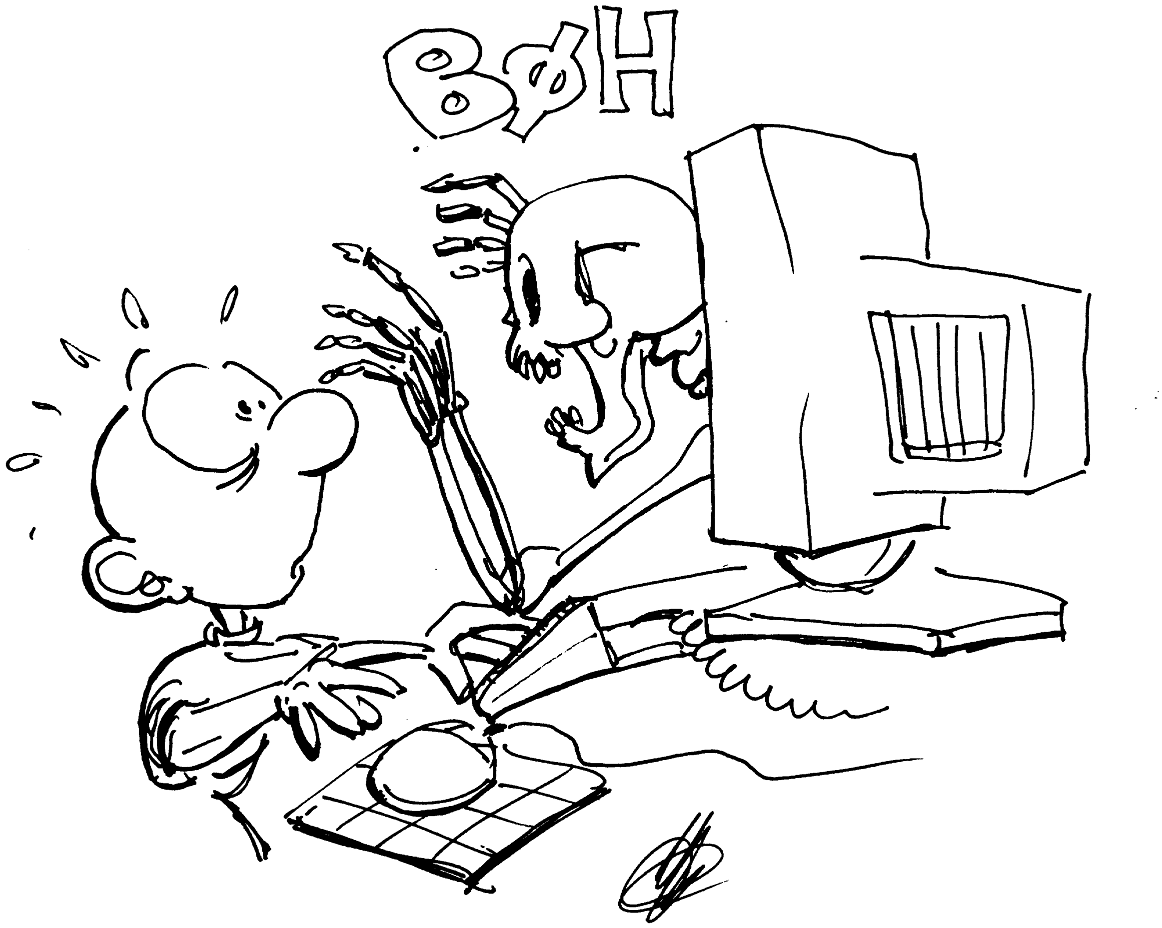
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

15. årgang, nr. 3, marts 2002



FAMØS 15.3; marts 2002.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)
Majbritt Skov Jensen
Ulf Worsøe

Tegner:

Ulf Worsøe

Deadline for næste nummer:
Fredag den 3. maj 2002

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web-adresse:
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 600 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder

Udenfor ligger der sne hist og her, det er ikke særlig varmt, og det her er ikke decembernummeret af FAMØS... Tilsyneladende har naturen ikke helt samme opfattelse som mange danskere af, hvordan vejret bør være på denne årstid.

Som man kunne se på side 3 i sidste nummer, var sætternissen ved at løbe med indholdet. Desværre havde han valgt ikke at tage indkaldelsen til fagrådsmødet med, og eftersom bladet først udkom efter mødet var blevet afholdt, havde det ellers ligefrem været rart.

Nu vi er ved det med nisser, så havde vi i sidste nummer også en opgave om nisser der skulle i seng. En af vores flittigste opgaveløsere, Henning Makholm, har løst denne opgave, og (som den eneste) sendt os sin besvarelse. Henning er flittigere end som så; han har nemlig tænkt videre over problemet med en mængde af punkter med indbyrdes rationelle afstande. Med dette resultat har vi nu en løsning til det mest generelle spørgsmål stillet i den oprindelige opgave (marts 2001-nummeret af FAMØS), men Hennings konstruktion har en ny begrænsning, så der er stadig noget at tænke over.

Sidste nummers anden opgave (som faktisk var opgave 1), var en af de ting sætternissen havde forgrebet sig på... faktisk i en ganske voldsom grad. Denne opgave ved jeg at der er flere, der har forsøgt at løse. Én har påtalt at når aben og loddet vejer det samme, så kan bananen ikke veje noget, hvis systemet skal være i ro. Fysisk set lyder det jo meget fornuftigt, men på den anden side set så skal muren også have en tykkelse, og der skal være en hvis friktion mellem mur og reb før det giver mening at kigge strengt fysisk på det. Majbritt, som stod bag opgaven har sendt os en fejlfri version af den med hendes løsning, den er at finde inde i bladet.

Majbritt har også tilbudt at hjælpe med produktionen af FAMØS, og det har vi naturligvis sagt „ja tak" til, så på dette nummer er Majbritt medredaktør. Hvis du også har lyst til fire gange om året at bruge en dag på at hjælpe med at lave FAMØS så kontakt os og hør nærmere.

Engang i efteråret kom en af de specialestuderende på matematisk afdeling under en tavlegennemgang af et problem for skade at betegne en „ond" afbildning med et dødningehoved. Det førte til den chokerende opdagelse, at dette symbol ikke var blandt de tusindsvis af symboler der findes til LaTeX. Det måtte der selvfølgelig rettes op på, og det er blevet gjort. IMF er nu det første matematiske institut i verden der kan tilbydes sin ansatte og studerende at inkludere pakken skull, der i matematiske omgivelser (dvs. mellem $ el.lign.) giver angang til at benytte kommandoen `\skull` med effekten ☠.

Dirichlets funktion og Dirichlets integral

Jens Carstensen & Alija Muminagic

I denne artikel ser vi på et par forhold om Dirichlets funktion og integral (Lejeune Dirichlet, 13. 2. 1805 (Düren – 5. 5. 1859 (Göttingen), tysk matematiker).

Vi begynder med at minde om følgende

Definition 1. *Hvis f er en begrænset funktion på $[a, b]$ og $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ og hvis*

$$s = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\psi_i)\Delta x_i$$

eksisterer, hvor $\psi_i \in [xi, x_{i+1}]$ og $\Delta x_i = xi + 1 - x_i$, kalder vi f Riemann-integrabel og skriver:

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at integralet $\int_a^b f(x)\, dx$ eksisterer er at følgende grænseværdier eksisterer:

$$s_1 = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \quad \text{og} \quad s_2 = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

hvor $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ og $M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$. I bekræftende fald har vi $s_1 = s_2 = \int_a^b f(x)\, dx$.

Newton-Leibniz' formel.
Hvis f er kontinuert på $[a; b]$ og $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$ er $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.
Hvis $f(x) \leq g(x)$ for $x \in [a; b]$ er $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. Specielt er $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Lad funktionen f være defineret på $[a; \infty[$ og kontinuert i ethvert interval af typen $[a; A]$, $(A > a)$. Hvis vi definerer

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

kalder vi f et uegentligt integral for funktionen f i intervallet $[a; \infty[$.
Hvis grænseværdien findes, siger vi at integralet er konvergent. Ellers er det divergent.

Der gælder, at

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Hvis integralet $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ er konvergent, siger vi at integralet $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ er absolut konvergent.
Hvis integralet $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ er divergent, og $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ er konvergent, siger vi at $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ er betinget konvergent.

Vi vil nu vise følgende sætning:

Sætning 2. *Diriclets funktion*

$$\chi(x) = \lim_{m\to+\infty}(\lim_{n\to+\infty}\cos^n(\pi\cdot m!\cdot x))$$

er diskontinuert i ethvert punkt.

Bevis. Vi sætter $a_m(x) = \lim_{n\to+\infty}\cos^n(\pi\cdot m!\cdot x)$. Lad $x = \frac{p}{q}$, $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N})$. Da $m \to +\infty$ kan vi betragte $m > q+2$ og vi får

$$\cos^n(\pi\cdot m!\cdot x) = \cos^n(\pi\cdot m!\cdot \tfrac{p}{q}) = \cos^n(\pi\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot q(q+1)(q+2)\cdot\ldots\cdot m\cdot\tfrac{p}{q})$$
$$= \cos^n((q+1)(q+2)[1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(q-1)(q+3)\cdot\ldots\cdot m\cdot p]\cdot\pi) = \cos^n(2k\pi) = 1,$$

hvor $k \in \mathbb{N}$. Så er

$$\chi(x) = \lim_{m\to+\infty} a_m(x) = \lim_{m\to+\infty}(\lim_{n\to+\infty} 1) = 1.$$

Hvis x er et irrationalt tal er $m!\cdot x$ irrationalt for enhver værdi af m. Derfor kan $m!\cdot x$ ikke være et naturligt tal, så $|\cos(\pi\cdot m!\cdot x)| < 1$. Derfor er $a_m(x) = \lim_{n\to+\infty}\cos^n(\pi\cdot m!\cdot x) = 0$, dvs $\chi(x) = \lim_{m\to+\infty} a_m(x) = \lim_{m\to+\infty} 0 = 0$. Altså er

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Lad nu b være et vilkårligt reelt tal. Så findes en følge af rationale tal (x_n) og en følge af irrationale tal (y_n) så $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = b$.
Nu har vi

$$\lim_{n\to+\infty}\chi(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \text{ og } \lim_{n\to+\infty}\chi(y_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

Derfor findes $\lim_{x\to b}\chi(x)$ ikke og funktionen χ er diskontinuert i punktet b. □

Sætning 3. *Dirichlets funktion*

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

er ikke integrabel i intervallet $[0;1]$.

Bevis. Lad $0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ være en vilkårlig inddeling af intervallet $[0;1]$. Vi benytter, at der mellem to vilkårlige reelle tal findes et irrationalt tal. Det betyder, at der findes irrationale tal $\psi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ for $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ så vi får

$$s_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(\psi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Desuden findes mellem to vilkårlige reelle tal et rationalt tal, så der findes rationale tal $\psi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ for $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ så vi får

$$s_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \chi(\psi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1.$$

Idet summerne s_1 og s_2 findes for enhver inddeling af intervallet $[0;1]$ konkluderer vi at

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \chi(\psi_i)\Delta x_i$$

ikke findes. □

Sætning 4. *Dirichlets integral*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

er betinget konvergent.

Bevis. a.) Vi har at

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Idet $\sin x \leq x$ for $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ og $\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$ er $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$ og

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Derfor er funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

integrabel på $[0;1]$, dvs.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

eksisterer og er endelig.
Videre fås ved hjælp af delvis integration:

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{\cos x}{x} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{A} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x \right]$$
$$= 0 - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x. \quad (2)$$

Nu er

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \mathrm{d}x \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} \mathrm{d}x \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} = \frac{2}{\pi} - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

Af 2 følger at I_2 er konvergent og da $I = I_1 + I_2$ er integralet I et konvergent uegentligt integral.

b.) Vi har at

$$I = \int_{0}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \mathrm{d}x. \quad (3)$$

Da $|\sin x| \leq 1$ for $x > 0$ er

$$\frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x},$$

hvoraf

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} \mathrm{d}x \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \mathrm{d}x \quad (4)$$

Videre er

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} \mathrm{d}x$$
$$= \lim_{A \to +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{2x} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} \mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln A - \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{A \to +\infty} \ln A - \frac{1}{2} \left[\ln \frac{\pi}{2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} \mathrm{d}x \right]. \quad (5)$$

Vi kan konkludere som under a.), at integralet

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} \mathrm{d}x$$

er konvergent og af 5 følger at integralet I_1 er divergent og at

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{A}\frac{1-\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x=+\infty.$$

Af 4 følger at

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$$

er divergent og ved hjælp af 3 konkluderer vi at $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ er divergent. Altså er integralet $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ konvergent og da integralet $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ er divergent følger sætningens påstand. □

Löwners teori for matrix-monotone funktioner og Jensens ulighed

Gert Kjærgård Pedersen

Adskillige af jer har tidligere hørt mig tale om matrix-monotonicitet og -konvexitet, samt om Löwners teori. Det er en gammel kærlighed, og den ruster ikke så let. Den første artikel om emnet skrev jeg i 1971, cf. [15], og jeg arbejder i disse dage på en ny artikel, cf. [8]. I årenes løb er det vel blevet til en halv snes arbejder omkring denne problemstilling, på trods af at „single operator theory“ ikke er i særlig høj kurs indenfor operatoralgebraen. Denne beretning er naturligvis kun en oversigt, men jeg har vedlagt en stribe litteraturhenvisninger til dem der kunne være interesserede i at bruge emnet til et projekt eller en specialeopgave.

Spektralteori Som bekendt udgør $n \times n-$matricerne $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ en algebra over de komplexe tals legeme. Denne algebra er det vigtigste og det lettest tilgængelige eksempel på en ikke-kommutativ ring – dog med en hel del specielle egenskaber. Blandt dem er den vigtige kommutative struktur man finder i form af delalgebraer: Hver gang man vælger en ortonormal basis for det euklidiske rum $\mathbb{C}^n$ får man således en maximal kommutativ delalgebra af $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ bestående af de matricer som er diagonaliserbare med hensyn til denne basis. Enhver af disse delalgebraer er altså isomorf med $\mathbb{C}^n = \mathcal{F}(\{1, 2, \ldots, n\})$.

Dette fører til det man sædvanligvis kalder *spektralteorien* for symmetriske matricer: Hvis x er en symmetrisk matrix kan den skrives på formen $x = u^*du$, hvor u er en unitær matrix og $d = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ er en diagonalmatrix. Ækvivalent hermed kan man skrive $x = \sum \lambda_k p_k$, hvor $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$, og hvor egenværdiprojektionerne p_k udgør en ortogonal familie med $\sum p_k = \mathbf{1}$. For enhver funktion f (defineret på et interval I der indeholder alle egenværdierne λ_k) sætter vi nu

$$f(x) = u^* \operatorname{diag}\{f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\}u = \sum f(\lambda_k)p_k. \tag{1}$$

Hvis f er polynomiet $\alpha_o + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m$ vil $f(x) = \alpha_o\mathbf{1} + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m$, således at vores kalkyle passer med gængs ringnotation for $f(x)$. Endvidere ses det let at definitionen af $f(x)$ ikke afhænger af diagonaliseringen (som jo i princippet beror på et valg af en ortonormal basis i $\mathbb{C}^n$ og den dertil hørende unitære matrix u). Afbildningen $f \to f(x)$ viser sig nu at være en homomorfi af $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ind i algebraen af diagonalmatricerne hørende til den valgte basis; men den har selvfølgelig en enorm kerne, bestående af alle de funktioner der er nul på samtlige egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Som bekendt spiller denne homomorfi en stor praktisk rolle i lineær algebra; og som de mere avancerede studerende ved er der endda en version af spektralsætningen der gælder for det uendelig-dimensionale Hilbertrum og selvadjungerede operatorer på dette.

Operatorfunktioner Vi får nu lyst til at vende spektralsætningen på hovedet, og i stedet se på spektralfunktionen $x \to f(x)$, hvor f er en fast reel funktion og x varierer indenfor de symmetriske matricer med egenværdier i intervallet I hvor f er defineret. Idet $(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_{\text{sa}}$ er isomorf med $\mathbb{R}^{n^2}$ er vi i princippet ved at undersøge vektorfunktionerne fra $\mathbb{R}^{n^2}$ ind i sig selv, men det er selvfølgelig *meget* specielle funktioner vi betragter. Tænk blot på konstruktionen: Ud fra en funktion f af én variabel laver vi en vektorfunktion $x \to f(x)$. For hver variabel x benyttes n af f's værdier *samtidigt* til at bestemme $f(x)$.

De axiomatisk interesserede vil let kunne eftervise at en vilkårlig vektorfunktion $F\colon (\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_{\text{sa}} \to (\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_{\text{sa}}$ er en spektralfunktion, $F(x) = f(x)$ som ovenfor, hvis og kun hvis F opfylder de to betingelser:

(1) $F(u^*xu) = u^*F(x)u$ hvis u er unitær;

(2) $xy = 0$ medfører at $F(x)F(y) = 0$ samt at $F(x+y) = F(x) + F(y)$.

Lad os se lidt nærmere på denne spektralfunktion. Hvis f er kontinuert som funktion af én variabel, så er det let (ved hjælp af approximation med polynomier) at vise at $x \to f(x)$ er kontinuert som matrixfunktion. Hvis f er differentiabel kan man definere matrixfunktionens differential, forstået som den lineære afbildning $h \to df_x(h)$ på $(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))_{\text{sa}}$ der fremkommer ved grænseværdien

$$df_x(h) = \lim \varepsilon^{-1}(f(x+\varepsilon h) - f(x)). \tag{2}$$

Her er x en fast symmetrisk matrix indenfor definitionsområdet, medens h er en vilkårlig symmetrisk matrix. Beregning af differentialet er for det første ikke nogen let opgave, og for det andet giver det højst overraskende resultater. Hvis f(t)$=t^m$ er $df_x(h) = \sum_{k=1}^m x^{k-1}hx^{m-k}$. Dette er naturligvis en lineær funktion af h; men det er kun når x og h kommuterer at vi genfinder det sædvanlige udtryk $mx^{m-1}h$. Hvis $f(t) = \exp(t)$ er $df_x(h) = \int_0^1 \exp(sx)h\exp((1-s)x)\,ds$. Dette kaldes ofte *Dyson's formel*, og hvis f er tilstrækkelig glat, således at f kan udtrykkes ved sin Fouriertransformerede, $f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}st)\widehat{f}(t)\,dt$, giver dette en integralformel for differentialet, viz. $df_x(h) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 \exp(\mathrm{i}stx)h\exp(\mathrm{i}(1-s)tx)\mathrm{i}t\widehat{f}(t)\,ds\,dt$. Heraf ses ganske overraskende at $\|df_x\| \leq \|\widehat{f'}\|_1$. Læs mere om dette i [16].

Vi skal specielt interessere os for differentialet hørende til funktionen $\mathrm{inv}(t) = 1/t$ for $t > 0$, og de dermed beslægtede funktioner $f_\alpha(t) = t/(1+\alpha t)$ for $-1 \leq \alpha \leq 1$, alle definerede for $-1 < t < 1$. Ved simple regninger finder man at

$$d\,\mathrm{inv}_x(h) = -x^{-1}hx^{-1} \quad \text{og} \quad d(f_\alpha)_x(h) = (1+\alpha x)^{-1}h(1+\alpha x)^{-1}. \tag{3}$$

Operator-monotonicitet Omkring 1930 stillede Karl Löwner sig selv spørgsmålet om hvornår matrixfunktionen $x \to f(x)$ ville være monoton – i den forstand at $x \leq y$ indenfor ordningen af symmetriske matricer ville medføre at $f(x) \leq f(y)$. Altså hvis $(x\xi|\xi) \leq (y\xi|\xi)$ for alle ξ i $\mathbb{C}^n$, så skal også $(f(x)\xi|\xi) \leq (f(y)\xi|\xi)$. Han kaldte sådanne funktioner for *matrix-monotone* (strengt taget matrix-monotont voksende funktioner). Löwner betragtede separat funktioner der var matrix-monotone op til et vist dimensionstal n, men viste også at det pæneste svar fik man ved at kræve matrix-monotonicitet på $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ for alle naturlige tal n.

Löwner sad på det tidspunkt i Prag, men blev senere kaldt til Berlin af Ludwig Bieberbach, da han bestyrkede Bieberbach's formodning ved at vise at *nogle* af koefficienterne i Bieberbach's række var positive. Min forgænger i embedet, den elskelige Werner Fenchel, husker Löwner som en af de unge docenter man kunne tale med selv om man „bare“ var student. Ligesom Fenchel blev Löwner tvunget væk af nazisterne efter magtovertagelsen i 1933, men han fik en smuk karriere som en højt værdsat professor ved Stanford University med speciale i komplexe funktioner – nu som Charles Loewner.

Löwner's problem er særdeles ikke-trivielt, som nogle få exempler viser: Funktionen $t \to t^2$ er *ikke* matrix-monoton (det er let at finde et modexempel allerede for $2 \times 2-$matricer), men funktionen $t \to \sqrt{t}$ *er* matrix-monoton. Mere generelt: Funktionerne $t \to t^\alpha$ er matrix-monotone for $0 \leq \alpha \leq 1$, men aldrig for $\alpha > 1$.

Löwner løste problemet ved at undersøge differentialet af matrixfunktionen f – omend dette ikke er let at se når man læser artiklen i dag. For at indse hvorfor dette er en god strategi bemærker man at differentialet opfylder analysens fundamentalsætning

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 df_{x+th}(h)\, dt. \tag{4}$$

[Der er som sædvanlig en mere generel version $f(x+h)-f(x) = \int_0^1 df_{F(t)}(F'(t))\, dt$, hvor $F(t)$ er en glat kurve der forbinder x med $x+h$, men her får vi kun brug for den rette linie $F(t) = x + th$ imellem dem, hvis differentialkvotient naturligvis er $F'(t) = h$.] Man aflæser af (2) og (4) at en funktion er matrix-monoton præcis når dens operatordifferential er en positiv operator, altså afbilder positive tilvækster h i positive billeder $df_x(h)$ for ethvert x i definitionsområdet. Det er da et pænt svar: *Funktionen er monotont voksende når dens differential er positivt.* Problemet er bare at differentialet ikke er så let at beregne, se blot på exemplerne ovenfor.

Ved at regne på matricerne fandt Löwner at hvis $x = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ og $h = (h_{ij})$ så er $df_x(h) = Df_x \star h$. Her er den symmetriske *Löwner-matrix* Df_x givet ved $(Df_x)_{ij} = (f(\lambda_j) - f(\lambda_i))/(\lambda_j - \lambda_i)$, hvor denne kvotient skal oversættes ved $f'(\lambda_i)$ hvis $\lambda_i = \lambda_j$ (altså specielt hvis $i = j$), og $\star$ refererer til *Schur produktet* af matricerne, altså $(Df_x \star h)_{ij} = (Df_x)_{ij} h_{ij}$. Nu vides det at Schur produktet af positivt definitte matricer igen giver en positiv definit matrix, så ifølge ovenstående er problemet reduceret til af bestemme de funktioner hvis Löwner matrix

– der jo er en pudsig blanding af differens- og differentialkvotienter – er positiv definit. Dette koster Löwner blod, sved og tårer.

Imidlertid ser vi af (3) at enhver funktion f_α er matrix-monoton, idet dens differential klart er positivt. Vi har altså allerede nu en vis klasse af matrix-monotone funktioner.

I artiklen [7] fra 1981 brugte Frank Hansen og jeg Gustave Choquet's konvexitetsteori til at give en ganske elegant løsning på problemet (syntes vi selv). Vi bemærkede først at mængden K af matrix-monotone funktioner f på intervallet $]-1,1[$, normaliseret således at $f(0)=0$ og $f'(0)=1$, udgør en konvex og kompakt mængde (under simpel punktvis konvergens). Vi fandt derefter de extremale punkter i K, som viste sig netop at være funktionerne $\{f_\alpha \mid -1 \leq \alpha \leq 1\}$ fra (3). Endvidere viste vi at K var et *Choquet-simplex*, således at ethvert element f i K har en fremstilling som et tyngdepunkt for en massefordeling over extremalpunkterne, altså

$$f(t) = \int_{-1}^{1} f_\alpha(t)\, d\mu(\alpha) = \int_{-1}^{1} t(1+\alpha t)^{-1}\, d\mu(\alpha) \tag{5}$$

for et entydigt bestemt sandsynlighedsmål μ på $[-1,1]$. Hermed var alle matrix-monotone funktioner på $]-1,1[$ fundet. Ud fra dette var det nu let at udlede den oprindelige sætning fra [12]:

Löwners sætning *En reel funktion f på et interval I er matrix-monoton hvis og kun hvis den har en (entydig) udvidelse til en holomorf funktion $\widetilde{f}$ i den øvre halvplan $\mathbb{C}_+$, således at $\widetilde{f}(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$.*

Det skal dog bemærkes at man for at vise tilstrækkeligheden af Löwners holomorfibetingelse får brug for Herglotz' sætning om analytiske funktioner i enhedsdisken – som jo [under afbildningen $z \to \mathrm{i}(1-z)/(1+z)$] er holomorf med $\mathbb{C}_+$.

Det mest opsigtsvækkende ved Löwner's sætning er hvor svært det er for en funktion at være matrix-monoton. Ikke blot skal den have en analytisk udvidelse til $\mathbb{C}_+$, den skal også der opfylde at $\operatorname{Arg}(\widetilde{f}(z)) \leq \operatorname{Arg}(z)$. Vi ser at funktionerne t^2 og $\exp$ falder udenfor, medens funktionen $\log$ faktisk viser sig at være matrix-monoton på den positive halvakse.

Matrix-konvexitet Når man har sagt monotonicitet er det svært ikke også at komme til at tænke på konvexitet. Löwner spurgte sin PhD student Fritz Kraus hvornår en funktion var *matrix-konvex*, i den forstand at $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ for vilkårlige symmetriske matricer x og y, og $0 \leq \lambda \leq 1$. Svaret foreligger i [11], men den populære version skyldes Bendat og Sherman, cf. [1], som i 1955 viste at en funktion på intervallet $]-1,1[$ er matrix-konvex hvis og kun hvis den har en fremstilling af formen

$$f(t) = \beta_o + \beta_1 t + \beta_2 \int_0^1 t^2(1+\alpha t)^{-1}\, d\mu(\alpha) \tag{6}$$

for et sandsynlighedsmål μ og $\beta_2 \geq 0$. Igen må jeg henvise til [7] for det mest elegante bevis. Man ser at hvis $f(0) = 0$ gælder der at f er matrix-konvex netop hvis $f(t) = tg(t)$ for en matrix-monoton funktion g.

Jensens ulighed Artiklen [7] indeholder også et nyt resultat. Man husker at vor gamle ven J.L.W.V. Jensen i 1905 havde gjort opmærksom på at konvexitet kunne bruges ganske effektivt i den matematiske analyse cf. [9], [10]. Han viste således at hvis f er en konvex funktion så vil $f(\int_T g(t)\, d\mu(t)) \leq \int_T f(g(t))\, d\mu(t)$ for ethvert sandsynlighedsmål μ på et målrum T og enhver integrabel funktion g på T. Hvis μ er et tællemål får vi den mere kendte version $f(\sum_{k=1}^m \lambda_k t_k) \leq \sum_{k=1}^m \lambda_k f(t_k)$, som I genkender fra Instituttets brevhoved. [Sandsynligvis er der tale om et brud på copyrights, idet Jensen jo aldrig har været ansat her, men var telefondirektør (for teknik og udvikling); men det opdager TDC nok aldrig.]

Hvis man nu erstatter tallene λ_k med matricer a_k således at $\sum_{k=1}^m a_k^* a_k = \mathbf{1}$ får man *Jensens operatorulighed* for matrix-konvexe funktioner:

$$f(\sum_{k=1}^m a_k^* x_k a_k) \leq \sum_{k=1}^m a_k^* f(x_k) a_k. \tag{7}$$

Denne ulighed viser sig at give nøglen til teorien for både matrix-monotone og matrix-konvexe funktioner, læs [7].

Sporfunktioner Ganske ofte er det ikke matrixfunktionen $x \to f(x)$ man har brug for, men snarere den skalære funktion $x \to \mathrm{Tr}(f(x))$, hvor som sædvanligt $\mathrm{Tr}(x) = \sum_{j=1}^n (x\xi_j|\xi_j)$, når $\{\xi_j\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{C}^n$, se fx. [14]. Idet sporet har den egenskab at $\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx)$ er der en tendens til at matricerne opfører sig mere kommutativt end de burde. Man får således at

$$x \leq y \quad \text{medfører at} \quad \mathrm{Tr}(f(x)) \leq \mathrm{Tr}(f(y)) \tag{8}$$

hvis blot f er en monotont voksende funktion i sædvanlig forstand. Endvidere gælder at hvis f er en konvex funktion (i sædvanlig forstand) så vil

$$\mathrm{Tr}(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \mathrm{Tr}(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) \tag{9}$$

for vilkårlige symmetriske matricer x og y.

Også Jensen's operatorulighed bliver sand for en vilkårlig konvex funktion f, idet man har at $\mathrm{Tr}(f(\sum_{k=1}^m a_k a_k^* x_k)) \leq \sum_{k=1}^m \mathrm{Tr}(a_k a_k^* f(x_k))$ hvis $\sum_{k=1}^m a_k^* a_k = 1$.

Funktioner af flere variable Man skal ikke tro at emnet hermed er udtømt. For nogle år siden fik Frank Hansen den tanke at undersøge matrix-konvexitet for funktioner af flere variable. Det første – og i øvrigt velkendte – problem er at finde en fornuftig spektralkalkyle, hvor man kan erstatte de reelle variable i funktionen f med symmetriske matricer. Een løsning er at betragte matricer i et tensorprodukt: Hvis f er en funktion af n reelle variable, og $x_i \in \mathbb{M}_{m_i}(\mathbb{C})$ for $1 \le i \le n$, defineres $f(x_1, \ldots, x_n)$ som et element i $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$, hvor $m = m_1 \cdots m_n$. Hvis $x_i = \sum_{k_i=1}^{m_i} \lambda_{k_i} p_{k_i}$ er en diagonalfremstilling for x_i, således at p_{k_i}'erne er egenværdiprojektionerne, sættes

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k_i=1}^{m_i} f(\lambda_{k_1}, \ldots \lambda_{k_n})\, p_{k_1} \otimes \cdots \otimes p_{k_n}. \tag{10}$$

Det er lige præcist så modbydeligt som det ser ud! Men det giver den rigtige kalkyle, således at afbildningen $f \to f(x_1, \ldots x_n)$ bliver en homomorfi fra funktionerne ind på algebraen frembragt af elementerne $x_1, \ldots, x_n$. Som operatorfunktion bliver det for fast f en afbildning af $\bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{M}_{m_i}(\mathbb{C}))_{\mathrm{sa}}$ ind i $(\mathbb{M}_m(\mathbb{C}))_{\mathrm{sa}}$.

Der er en lille generalisering hvor man i stedet for $\mathbb{M}_{m_i}(\mathbb{C})$'erne betragter n parvist kommuterende delalgebraer $A_1, \ldots, A_n$ af $\mathbb{M}_m(\mathbb{C})$. For ethvert $n-$tupel $\{x_1, \ldots, x_n\}$ i $\bigoplus_{i=1}^n (A_i)_{\mathrm{sa}}$ med spektralfremstillingerne $x_i = \sum \lambda_{k_i} p_{k_i}$ sætter man så $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum f(\lambda_{k_1}, \ldots \lambda_{k_n})\ p_{k_1} \cdots p_{k_n}$, idet det bemærkes at samtlige spektralprojektioner p_{k_i} er indbyrdes kommuterende.

Før man dømmer disse definitioner alt for hårdt skal man lige huske på at det faktisk er det samme man kommer ud for når man skal definere spektralsætningen for en *normal* – ikke symmetrisk – matrix. En sådan er jo at betragte som en sum $z = x + \mathrm{i}y$ af to kommuterende symmetriske matricer, og $f(z) = g(x, y)$ i ovennævnte betydning når $g(s, t) = f(s + \mathrm{i}t)$.

Idet $\mathbb{R}^n$ ikke har nogen overbevisende ordensstruktur giver det nok ikke megen mening at spørge om matrix-monotonicitet for funktioner af flere variable, men konvexitet giver stadig god mening. Vi siger at f er *matrix-konvex* hvis

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, \ldots, \lambda x_n + (1-\lambda) y_n) \le \lambda f(x_1, \ldots, x_n) + (1-\lambda) f(y_1, \ldots y_n) \tag{11}$$

for ethvert par af $n-$tupler $\{x_1, \ldots, x_n\}$ og $\{y_1, \ldots, y_n\}$ i de respektive matrixalgebraer. Der findes efterhånden en ganske omfattende litteratur om dette emne – det meste lavet af Frank Hansen i de seneste år – men vi har stadig ingen fuldstændig karakterisering af klassen af matrix-konvexe funktioner af flere variable. Det vides at funktionen $f(t_1, \ldots, t_n) = -\left(t_1^{-1} + \cdots + t_n^{-1}\right)^{-1}$ samt funktionerne $f(t_1, \ldots, t_n) = -t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}$, hvor $\sum_{i=1}^n \alpha_i \le 1$, alle er matrix-konvexe på den positive $n-$kegle, men ellers er det sparsomt med gode eksempler.

Hvis man sætter et spor foran funktionen og betragter den skalære funktion

$$(x_1, \ldots, x_n) \to \mathrm{Tr}(f(x_1, \ldots, x_n)) \tag{12}$$

bliver livet igen lettere. Funktionen i (12) er konvex hvis blot f er en konvex funktion i sædvanlig forstand. Dette blev vist i [6] og prompte generaliseret i [17] og [13]. Der findes en endnu bedre fremstilling i [8], men vi er ikke helt rede til at sende den på markedet endnu.

Litteraturliste

[1] Julius Bendat, Seymour Sherman, *Monotone and convex operator functions*, Transactions of the American Mathematical Society 79 (1955), 58–71.

[2] Chandler Davis *Notions generalizing convexity for functions defined on spaces of matrices*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 7 (1963), 187–201.

[3] William Donoghue *„Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation“* +, Springer-Verlag, Berlin, (1974).

[4] Frank Hansen *An operator inequality*, Mathematische Annalen 246 (1980), 249–250.

[5] Frank Hansen *Operator convex functions of several variables*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University 33 (1997), 443–463.

[6] Frank Hansen *Convex trace functions of several variables*, Linear Algebra and its Applications 341 (2002), 309–315.

[7] Frank Hansen & Gert K. Pedersen *Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem*, Mathematische Annalen 258 (1982), 229–241.

[8] Frank Hansen & Gert K. Pedersen *Jensen's trace inequality for one and several variables*, under udarbejdelse.

[9] Johan Ludvig William Valdemar Jensen *Om Konvekse Funktioner og Uligheder mellem Middelværdier*, Nyt Tidsskrift for Mathematik B 16 (1905), 49–68.

[10] Johan Ludvig William Valdemar Jensen *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Mathematica 30 (1906), 175–193.

[11] Fritz Kraus *Über konvexe Matrixfunktionen*, Mathematische Zeitschrift 41 (1936), 18-42

[12] Karl Löwner *Über monotone Matrixfunktionen*, Mathematische Zeitschrift 38 (1934), 177-216.

[13] Elliott H. Lieb & Gert K. Pedersen *Multivariable convex trace functions*, Udkommer i Reviews in Mathematical Physics.

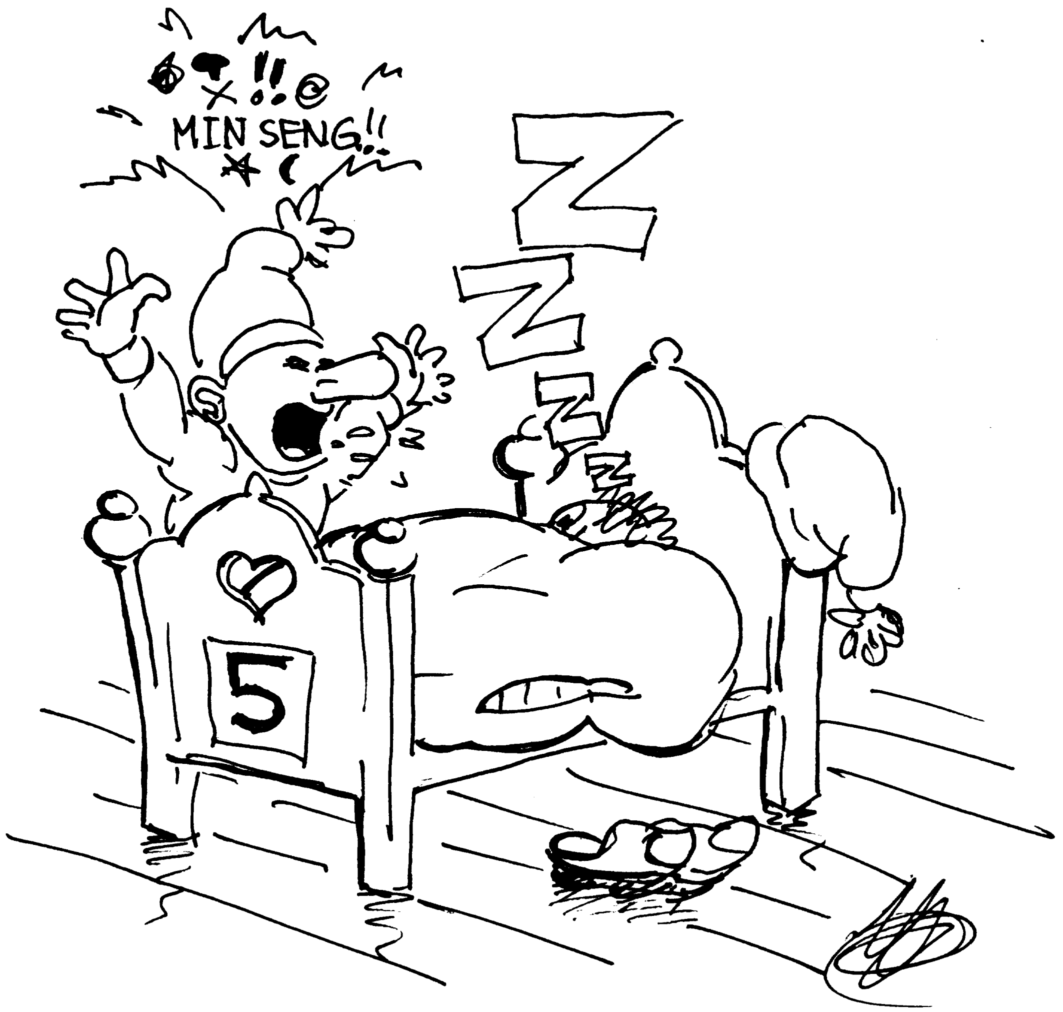
[14] Masanori Ohya & Dénes Petz, *„Quantum Entropy and its Use“*, Texts and Monographs in Physics, Springer Verlag, Heidelberg (1993).

[15] Gert K. Pedersen *Some operator monotone functions*, Proceedings of the American Mathematical Society 36 (1972), 309–310.

[16] Gert K. Pedersen *Operator differentiable functions*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University 36 (2000), 139–157.

[17] Gert K. Pedersen *Convex trace functions of several variables on C^*-algebras*, Preprint.

[18] Eugene P. Wigner & John von Neumann *Significance of Loewner's theorem in the quantum theory of collisions*, Annals of Mathematics 59 (1954), 418–433.



Opgaverespons

Henning Makholm
henning@makholm.net

Nisseopgaven fra december 2001

Ifald redaktionen bringer den følgende løsning, vil den sikkert blive klippeklistret ind blandt deres egne kommentarer til læsernes sædvanlige slaskhed m.v., men blot for fuldstændighedens skyld gentager vi lige opgaven:

> Der er n nisser, og de har deres seng i en stor fælles sovesal. Nisser er normalt meget disciplinerede så de går i seng i rækkefølge. Til sidste års julefest fik nisse nummer 1 imidlertid for meget at drikke, så da han skulle i seng (som den første) tog han en tilfældig seng i stedet for sin egen. Resten af nisserne tog deres egen seng, men hvis den var optaget tog de en tilfældig. Hvad er sandsynligheden for at nisse nummer n fik sin egen seng?

Jeg ser allerførst helt bort fra det trivielle tilfælde $n = 1$ – i så fald er der kun en nisse og en seng, og så vil selv en tilfældig seng blandt den ene altid være den rigtige, og den efterspurgte sandsynlighed er derfor 1. Det er et uinteressant tilfælde som vi ikke kan bruge til noget i det efterfølgende.

Af hensyn til analysen, og for at forvirre læserne maksimalt, starter jeg med at omnummerere nisserne. Herefter er det nisse nummer n der går i seng først (men har fået for meget glögg og ikke kan huske hvad hans nummer er), og vi er interesserede i om nisse nummer 1 kommer til at sove i sin egen seng. Kald denne begivenhed (altså at nisse 1 ender i egen seng) for A.

Derefter fjerner vi seng nummer n og tilføjer i stedet en seng nummer 0. Nisse n er den eneste der bekymrer sig om forskellen mellem nummer n og nummer 0, og eftersom tilfældet $n = 1$ lige er løst, kan vi være ligeglade med om nisse n havner i sin egen seng i det tilfælde at den seng han vælger ikke er en af de andres.

Så behøver nisse n heller ikke være fuld mere, og vi kan blot sige at enhver nisse der ikke finder en ledig seng med sit eget nummer altid vælger mellem de senge der er ledige når han kommer ind i sovesalen. For at kunne regne meningsfuldt må vi antage at pågældende nisse trods alt er åndsfrisk nok til at vælge stokastisk mellem de ledige senge efter en ligefordeling. Hvis jeg var nisse ville jeg bare vælge den nærmeste ikke-optagede seng (efter en passende metrik), men sådan er matematikere og nisser så forskellige...

Vi er altså ude efter

$$p(n) = P(A \,|\, \text{nisse } n \text{ må vælge en af sengene } \{0,1,...,n\text{-}1\})$$

for $n > 1$.

Vi deler nu op efter hvor nisse nr. n havner:

$$p(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} P(A \,|\, \text{nisse } n \text{ i seng } j)$$

Vi har $P(A \,|\, \text{nisse } n \text{ i seng } 0) = 1$ (for så er alle resten af nisserne glade) og $P(A \,|\, \text{nisse } n \text{ i seng } 1) = 0$ (for så er håbet ude for nisse 1). I det generelle tilfælde hvor $j \geq 2$ vil nisserne fra $n-1$ ned til $j+1$ blot indtage deres egne senge. Derefter har nisse j et problem, og han må så vælge mellem sengene $\{0, 1, 2, ..., j-1\}$. Samlet:

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{1}{n} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{n} P(A \,|\, \text{nisse } j \text{ må vælge en af sengene } \{0, 1, ..., j-1\}) \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{n} p(j) \;=\; \frac{1}{n}\Big(1 + \sum_{j=2}^{n-1} p(j)\Big) \end{aligned}$$

Vi har nu en rekursiv forskrift for $p(n)$, og det er nok til at give sig til at begynde at regne nogen værdier af $p(n)$ ud. Der viser sig hurtigt et mønster, idet $p(n) = 1/2$ for alle n (≥ 2)! Dette bekræftes af et let lille induktionsbevis ud fra rekursionsformlen.

Bonusopgave. Hvad er sandsynligheden for at nisse nummer k ender i sin egen seng når der er n ($> k$) nisser?

Mere om punkter med rationel afstand

Som led i den fortsatte saga om punkter med rationel afstand vil jeg gerne udbygge Asger Grunnets resultat fra oktober 2001 til højere dimensioner:

Sætning 5. *For $n \geq 2$ findes der en begrænset, numerabelt uendelig mængde $A_n \subset \mathbb{R}^n$ således at ethvert par af punkter fra A_n har indbyrdes rationel afstand og A_n udspænder $\mathbb{R}^n$.*

Bevis. Ved induktion efter n, idet vi skærper "begrænset" i induktionshypotesen til "ethvert punkt i A_n har norm 1". Grundtilfældet $n = 2$ er Asger Grunnets konstruktion fra FAMØS oktober 2001 (men uden redaktionens forbedringsforslag).

Induktionstrin: Vi identificer $\mathbb{R}^{n-1}$ med dets billede ved den naturlige (isometriske) indlejring $(x_1, ..., x_{n-1}) \mapsto (x_1, ..., x_{n-1}, 0)$. Lad nu

$$A_n = \{e_n\} \cup \{\, (24/25)a + (7/25)e_n \,|\, a \in A_{n-1} \,\}$$

hvor e_n naturligvis er $(0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Afstanden mellem to punkter i A_n er enten 0, $\sqrt{(24/25)^2 + (18/25)^2} = 6/5$ eller $24/25$ af en indbyrdes afstand i A_{n-1}. Altså i alle tilfælde rationel. At alle punkter i A_n har norm 1 ses lige så let. $\square$

Som korollar til konstruktionen ses at A_n endda kan vælges som delmængde af $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$.

Hermed er sagaen dog ikke slut. Motivationen for ikke blot at være tilfredse med $(\mathbb{Q} \cup [-1; 1]) \times \{0\}$ var jo at den mængde ikke rigtig var "fyldig" nok i planen. Asgers konstruktion er "fyldig" på mindst to måder:

i) Billedet af A_2 under enhver ikke-triviel lineær afbilding af $\mathbb{R}^2$ er stadig uendeligt.
ii) A_2 er tæt i en åben delmængde af enhedskuglen i $\mathbb{R}^2$

hvor (ii) dog medfører (i), men ingen af disse egenskaber er bevaret i min konstruktion. Det ville være interessant at finde ud af om en eller begge af dem kan opnås i højere dimensioner. Jeg ved det ikke.

Nu hvor jeg alligevel er i gang med de rationelle afstande, vil jeg gerne undre mig lidt over længden af beviset for Lemma 1 i Asger opgaveløsning. Når vi alligevel anvender Eulers formler, er det da nemmere blot at sige:

Lemma 6. *Hvis* $\sin(x), \cos(x) \in \mathbb{Q}$, *vil* $\sin(nx), \cos(nx) \in \mathbb{Q}$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$.

Bevis. $\mathbb{Q}[i]$ er lukket under multiplikation, derfor også under heltallig potensopløftning. Idet $\sin(x), \cos(x) \in \mathbb{Q}$ er $e^{ix} \in \mathbb{Q}[i]$ og derfor også $(e^{ix})^n = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) \in \mathbb{Q}[i]$. $\square$

Abeopgaven

Majbritt Skov Jensen

Den husalf, som maskinskrev Opgave 1 i sidste nummer af FAMØS, har desværre glemt så meget af sidste del, at opgaven lige gentages her.

> Der hænger et reb ned over en mur, og det er lige langt på begge sider af muren. Det vejer en trediedel pund pr. fod. I den ene ende hænger der en abe med en banan i hånden og i den anden ende et lod, der vejer nøjagtig det samme som aben. Bananen vejer to unser pr. tomme. Rebet er lige så langt (i fod), som aben er gammel (i år), og abens vægt (i unser) er det samme som abens mors alder. Aben og dens mor er tilsammen tredive år. Det halve af abens vægt plus bananens vægt udgør tilsammen en fjerdedel af loddets plus rebets vægt. Abens mor er halvt så gammel, som aben vil være, når den er tre gange så gammel, som dens mor var, da hun var halvt så gammel, som aben vil være, når den er lige så gammel, som dens mor vil være, når hun er fire gange så gammel, som aben var, da den var dobbelt så gammel, som dens mor var, da hun var en trediedel så gammel, som aben var, da den var lige så gammel som dens mor var, da hun var tre gange så gammel, som aben var, da den var en fjerdedel så gammel, som den er nu. Hvor lang er bananen? (1 pund=16 unser)

Sæt
A:= loddets vægt (i unser) = abens vægt (i unser) = abens mors alder (i år) og
B:= rebets længde (i fod) = abens alder (i år), så er

$$\frac{1}{2}A + \text{bananens vægt} = \frac{1}{4}(A + B \cdot \frac{16}{3}).$$

$A + B$ er lig 30 og $A = 1/2 \cdot 3 \cdot 1/2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1/3 \cdot 3 \cdot 1/4 \cdot B$, så $A = 18$ og $B = 12$. Nu er bananens vægt (i unser) =23/2, så bananens længde er 23/4 tomme=5,75 tomme.