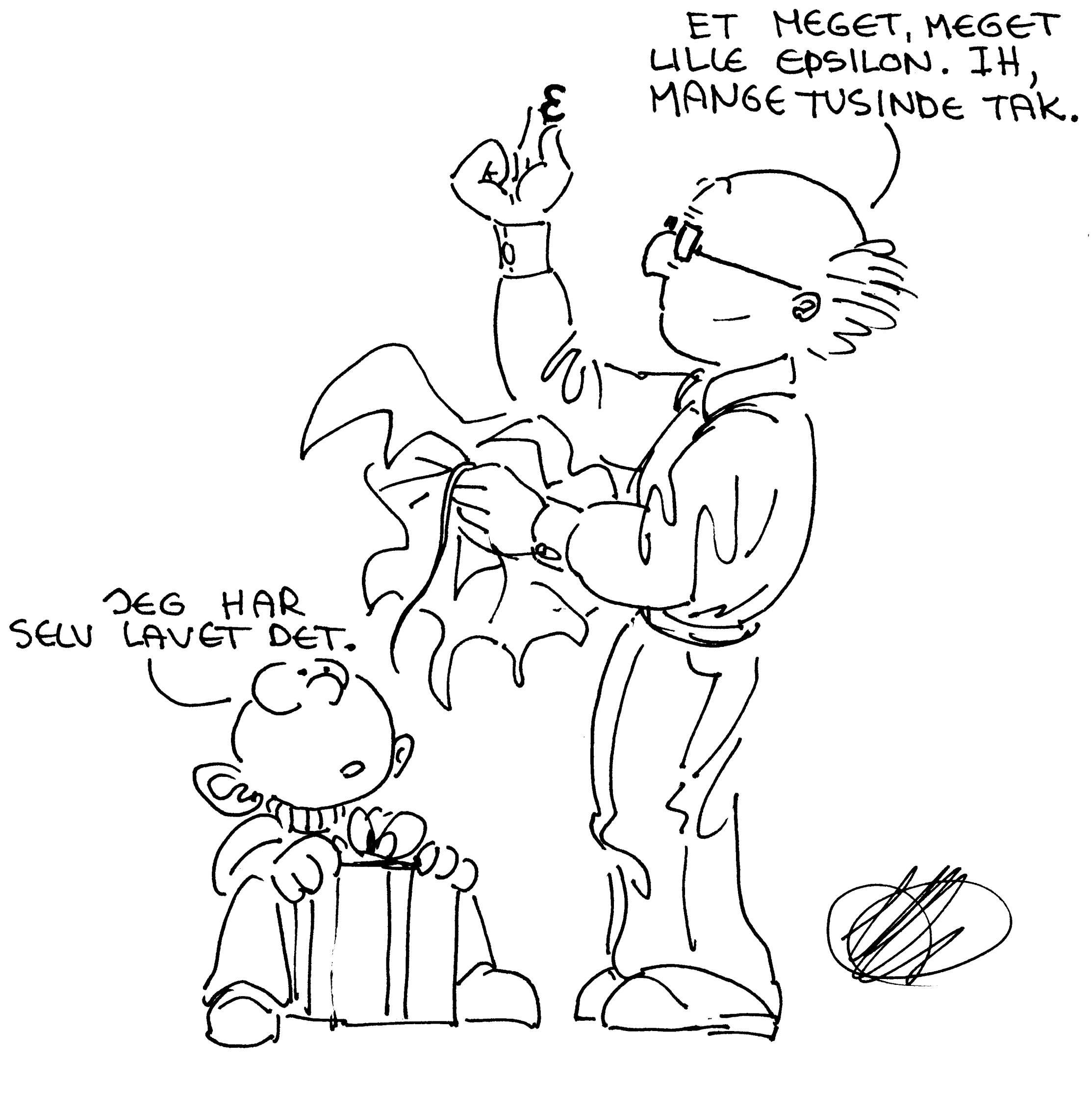
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

15. årgang, nr. 2, december 2001



FAMØS 15.2; december 2001.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)
Ulf Worsøe

Tegner:

Ulf Worsøe

Deadline for næste nummer:
Fredag den 22. februar 2002

Indlæg modtages gerne og kan sendes til famos@math.ku.dk (meget gerne skrevet i LaTeX), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web-adresse:
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 600 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder

Det er midt i januar, semesterets sidste eksamen er veloverstået og udenfor falder sneen stille…

Ja, sådan er der sikkert nogle stykker blandt læserne der ville håbe virkeligheden så ud. Desværre er vi kun midt i december, og semesteret er lige knap slut. Desværre er det ikke snevejr, men eksamenslæsningen der lurer lige om hjørnet.

Først skal vi dog fejre jul, og derfor er årets julenummer af FAMØS nu på gaden. Desværre er sitternæssen rendt med store dele af vores indhold, bl.a. sidste del af denne leder, men der er da heldigvis stadig ting i bladet der burde være værd at læse. Ellers kan du jo nyde Ulfs tegninger.

Nu er vi er i nærheden af emnet, så ville det være rart med noget hjælp til at redigere det indhold vi har til at ledsage tegningerne. FAMØS har aldrig været et blad redaktionen brugte store mængder af tid på, til gengæld er det oftest

Opgaver

Majbritt Skov Jensen & Henrik Chr. Grove

Opgave 1

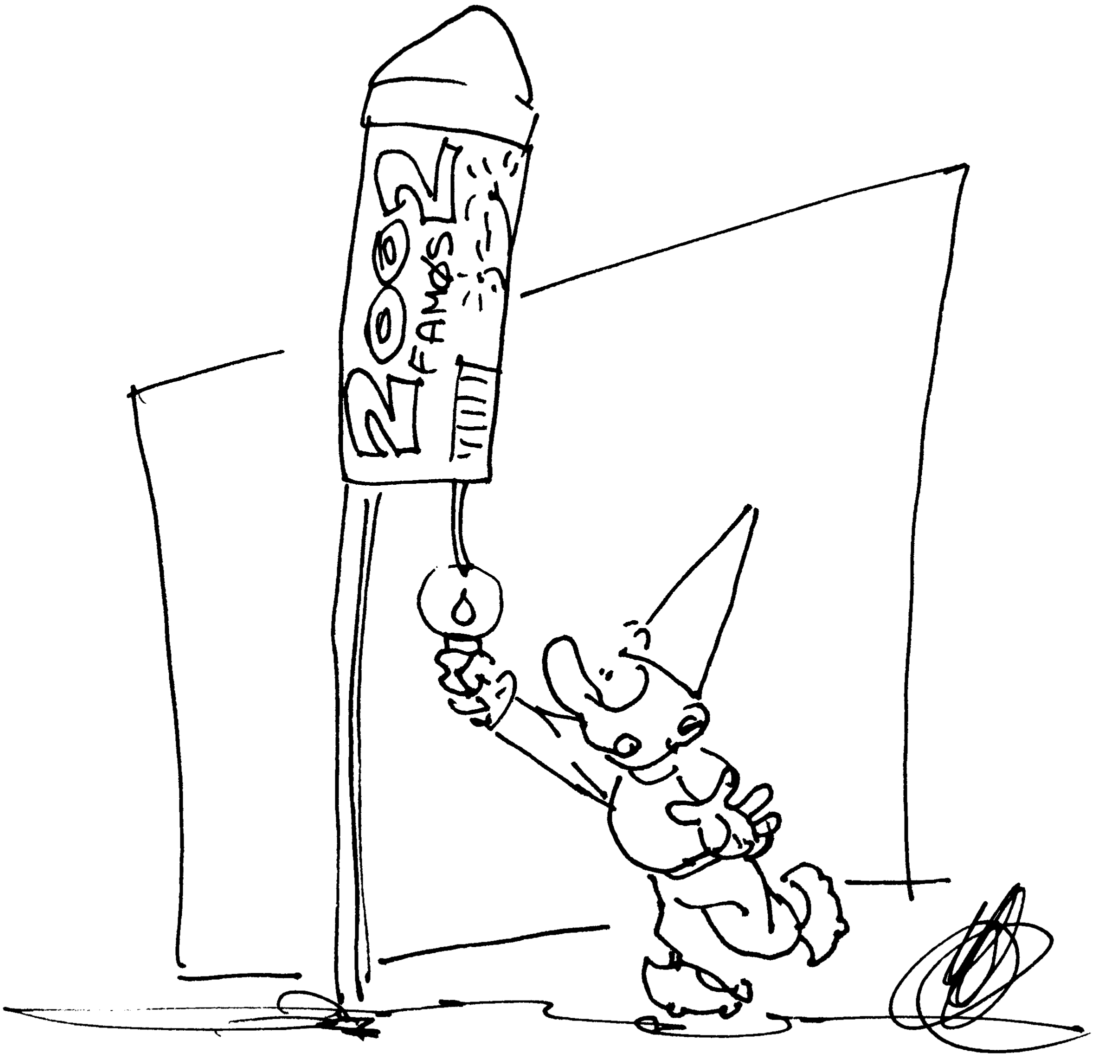
Der hænger et reb ned over en mur, og det er lige langt på begge sider af muren. Det vejer $1/3$ pund pr. fod. I den ene ende hænger der en abe med en banan i hånden, og i den anden ende et lod, som vejer nøjagtig det samme som aben. Bananen vejer to unser pr. tomme. Rebet er lige så langt (i fod), som aben er gammel (i år), og abens vægt (i unser) er den samme som abens mors alder. Aben og dens mor er tilsammen tredive år. Det halve af abens vægt plus bananens vægt udgør tilsammen en fjerdedel af loddets plus rebets vægt. Abens mor er halvt så gammel, som aben vil være, når den er lige så gammel, som dens mor vil være, når hun er fire gange så gammel, som aben var, da den var dobbelt så gammel, som dens mor var, da hun var tre gange så gammel, som den er nu. Hvor lang er bananen?

NB: 1 pund $=$ 16 unser.

Opgave 2

Der er n nisser, og de har hver deres seng i en stor fælles sovesal. Nisser er normalt meget disciplinerede så de går i seng i rækkefølge. Til sidste års julefest fik nisse nummer 1 i midlertid for meget at drikke, så da han skulle i seng (som den første) tog han en tilfældig seng i stedet for sin egen. Resten af nisserne tog deres egen seng, men hvis den var optaget tog de en tilfældig. Hvad er sandsynligheden for at nisse nummer n fik sin egen seng?

Redaktionen har ikke løsninger til nogle af opgaverne, så hvis I ikke indsender jeres, vil de stakler der ikke selv kan løse opgaverne aldrig se løsningen.



Fagrådet for de matematiske fag

Mikkel Øbro

Efter gentagne forsøg er det tilsyneladende lykkedes at få stablet et fagråd på benene. Vel at mærke et fagråd for ALLE uddannelserne i E-bygningen.

Fagrådets formål

Men hvad er så dette fagråd for noget? Jo, som bekendt (?) sidder der studenterrepræsentanter i såvel studienævnet som institutbestyrelsen. Studienævnet har ansvaret for alt hvad der har med uddannelserne at gøre, dvs. bestemmer kursernes udbud og indhold, undervisnings- og eksamensformer, meritoverførsler, dispensationssager, osv. Studienævnet består af fem studerende og fem VIP'ere (VIdenskabeligt Personale). Institutbestyrelsen står for den anden halvdel af universitetets virke, nemlig forskningen, samt driften af instituttet, f.eks. bibliotekerne. Det er instituttet, der ansætter VIP'ere, som så skal bruge cirka halvdelen af tiden på at varetage den undervisning, som studienævnet ønsker afholdt. I institutbestyrelsen sidder der to studerende (plus en ekstra studerende med observatørstatus), fem VIP'ere og to TAP'ere (Teknisk og Administrativt Personale, f.eks. sekretærer).

Fagrådet kommer ind i billedet, når studenterrepræsentanterne forsøger at tale de studerendes sag i nævnet og bestyrelsen, for hvad mener de studerende egentlig om dette og hint? Fagrådet er det forum, hvor studenterrepræsentanterne kan møde „den almindelige studerende“ og fremlægge aktuelle sager for at høre „den almindelige studerendes“ mening. Ved at møde op på fagrådsmøderne kan man forholdsvis nemt få indflydelse på de beslutninger der angår ens eget studieforløb.

Lidt om sidste møde og dato for næste møde

Fagrådet holdt møde den 21. november kl.15.15 i S01 (nederste etage i E-bygningen). Et af de store diskussionsemner var et kommende forslag om ændring af de obligatoriske ugeopgaver på MAT 1. Det springende punkt i forslaget er, at der skal gives karakter for hver aflevering, og disse karakterer tæller med i den samlede karakter, der gives for kurset. Derudover blev der snakket lidt om evalueringsrapportens konklusioner bl.a. at omfanget af MAT 2SS er for stort i forhold til pointtallet.

Fagrådets næste møde bliver onsdag den 12. december kl. 15.15 i S01. Der vil blive sat opslag op cirka en uge før, så hold øje med dem.

FAGRÅDSMØDE DEN 12/12 KL. 15.15 I S01

Mød op hvis DU vil have indflydelse på dit studium.

PS. Der vil være kage!

Opgaveløsning

I sidste nummers artikel om „tværprodukter“ var der en enkelt lille opgave.

> Find et tal der hverken har 0 eller 5 som ciffer men 0 som itereret tværprodukt. Kan du finde det mindste, eller et som giver anledning til færrest mulige skridt (3)?

Der kom faktisk (for en sjælden gangs skyld) en reaktion på opgaven. Rasmus Mackeprang skrev nemlig:

> Vel er jeg blot en fysiker ...
> Jeg tolker dette således, at I mener, at det færrest mulige antal iterationer for at få 0 som itereret tværpodukt under de givne betingelser er 3.
> Imidlertid vil jeg bede jer betragte tallet: 2222222222 (der er 10 totaller).
> Det har tværprodukt $2^{10} = 1024$, som igen har tværproduktet 0. Dette var kun to iterationer. Har jeg misforstået jeres „skridt“-begreb, eller har vi her et modeksempel?

Rasmus har ikke misforstået vores skridt-begreb, men derimod fundet en (tryk-)fejl i opgaven. Og selvom fysikere af og til har et lidt vel afslappet forhold til matematisk stringens er der i dette tilfælde ingen grund til at skamme sig over blot at være fysiker.

Det mindste tal (jeg har prøvet fra en ende af) der har den ønskede egenskab er 78, som har tværproduktet 56 som igen har tværproduktet 30 som endelig har tværproduktet 0.

Redaktionens eksempel på et tal der kun giver anledning til to skridt er 349 som har tværproduktet 108, 108 kan vises at være det mindste tal der kan være det næstsidste i en sekvens med to skridt, men om 349 er det mindste der giver anledning til to skridt, har vi ikke undersøgt.

Juleessay

Ulf Worsøe

I det lille land Danmark gik verden ikke under ved årtusindeskiftet, og de fleste havde endog overlevet indtil december, men nu begyndte det også at se mørkt ud for rigtig mange små matematikstderende. Og det var ikke kun fordi solen gik ned klokken 3 om eftermiddagen.

Utallige unge mennesker (også nogle mindre unge... Og, naturligvis, nogle helt gamle), lige fra de evighedsstuderende Mat 1'er til de dygtigste Plangeometriakrobater og Algebraikerene fra Det Ydre Rum kunne mærke at verdens undergang let kunne være nært forestående.

Allerede fra den første december, ja nogle få faktisk flere måneder før det, begyndte de alle sammen at læse og læse og læse, for hvis de nu læste rigtig meget, og var ekstra flittige gennem hele julen, ville miraklet måske ske, og de ville bestå alle deres januareksamener.

Det var et rørende syn at se, hvordan man undertrykkede julestemningen i HCØ's lange vintermørke gange, glemte alt om juletræer, pebernødder, vanilliekranse og marcipan, blot for at det ikke skulle forstyrre de små flittige hjerners koncentration. Undervisere så vel som instruktorer og vandrede rundt for at hjælpe de mest fortabte, og man så de ældre (og de gamle) studerende hjælpe de Små fra Første År, som endnu ikke havde lært at julen var en læseferie.

På de kolde fugtige kollegieværelser blev utallige bøger studeret og mange sider vendt i skæret af usle stearinlys, og de Små Kloge Hoveder in spe sad alle og bad „Hvis jeg består denne gang, vil jeg aldrig mere sige at jeg skulle have læst filosofi istedet".

Juleaften vendte de alle deres (små!) rødmossede ansigter og blanke tårevædede øjne mod den stjerneklare julehimmel, hvor de håbede på at få et glimt af julemanden i sin kane... De havde alle kun et eneste ønske: Om de dog blot denne ene gang kunne få lov til at undgå januarapokalypsens depressive favntag og bestå alle eksamenerne.

Men nej. Vi ved jo godt at det alligevel aldrig vil ske. Så tag dog for pokker og hold juleferie istedet for.

Automorfier

Søren Jøndrup

I det følgende betegner F et legeme. Vi betragter forskellige ringe A som indeholder legemet F. Endvidere forudsættes at for $x \in F$ og $a \in R$ vil $ax = xa$, dvs. F er indeholdt i centret for ringen R.

Et af de problemer man er interesseret i er: Bestemmelse af alle F-automorfier for en given ring af ovennævnte type. En F-automorfi af R er som bekendt en bijektiv afbildning φ, som er en ringhomomorfi og som opfylder

$$\varphi(x) = x \text{ for alle } x \in F$$

For polynomiumsringen i 1 variabel $F[T]$ er det let at bestemme samtlige F-automorfier.

1. Man bemærker først at en F-homomorfi er givet ved billedet af T.
2. $\text{grad}(\varphi(p(T)) = \text{grad}(p(T))\text{grad}(\varphi(T))$
3. Hvis T skal tilhøre billedet for φ må graden af $\varphi(T)$ højst være 1, dvs. $\varphi(T) = a_0 + a_1T$, $a_1 \neq 0$.

Herved bestemmes faktisk en F-automorfi.

Vi har altså set at for polynomiumsringen i 1-variabel er automorfigruppen $Fx(F \setminus \{0\})$.

For polynomiumsringen i 2 variable er situationen langt mere kompliceret.

Her bemærker vi dog (de variable kaldes nu x og y): En homomorfi af polynomiumsringen $F[x, y]$ er helt bestemt homomorfiens værdi på x og y og disse værdier kan vælges frit.

Man ser let at man får bestemt automorfier ved:

$$x \to a_{11}x + a_{21}y \text{ og } y \to a_{12}x + a_{22}y$$

hvor matricen $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ er invertibel.

Disse typer af automorfier kaldes lineære.

Man har endvidere translationerne givet ved $x \to a_x + b_xx$ og $y \to a_y + b_yy$, b_x og b_y begge ulig 0.

Endelig er det klart at homomorfier givet ved

$$x \to ax + f(y),\ a \neq 0 \text{ og } y \to y$$

er automorfier (x baseret "shear"), og tilsvarende med x og y ombyttet.

Lidt hjælp får man af følgende resultat når man skal afgøre om en endomorfi (homomorfi af ringen ind i sig selv) er en automorfi (ligesom for endelig dimensionale vektorrum):

Sætning 1. *Lad φ være en surjektiv F-endomorfi af $F[x,y]$; φ er injektiv.*

Bevis. Ved at sammensætte φ med en translation ses det at det uden indskrænkning kan antages at idealet (x,y) afbildes på sig selv. Vælg $w \in \ker(\varphi)$ og lad d være graden af w. Lad I betegne idealet bestående af alle polynomier af grad skarpt større end d. På grund af at $\varphi(x) \in (x,y)$ og $\varphi(y) \in (x,y)$ vil $\varphi(I) \subseteq I$ og derfor vil φ inducere en F-lineær afbildning

$$\varphi' : F[x,y]/I \to F[x,y]/I$$

φ' må være surjektiv, da φ er det; $F[x,y]/I$ er et endelig dimensionalt vektorrum så i følge Mat 1 GA er φ' en isomorfi. Men $\varphi'(d) = 0$, modstrid. □

En automorfi af $F[x_1,\ldots,x_n]$ kaldes 'tam' hvis den er sammensat af automorfier af ovennævnte 3 typer (oplagt generaliseret fra polynomiumsringen i 2 varible til n-variable). Ellers kaldes automorfien 'vild'.

Man kan vise at i tilfældet med 2 variable er enhver automorfi tam, det er ukendt hvad svaret er for 3 eller flere variable.

Der har været eksempler på automorfier som man gættede på var vilde, de har alle vist sig at være tamme alligevel.

Tilfældet med 2 variable er for et legeme med karakteristik 0 (f.eks. de rationale eller reelle tal) et resultat af H.W.E. Jung fra 1942 og beviset er et ret analytisk bevis. Det helt generelle tilfælde blev løst af Van der Kulk i 1952 med et rent algebraisk argument.

> Det kan også nævnes at en F-automorfi af den fri algebra giver en surjektiv homomorfi af den tilsvarende polynomiumsring. Denne homomorfi bliver så på grund af bemærkningen en automorfi og vi får så en afbildning fra F-automorfierne af den fri algebra til F-automorfierne af den tilsvarende polynomiumsring. I tilfældet med 2 variable er dette også vist at være en isomorfi.
>
> (Makar-Limanov og Czerniakiewicz 1970)

Hvis nu F er et algebraisk afsluttet legeme (C) er de maksimale idealer i $C[x,y]$ af formen $(x-a, y-b)$ og svarer til punkter i planen. Vi har en oplagt virkning af (2×2)-matricerne på punkterne i planen (god gammeldags matrixmultiplikation). Automorfigruppen for (2×2)-matricer over et legeme er let at bestemme idet der gælder følgende resultat (specialtilfælde af Noether-Skolems sætning):

Sætning 2. *Lad F være et legeme og φ en F-automorfi af $Mat_n(F)$. Da findes invertibel matrix A så φ er af formen $\varphi(X) = AXA^{-1}$, man siger φ er indre.*

Beviset for ovenstående resultat kunne faktisk klares på Mat 1 GA (det er vist længe siden jeg har undervist i kurset, dog ikke for længe).

Bevis. Lad $e_{ij},\ 1 \leq i,j \leq n$ betegne de sædvanlige matrixenheder; e_{ij} er den matrix som har 1 på den (i,j)'te plads og ellers 0. Bemærk at $e_{ij}e_{kl} = 0,\ j \neq k$ og $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$.

Specielt er e_{11} en projektion med dimension 1 opfattet som lineær afbildning. $\varphi(e_{11})$ har derfor samme egenskab.

Nu opfattes $\varphi(e_{11})$ som en lineær afbildning. Da det er en projektion kan den diagonaliseres og da den har rang 1, findes invertibel matrix P så $P\varphi(e_{11})P^{-1} = e_{11}$. Betragt φ ændret med P; det er nu nok at vise at denne automorfi er indre altså er multiplikation foran og bagved med den inverse til en invertibel matrix. Vi kan altså antage at $\varphi(e_{11}) = e_{11}$.

$$\varphi((1-e_{11})\mathrm{Mat}_n(F)(1-e_{11})) = (1-e_{11})\mathrm{Mat}_n(F)(1-e_{11})$$

men denne sidste del kan opfattes som $(n-1)\times(n-1)$-matricer og ifølge induktion er phi's restriktion hertil indre.

Man ser nu at man uden indskrænkning kan antage at $\varphi(e_{ij}) = e_{ij}$ for alle i,j hvor $i > 1$ eller $j > 1$ eller $(i,j) = (1,1)$

$$\varphi(e_{12}) = \varphi(e_{11}e_{12}e_{22}) = \varphi(e_{11})\varphi(e_{12})\varphi(e_{22}) = e_{11}\varphi(e_{12})e_{22}$$

Følgelig er $\varphi(e_{12}) = ae_{12}$ for passende $a \in F\backslash\{0\}$.

Med matricen

$$A = \mathrm{diag}(a-1, 1, ., 1)$$

vil $A\varphi(e_{ij})A - 1 = e_{ij}$ for alle de gamle e_{ij} og e_{12}.Vi kan nu antage at φ også holder e_{12} fast. Men

$$\varphi(e_{1j}) = \varphi(e_{12}e_{2j}) = \varphi(e_{12})\varphi(e_{2j}) = e_{1j}$$

$$\varphi(e_{k1}) = \varphi(e_{k2}e_{21}) = \varphi(ek2)\varphi(e_{21}) = e_{k1}$$

Sætningen er hermed vist. □

Dette er (selv om selv jeg ved at Matrixringe ikke er kommutative) en meget kommutativ situation.

Generelt erstattes planen af kvanteplanen : Polynomiumsringen i de 2 variable x og y, hvor x og y hvad angår multiplikation ikke kan ombyttes. Der gælder dog $xy = yx$, hvor $q \in F$, $q \neq 0, 1, -1$.

(Automorfigruppen her er let at finde: Det eneste man kan er at gange x og y med skalarer ulig 0)

Hvis man tager et punkt (x,y) i kvanteplanen $(xy = qyx)$ og lader en almindelig matrix virke herpå lander man ikke altid i kvanteplanen; denne defekt klares af kvante (2×2)-matricer, dette er matricer

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

hvor $ab = qba$, $ac = qca$, $cd = qdc$, $bd = qdb$, $bc = cb$ og $ad - da = (q - q^{-1})bc$.

Man kan eftervise, at en kvantematrix som virker som matrixmultiplikation på et kvantepunkt igen giver et punkt i kvanteplanen.

Hvis man nu betragter algebraen frembragt af a, b, c og d, hvor der gælder $ab = qba$, $ac = qca$, $cd = qdc$, $bd = qdb$, $bc = cb$ og $ad - da = (q - q^{-1})bc$, fås en algebra som betegnes $\mathrm{M}_q(2)$.

Automorfigruppen for denne er dog ikke helt let at bestemme: Hvis q ikke er en enhedsrod (Alev og Chamarie):

Der er $a \to f_1 a$, $b \to f_2 b$, $c \to f_3 c$, $d \to f_4 d$, hvor er $f_1 f_4 = f_2 f_3$ og alle ulig 0 alle automorfier. Endvidere kan b og c ombyttes. Disse frembringer automorfigruppen. I tilfældet hvor der findes et m så $qm = 1$ er der endvidere:

$$b \to b,\ \ c \to c,\ \ d \to d,\ \ a \to a + f(b, c, d^m)d^{m-1}$$

hvor $f(b, c, d^m)$ er et centralt polynomium, dvs. f kan ombyttes med hvad som helst fra ringen og tilsvarende hvor a og d bytter plads.

Jeg havde håbet at det med sikkerhed var korrekt at skrive at der ikke er andre automorfier, altså at ovennævnte frembringer den fulde automorfigruppe.

Indskrivelige firkanter

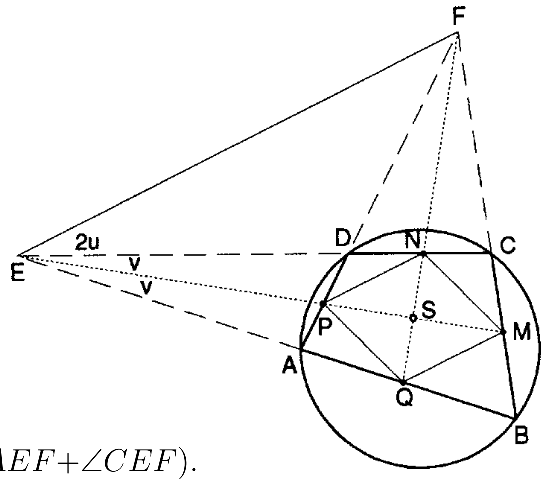
Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium

Som kandidat i matematik fra 1967 (levede der virkelig mennesker dengang?) har jeg på fornemmelsen at „klassisk“ matematik i form af plangeometri i euklidisk forstand ikke er så meget „in“ på de højere læreanstalter i dag. Jeg håber derfor, at nedenstående små sætninger om noget så eksotisk som indskrivelige firkanter kan interessere læserne.

Kriteriet for en firkants indskrivelighed er udmøntet i den grundlæggende sætning:

Sætning 3. *$\square ABCD$ er indskrivelig netop hvis summen af de modstående vinkler er 180°.*

Vi begynder med følgende lille



Sætning 4. *I den indskrivelige $\square ABCD$ skærer de modstående sider AD og BC hinanden i F og de modstående sider CD og AB i E. Vinkelhalveringslinierne til vinklerne DEA og DFC skærer firkantens sider i P og M og i N og Q. Da er $\square MNPQ$ en rombe.*

Bevis. Lad vinkelhalveringslinierne skære hinanden i S. Så er

$$\angle SEF = v+2u = \tfrac{1}{2}(2(v+u)+2u) = \tfrac{1}{2}(\angle AEF+\angle CEF).$$

På samme måde er

$$\angle SFE = \tfrac{1}{2}(\angle CFE + \angle AFE).$$

Af $\triangle SFE$ fås så

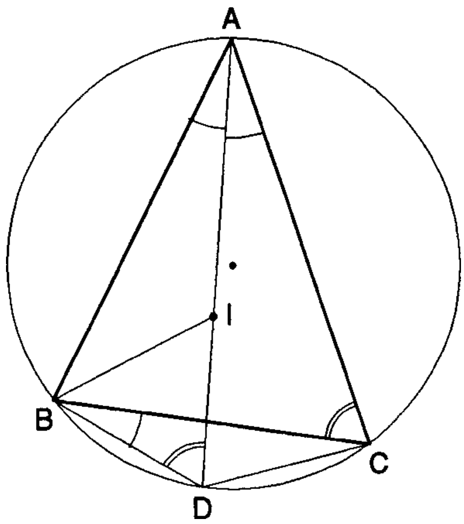
$$\begin{aligned}
\angle ESF &= 180^\circ - (\angle SEF + \angle SFE) \\
&= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\angle AEF + \angle AFE + \angle CEF + \angle CFE) \\
&= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle EAF + 180^\circ - \angle FCE) \\
&= \tfrac{1}{2}(\angle EAF + \angle FCE) \\
&= \tfrac{1}{2}(180^\circ - A + 180^\circ - C) \\
&= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(A + C) \\
&= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.
\end{aligned}$$

Dermed har vi fundet, at diagonalerne i $MNPQ$ er ortogonale.

I $\triangle EQN$ er ES vinkelhalveringslinie fra topvinklen, og den står vinkelret på grundlinien NQ, så ES er midtnormal i trekanten. Da P og M ligger midt på ES er derfor $PN = PQ$ og $MN = MQ$. Analogt fås i $\triangle FPM$, at $NP = NM$. Dermed er vist, at $\square MNPQ$ er en rombe. $\square$

Vi skal nu vise en overraskende sætning om de indskrevne cirkler i nogle af de trekanter, som diagonalerne i firkanten deler firkenten i, og indleder med følgede lemma:

Lemma 3. *Hvis I er centrum for den indskrevne cirkel i $\triangle ABC$ og halveringslinien for A skærer den omskrevne cirkel i D er DB=DC=DI.*

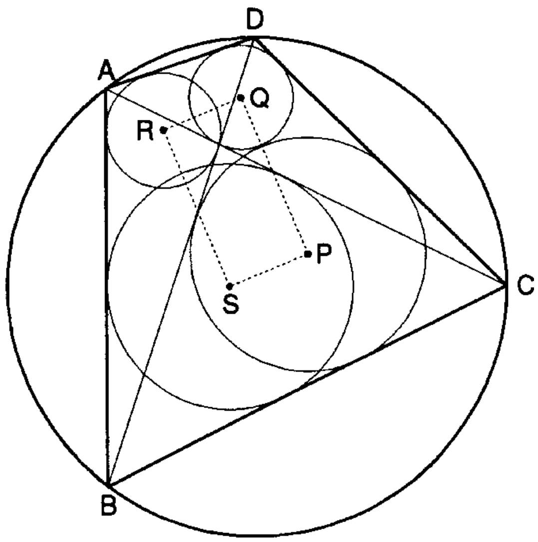


Bevis. D er midtpunktet af buen BC, så $DB = DC$. På figuren er de markerede vinkler lige store, så i $\triangle DIB$ fås

$$\begin{aligned}\angle DIB &= 180^\circ - \angle IBD - \angle BDI \\ &= 180^\circ - (1/2B + 1/2A) - C \\ &= 180^\circ - (90^\circ - 1/2C) - C \\ &= 90^\circ - 1/2C \\ &= 1/2A + 1/2B \\ &= \angle IBD.\end{aligned}$$

Dermed er $\triangle DIB$ ligebenet, så $DB = DI$. $\square$

Sætning 4. *I den indskrivelige $\square ABCD$ deler hver diagonal firkanten i to trekanter. Centrene P, Q, R og S for de indskrevne cirkler for disse trekanter ($\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ og $\triangle DAB$) udspænder et rektangel.*



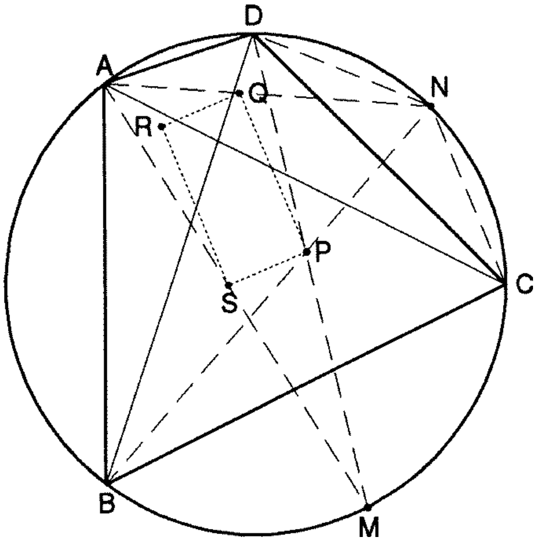
Bevis. Lad M og N være midtpunkter af buerne BC og CD. Da AN er halveringslinie for $\angle CAD$, går AN gennem Q, og da DM er halveringslinie for $\angle BDC$, går DM gennem P.

I $\triangle ADC$ anvender vi lemmaet på halveringslinien AN fra A og får, at $ND = NC = NQ$. I $\triangle BCD$ giver lemmaet at $ND = NC = NP$. Dermed er $\triangle PQN$ ligebenet og

$$\angle QPN = 1/2(180^\circ - \angle PNQ) = 90^\circ - 1/2\angle PNQ = 90^\circ - 1/2\angle BNA.$$

På samme måde er

$$\angle SPM = 90^\circ - {}^1\!/_2\angle DMA.$$



Nu er $\angle BPM$ en indre vinkel i cirklen, så dens gradtal er den halve sum af gradtallene for de buer, som den selv og dens topvinkel spænder over:

$$\angle BPM = {}^1\!/_2(\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{ND}) = {}^1\!/_4(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD})$$

Vi har, at

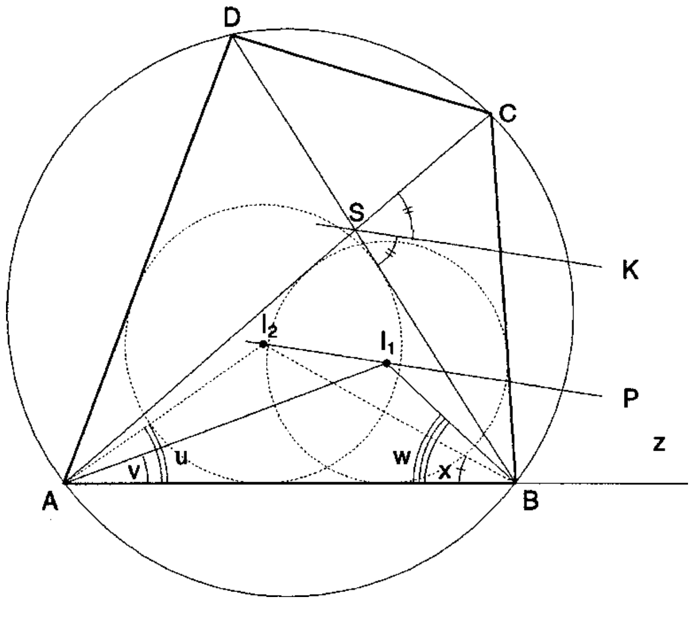
$$\angle QPN + \angle QPS + \angle SPB = 180^\circ$$

så vi kan udregne

$$\begin{aligned}
\angle QPS &= 180^\circ - \angle QPN - \angle SPB \\
&= 180^\circ - (90^\circ - {}^1\!/_2\angle BNA) - (\angle SPM - \angle BPM) \\
&= 90^\circ + {}^1\!/_2\angle BNA - \angle SPM + \angle BPM \\
&= 90^\circ + {}^1\!/_2\angle BNA - (90^\circ - {}^1\!/_2\angle DMA) + {}^1\!/_4(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}) \\
&= {}^1\!/_4\overset{\frown}{AB} + {}^1\!/_4\overset{\frown}{DA} + {}^1\!/_4\overset{\frown}{BC} + {}^1\!/_4\overset{\frown}{CD} \\
&= {}^1\!/_4(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA}) \\
&= 90^\circ.
\end{aligned}$$

På samme måde viser man, at de øvrige vinkelspidser i $\square PQRS$ er rette. $\square$

Vi ser på endnu en sætning, handler om indskrevne cirkler:



Sætning 5. *I den indskrivelige $\square ABCD$ er forbindelseslinien mellem centrene I_1 og I_2 for de indskrevne cirkler for $\triangle ABC$ og $\triangle ABD$ parallel med halveringslinien for vinklen mellem diagonalerne AC og BD.*

Bevis. Vi indfører følgende betegnelser for vinklerne:

$$v = \angle I_1AB, \quad u = \angle I_2AB,$$
$$w = \angle I_1BA, \quad x = \angle I_2BA.$$

Så er $\angle CAB = 2v$ og $\angle CBA = 2w$ så $\angle ACB = 180^\circ - 2v - 2w$, og tilsvarende $\angle DAB = 2u$ og $\angle DBA = 2x$ så $\angle ADB = 180^\circ - 2x - 2u$. Altså er

$$\begin{aligned}\angle AI_1B &= 180^\circ - (v+w) = 180^\circ - (90^\circ - {}^1\!/\!_2\angle ACB) = 90^\circ + {}^1\!/\!_2\angle ACB \\ &= 90^\circ + {}^1\!/\!_2\angle ADB = 90^\circ + {}^1\!/\!_2(180^\circ - 2x - 2u) = 180^\circ - (x+u) = \angle AI_2B.\end{aligned}$$

Dermed er også $\square AI_2I_1B$ indskrivelig, fordi $\angle AI_1B$ og AI_2B spænder over samme bue i den omskrevne cirkel.

Lad nu z betegne vinklen mellem I_2I_1 og AB i deres skæringspunkt P. I $\triangle PI_2A$ er så

$$\begin{aligned}&z = 180^\circ - (\angle I_1I_2A + \angle I_2AB) = 180^\circ - (\angle I_1I_2B + \angle AI_2B + u) \\ &= 180^\circ - (\angle I_1AB + \angle AI_2B + u) = 180^\circ - (v + 180^\circ - (u+x) + u) = x - v.\end{aligned}$$

Her har vi ved det andet lighedstegn brugt at

$$\angle I_1I_2A = \angle I_1I_2B + \angle AI_2B,$$

og det tredje lighedstegn gælder fordi $\angle I_1I_2B$ spænder over samme bue i den omskrevne cirkel for $\square AI_2I_2B$ som $\angle I_1AB$.

Hvis diagonalerne skærer hinanden i S, får vi i $\triangle ASB$:

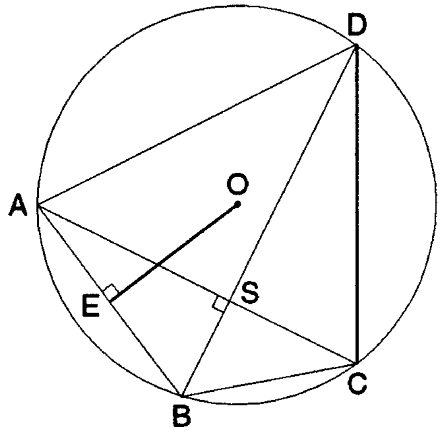
$$\angle ASB = 180^\circ - 2v - 2x \quad \text{så} \quad \angle BSC = 2v + 2x,$$

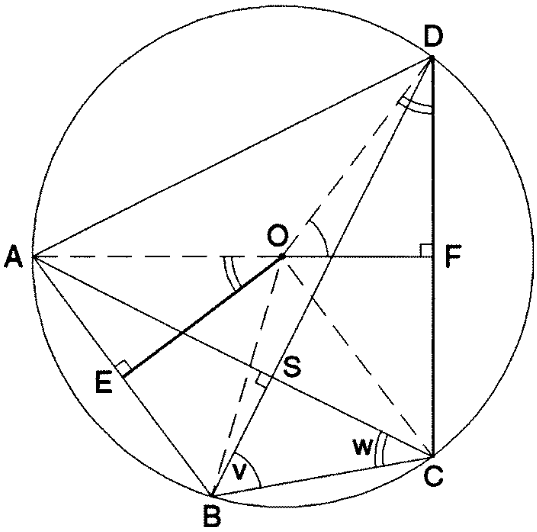
og hvis halveringslinien til $\angle BSC$ skærer AB i K får vi i $\triangle ASK$ at

$$\begin{aligned}\angle SKA &= 180^\circ - \angle SAK - \angle KSA \\ &= 180^\circ - 2v - (\angle KSB + \angle ASB) \\ &= 180^\circ - 2v - ({}^1\!/\!_2\angle BSC + 180^\circ - 2v - 2x) \\ &= 180^\circ - 2v - {}^1\!/\!_2(2v + 2x) - 180^\circ + 2v + 2x \\ &= 180^\circ - 2v - v - x - 180^\circ + 2v + 2x \\ &= x - v \\ &= z. \qquad \square\end{aligned}$$

Hvis en indskrivelig firkant specielt har ortogonale diagonaler, gælder følgende mærkelige sammenhæng:

Sætning 8. *I en indskrivelig firkant med ortogonale diagonaler er afstanden fra den omskrevne cirkels centrum til en side halvt så lang som den modstående side.*





Bevis. Vi vil vise at afstanden OE fra centrum O af cirklen til siden AB er halvt så lang som siden CD.

Lad F være projektionen af O på CD og S diagonalernes skæringspunkt. Da $\triangle AOB$ og $\triangle COD$ er ligebenede, deles de af deres højder i to kongruente trekanter:

$$\triangle AOE \cong \triangle BOE \quad \text{og} \quad \triangle COF \cong \triangle DOF.$$

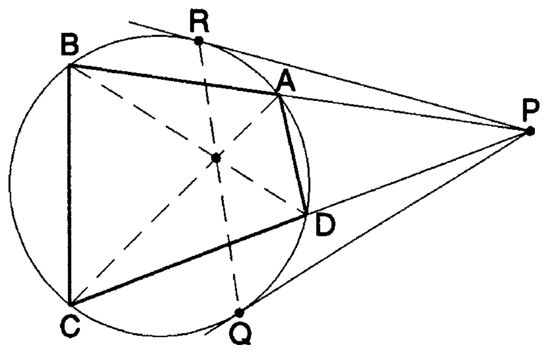
Vi sætter $v = \angle DBC$ og $w = \angle ACB$, så vi af $\triangle SBC$ får at $v + w = 90°$.

Nu er $\angle DOC$ en centervinkel, der spænder over samme bue som $\angle DBC$, så $\angle DOC = 2v$ og $\angle DOF = v$. Vinkelsummen i $\triangle DOF$ giver derefter at $\angle ODF = w$. På samme måde får vi at $\angle ACB$ og $\angle AOB$ er periferi- og centervinkel, så $\angle AOB = 2w$ og $\angle AOE = w$.

Trekanterne $\triangle AOE$ og $\triangle ODF$ er nu ensvinklede og da de desuden har lige lange hypotenuser OA og OD er de kongruente. Dermed er $OE = DF$ eller $OE = {}^1\!/_2 CD$. $\square$

Vi slutter med følgende sætning:

Sætning 7. *To modstående sider i den indskrivelige $\square ABCD$ skærer hinanden i et punkt P. Da går forbindelseslinien mellem røringspunkterne for tangenterne fra P til den omskrevne cirkel gennem diagonalernes skæringspunkt.*



Bevis. Lad QR skære BD i H. Vi forbinder H med A og C. Ved hjælp af periferivinkler ses at $\triangle BRH$ og $\triangle QDH$ er ensvinklede, så

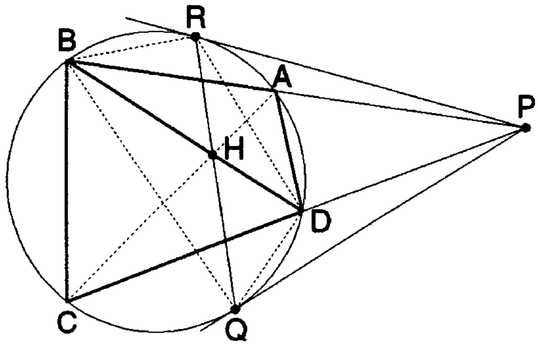
$$\frac{BR}{DQ} = \frac{BH}{HQ} \quad \text{hvoraf} \quad HQ = \frac{BH \cdot DQ}{BR}.$$

Desuden er $\triangle BQH$ og $\triangle RDH$ ensvinklede så

$$\frac{BH}{HR} = \frac{BQ}{DR} \quad \text{hvoraf} \quad HR = \frac{BH \cdot DR}{BQ}.$$

Af disse ligninger får vi

$$\frac{HR}{HQ} = \frac{DR \cdot BR}{BQ \cdot DQ}. \tag{1}$$



Lad nu QR skære AC i K og forbind K med B og D. Så er $\triangle BRK$ og $\triangle QDK$ ensvinklede så

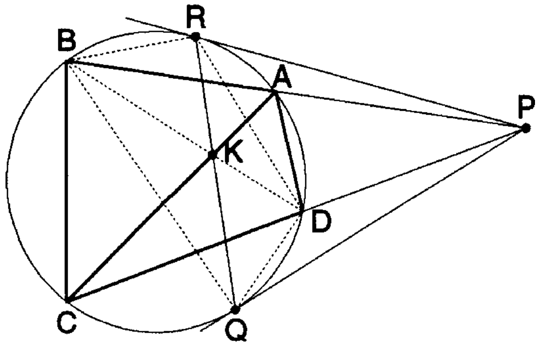
$$\frac{BR}{DQ} = \frac{KR}{DK} \quad \text{hvoraf} \quad KR = \frac{BR \cdot DK}{DR}.$$

Desuden er $\triangle RDK$ og $\triangle BQK$ ensvinklede, så

$$\frac{DR}{BQ} = \frac{DK}{KQ} \quad \text{hvoraf} \quad KQ = \frac{BQ \cdot DK}{DR}.$$

Her af følger

$$\frac{KR}{KQ} = \frac{DR \cdot BR}{BQ \cdot DQ}. \tag{2}$$



Af (1) og (2) får vi

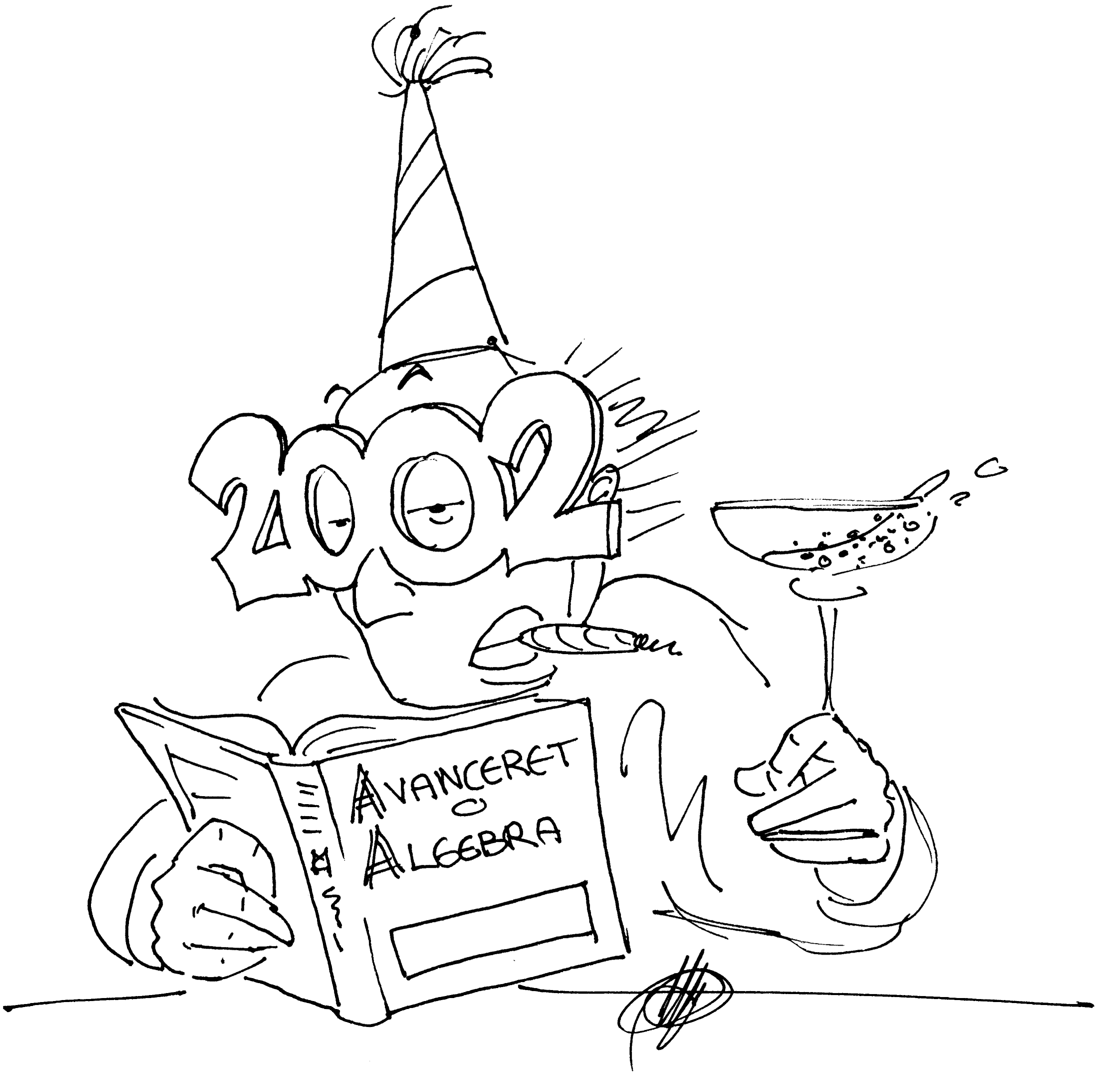
$$\frac{HR}{HQ} = \frac{KR}{KQ},$$

og da både H og K ligger på QR, må H og K falde sammen. Dermed går QR, AC og BD gennem samme punkt. $\square$

Henvisninger:

Eckard Specht: *geometria — scientiae atlantis* (Otton-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2001)

Mathematics and Informatics Quaterly (Singapore, 1998)



Glædelig jul
og godt nytår!