FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
15. årgang, nr. 1, oktober 2001

FAMØS 15.1; september 2001.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)
Peter Lund

Tegner:

Ulf Worsøe

Deadline for næste nummer:
Fredag den 23. november 2001

Indlæg modtages gerne og kan sendes til famos@math.ku.dk (meget gerne skrevet i LaTeX), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web-adresse:
http://www.math.ku.dk/famos/

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 600 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder

Endnu en sommer er gået og atter engang alt for hurtigt. Semesteret er begyndt, og så sidder vi her. For nogle er det første gang, andre har prøvet det tilstrækkelig mange gange før.

Til den første gruppe skal der herfra lyde et stort velkommen til Institut for Matematiske Fag på Københavns Universitet. Vi håber I må få nogle gode år mens I lærer en masse spændende ting. Fra FAMØS' side håber vi på fire gange om året at kunne gøre vores med en ny udgave af bladet.

Den anden gruppe skal ønskes velkommen tilbage. I kender rutinen, så vi stopper smøren her.

Om nogle dage når bøgerne begynder at virke kedelige, så kig ud af vinduet, klæd dig på efter vejret, og gå så en tur ud og nyd efterårets farver. Og lad så være med at overveje hvorfor det lige er at $2+2=4$, mens du er derude. Det kan du gøre når du er kommet hjem og sidder og nyder den varme og bløde lænestol. Du kunne selvfølgelig også invitere ham/hende du lå sammen med under et træ på en eng i den danske sommer og delte champagne og jordbær med[1], med i biografen. Der er sikkert en film der er mere interessant end din fysikbog.

I sidste nummers leder prøvede vi at antyde at FAMØS har fået en tegner. Dette nummer er også smykket med et par tegninger hist og her, og det er vi rigtig glade for. Selv om Ulf er god til at tegne, skal vi dog helst ikke ud i at have et blad der kun indeholder tegninger — noget tekst skal der nu engang være. Desværre skriver bladet ikke sig selv, og redaktionen er ikke nogen uudtømmelig kilde til visdom, så hvis du har et eller andet du tror kunne interessere bare 10 matematikstuderende, så skriv om det.

Egentlig kunne vi også godt bruge lidt hjælp til det praktiske med at få samlet diverse stumper tekst til et pænt(?) blad. Dette foregår på klippe-klistre-møderne[2] som vi holder fire[3] af om året. Hvis du kunne tænke dig at hjælpe, så kontakt redaktionen på e-post `famos@math.ku.dk` — vi kan også bruge *din* hjælp. Hvis du er bange for at du ikke kan nok af det ene eller det andet, så er det med sikkerhed ubegrundet, men vi kan måske hjælpe dig til at blive endnu bedre.

Se ikke ét ord om tragiske begivenheder.

[1] Med mindre I fandt på noget andet at gøre under det træ på en eng i den danske sommer...

[2] Det er længe siden saks og tape har været involveret, men navnet hænger ved.

[3] Der blev I nok overraskede hva... Nå, ikke?

Kort ført deadline modtog redaktionen et e-brev fra Asger Grunnet, hvor han beskyldte os for at lide af infinitofobi. Anledning var vores løsning i sidste nummer til opgave 1.

Første anklage var at vi brugte $(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \{0\}$ i stedet for den „simplere“ mængde $\mathbb{Q} \times \{0\}$ som eksempel på en uendelig mængde af punkter med indbyrdes rationel afstand. Vi mener nu der var tale om en pædagogisk pointe.

Asgers anden om klart alvorligere anklage, gik på at vi havde skrevet noget om at nogle punkter ville komme til at ligge uendelig langt fra hinanden. Det har Asger fuldstændig ret i at de ikke kan, og det skjulte nok i høj grad den førnævnte pædagogiske pointe i at lægge ud med en begrænset mængde.

På den positive side må man sige at Asger til gengæld har løst den to dimensionelle udgave af opgaven rigtig godt, han har nemlig fundet en begrænset tællelig mængde af punkter med indbyrdes rationelle afstande. En (meget) svag forbedring af resultatet er dog mulig i det man kan tilføje punktet $(0,0)$ til Asgers mængde.

Her kan du nyde Asgers løsning.

Om punkter med rationel afstand

Asger Grunnet

Antag først at vi har fundet et $z \in \mathbb{C}$, så $|z| \in \mathbb{Q}$ og $|z^n - 1| \in \mathbb{Q}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. For alle $m, n \in \mathbb{N}$ med $m \geq n$ har vi at:

$$|z^m - z^n| = |z|^n |z^{m-n} - 1| \in \mathbb{Q},$$

hvilket vil sige at punkterne i mængden $\{z^n |\ n \in \mathbb{N}\}$ har indbyrdes rationel afstand. Spørgsmålet er nu hvordan z vælges, så dette er opfyldt og så mængden bliver uendelig. Til det får vi brug for et par lemmaer:

Lemma 1. *Hvis* $\sin(x), \cos(x) \in \mathbb{Q}$*, vil* $\sin(nx), \cos(nx) \in \mathbb{Q}$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$.

Bevis. Beviset foregår ved induktion efter n. For $n = 1$ følger udsagnet direkte af antagelsen. Antag derfor at $n > 1$. For overskuelighedens skyld sættes $a = e^{ix}$. Vi har:

$$\begin{aligned}
\sin(nx) = \frac{a^n - a^{-n}}{2i} &= \frac{a - a^{-1}}{2i} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{-(n-1-k)} \right) \\
&= (\sin x) \left(\epsilon + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \left(a^{n-1-2k} + a^{-(n-1-2k)} \right) \right) \\
&= (\sin x) \left(\epsilon + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} 2\cos((n-1-2k)x) \right) \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Her er $\epsilon = 0$ hvis n er lige og $\epsilon = 1$ ellers. Tilsvarende for cosinus:

$$\cos(nx) = \frac{a^n + a^{-n}}{2} = \frac{1}{2}\left((a + a^{-1})^n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k a^{-(n-k)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left((2\cos x)^n - \varepsilon - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{k} 2\cos((n-2k)x)\right) \in \mathbb{Q}.$$

Her er $\varepsilon = 0$ hvis n er ulige og $\varepsilon = \binom{n}{n/2}$ ellers. $\square$

Lemma 2. *Sæt* $z = \cos(2x) + i\sin(2x)$*, hvor* $\sin(x)$ *og* $\cos(x)$ *er rationelle. Så er* $|z| \in \mathbb{Q}$ *og* $|z^n - 1| \in \mathbb{Q}$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Bevis. Det er klart at $|z| = 1 \in \mathbb{Q}$. Idet vi sætter $a = e^{inx}$ har vi at:

$$\begin{aligned}
|z^n - 1|^2 &= (\cos(2nx) - 1)^2 + \sin^2(2nx) \\
&= \cos^2(2nx) + \sin^2(2nx) + 1 - 2\cos(2nx) \\
&= 2(1 - \cos(2nx)) \\
&= -(a^2 + a^{-2} - 2) \\
&= -(a^2 + a^{-2} - 2aa^{-1}) \\
&= -(a - a^{-1})^2 \\
&= -(2i\sin(nx))^2 = 4\sin^2(nx).
\end{aligned}$$

Sammen med lemma 1 ses det heraf at $|z^n - 1| = |2\sin(nx)|$ er rationel. $\square$

Lad nu $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ være en pythagoræisk trippel (det vil sige $a^2 + b^2 = c^2$) med $\text{sfd}(a, b) = 1$. Vi kan nu vælge x så $\cos(x) = \frac{a}{c}$ og $\sin(x) = \frac{b}{c}$. Ifølge lemma 2 vil $z = \cos(2x) + i\sin(2x)$ gøre at punkterne $\{z^n |\ n \in \mathbb{N}\}$ har indbyrdes rationel afstand. Vi mangler nu blot at godtgøre at punktmængden er uendelig. Det følger af lemma 3:

Lemma 3. *Lad* $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ *være en pythagoræisk trippel med* $\text{sfd}(a, b) = 1$ *og sæt* $z = \frac{a}{c} + i\frac{b}{c}$*. Så er* $z^m \neq z^n$ *for* $m \neq n$*.*

Bevis. Bemærk at hvis $z^m = z^n$ så er $z^{m-n} = 1$. Det er derfor nok at vise at ingen potens af z giver 1. Vi definerer nu følger (x_n) og (y_n) ved: $z^n = \frac{x_n}{c^n} + i\frac{y_n}{c^n}$. Det ses at $(x_1, y_1) = (a, b)$ samt at:

$$z^{n+1} = \left(\frac{x_n}{c^n} + i\frac{y_n}{c_n}\right)\left(\frac{a}{c} + i\frac{b}{c}\right) = \frac{ax_n - by_n}{c^{n+1}} + i\frac{bx_n + ay_n}{c^{n+1}}.$$

Følgerne opfylder altså en differensligning:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (ax_n - by_n, bx_n + ay_n).$$

Det vises nu ved induktion at $(x_n, y_n) \equiv (2a)^{n-1}(a, b) \pmod{c}$. For $n = 1$ er udsagnet klart. For $n > 1$ har vi at:

$$(x_n, y_n) = (ax_{n-1} - by_{n-1}, bx_{n-1} + ay_{n-1}) \equiv (2a)^{n-2}(a^2 - b^2, 2ab).$$

Da $a^2 + b^2 = c^2$ har vi at $a^2 \equiv -b^2 \pmod{c}$, hvoraf vi ser at:

$$(x_n, y_n) \equiv (2a)^{n-2}(2a^2, 2ab) = (2a)^{n-1}(a, b) \pmod{c},$$

som ønsket.

Det ses let at antagelsen $\mathrm{sfd}(a, b) = 1$ medfører at $\mathrm{sfd}(2ab, c) = 1$, og vi slutter derfor at $y_n = (2a)^{n-1}b \not\equiv 0 \pmod{c}$ og dermed at $y_n \neq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Tallene z^n har derfor alle imaginærdel forskellig fra 0, hvilket viser at $z^n \neq 1$ for alle n. $\square$

Idet $(3, 4, 5)$ er en pytagoræisk trippel (med $\mathrm{sfd}(3, 4) = 1$), kan vi nu konkludere at tallet $z = (\frac{3}{5} + i\frac{4}{5})^2$ opfylder de ønskede betingelser. Mængden $\{z^n | \, n \in \mathbb{N}\}$ er altså en uendelig mængde (indeholdt i enhedscirklen) hvori punkterne har indbyrdes rationel afstand.

Tværprodukter

Henrik Chr. Grove

Alle kender tværsummen af et tal, i denne artikel skal vi lege lidt med tværproduktet, der ganske analogt til tværsummen, er produktet af tallets cifre. Vi vil betegne tværproduktet med p, sådan at vi f.eks. kan skrive $p(23) = 6$ og $p(2378) = 336$.

Vi ser straks at der er mulighed for at blive ved idet vi f.eks. kan udregne $p(p(p(2378))) = p(p(336)) = p(54) = 20$, og vi kunne tage tværproduktet endnu engang og få 0.

Hvis man betragter et tocifret tal $n = 10a + b$ (hvor a og b er cifre), ser man let at $p(n) = a \cdot b < a \cdot 10 \leqslant n$, og ved induktion over antallet af cifre at $p(n) < n$ for $n > 9$. Vi kan heraf slutte at det itererede tværprodukt som vi vil kalde P, er veldefineret.

Mens det er let at se at billedmængden for P er $\{0, 1, \ldots, 9\}$, er det knap så let at se hvad billedmængden for p er. Det burde dog efter et øjebliks eftertanke være klart at billedmængden er netop de tal hvis primfaktoropløsning kun består af etcifrede primtal. Disse kan jo opnås som tværproduktet af en simpel sammenstilling af primfaktorerne, f.eks. er $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$ og deraf $p(2752) = 140$. Tilsvarende er det klart at et tal som $364 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13$ ikke kan fås. Hvor skulle faktoren 13 komme fra?

Nu påstod jeg at billedmængden for P var $\{0, 1, \ldots, 9\}$, og det er da også rigtigt at f.eks. $P(10 + n) = n$ når n er et ciffer, men nogle af cifrene er „lettere“ at opnå som itereret tværprodukt end andre.

Hvis n har itereret tværprodukt $k = 0$ kalder vi n for et *trivielt* eksempel, hvis 0 er et ciffer i n. Hvis $P(n) \neq 0$ kalder vi n for et *trivielt* eksempel, hvis alle cifrene i n er enten 1 eller k.

Vi har allerede set et ikke-trivielt eksempel på et tal med itereret tværprodukt 0 nemlig 2752. Eftersom vi kan tilføje 1-taller og permutere cifrene frit uden at ændre tværproduktet, kan vi få lige så mange eksempler vi ønsker. Tilsvarende er det let at finde ikke-trivielle eksempler på tal med itereret tværprodukt 2, 4, 5, 6, 8 og 9 (73, 39, 35, 48, 99 og 33 kan bruges). De sidste tre muligheder dækkes af følgende sætning:

Sætning 4. *Der findes ingen ikke-trivielle eksempler på tal med itereret tværprodukt* 1, 3 *eller* 7.

Bevis. Hvad sætningen måske mangler med hensyn til at være oplagt, har den til fulde med hensyn til at være let at vise.

Lad k være et af tallene 1, 3 eller 7 og antag at $P(n) = k$. Så kan vi finde et m så $p^m(n) = k$. Det er klart at $p^{(m-1)}(n)$ er et tal af formen $11 \dots k \dots 11$, altså et trivielt eksempel på et tal med tværprodukt k. Det er altså „nok“ at vise at alle trivielle eksempler er uopnåelige.

Vi har tidligere konstateret at et tal kun kan opstå som tværprodukt hvis alle dets primfaktorer er et-cifrede, dvs. at der er fire muligheder for primfaktorerne: 2, 3, 5 og 7.

Eftersom de tal vi kigger på alle ender på 1, 3 eller 7 kan vi hurtigt udelukke 2 og 5, og slutte at tallet må have formen $3^a 7^b$.

Hvis vi udregner de forskellige muligheder for ($3^n \mod 100$) får vi følgende liste af tal:

$$01, 03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89 \text{ og } 67$$

Da 7 ses at forekomme i denne følge kan vi slutte at en faktor 7 ikke bringer os ud af denne følge, men så kan vi se at et tal af formen $3^a 7^b$ altid har et lige tal som næstsidste ciffer, og følgelig ikke kan være et trivielt eksempel på et tal med tværprodukt 1, 3 eller 7. □

Hvis vi vender tilbage til eksempler på tal med itereret tværprodukt 2, 4, 5, 6, 8 og 9, kan vi stadig se at nogle af eksemplerne er mere interessante end andre.

Eksemplet for 9 består blot af de to primfaktorer, og en let modifikation af beviset for sætningen giver at de eneste ikke-trivielle eksempler netop er tal hvor alle cifre pånær 2 (som er 3-taller) er 1-taller.

Eksemplet for 5 indeholder et 5-tal, hvilket man også kunne finde uskønt, det kan man imidlertid ikke slippe af med. Som i beviset for sætningen indser man let at næstsidste skridt må være et trivielt eksempel. I dette tal kan 5 være ikke-sidste ciffer i så fald kan man gentage sidste del af beviset for sætningen. Den anden mulighed er at 5-tallet er sidste ciffer, men så er 5 en primfaktor og må have indgået i skridtet før, så kan vi gentage dette argument på det tal.

Vi har altså alt i alt at alle de ulige tal har nogen begrænsninger på hvad der findes af eksempler på tal med dem som itereret tværprodukt, mens der er svært at se tilsvarende begrænsninger for de lige tal.

Opgave 1. *Find et tal der hverken har* 0 *eller* 5 *som ciffer men* 0 *som itereret tværprodukt. Kan du finde det mindste, eller et som giver anledning til færrest mulige skridt (3)?*

Alle udregninger her er foregået i et 10-talssystem, men der er sådan set ikke noget i vejen for at foretage lignende overvejelser med et andet grundtal. I det binære talsystem er mængden af overvejelser til at overse, men der skulle være noget at arbejde med hvis du har lyst til at lege med nogle tal, hvis du finder ud af noget sjovt/spændende/... trykker FAMØS gerne dine overvejelser.

Euklidiske tallegemer og -ringe

Karen Mohr Pind

Som min sidste 'mission' på Matematisk Institut har jeg i foråret 2001 skrevet fagprojekt hos Asmus Schmidt om Euklidiske tallegemer og -ringe. Jeg har her klippet lidt ud fra fagprojektet.

Den artikel jeg har arbejdet med, Euclidean Number Fields of Large Degree [1], handler om en metode til at bestemme, om et tallegeme er euklidisk. H.W.Lenstra arbejder videre med en observation af Adolf Hurwitz: En betingelse for at et tallegeme K kan være euklidisk er, at ringen af algebraiske heltal R i K indeholder tilpas mange elementer med indbyrdes afstand én unit.

Vi skal bruge følgende [2]

Definition 1. *Euklidisk funktion og euklidisk ring.*
Lad R være et integritetsområde. En euklidisk funktion ν på R, er en afbildning $\nu : R \longmapsto \mathbb{N}_0$, med følgende egenskab:

$$\forall a, b \in R, b \neq 0, \exists c, d \in R \text{ med } a = cb + d \text{ så } \nu(d) < \nu(b)$$

Ringen R kaldes euklidisk, hvis der findes en euklidisk funktion ν på R.

Eks: Ringen af heltal $\mathbb{Z}$ er euklidisk, da funktionen $\nu(x) = |x|$ opfylder kravet.

Vi skal bruge en lille smule pakningsteori:

Lad $U \subset \mathbb{R}^n$ være en begrænset Lebesgue-målelig mængde med positivt Lebesguemål $\mu(U)$.
Lad $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ være en følge af punkter i $\mathbb{R}^n$ som er 'tilstrækkeligt' jævnt fordelt. Vi kan da med systemet

$$\mathcal{U} = (U + a_i)_{i=1}^{\infty}$$

af forskydninger (translationer) af U associere en tæthed, $\rho(\mathcal{U})$.
Systemet $\mathcal{U} = (U + a_i)_{i=1}^{\infty}$ kaldes en pakning på U, hvis

$$(U + a_i)(U + a_j) = \emptyset \ \forall i, j \text{ med } i \neq j$$

[1] H.W.Lenstra, Inventiones Mathematica, side 237 - 254, fra 1977

[2] Taget fra Algebraisk Talteori af Asmus Schmidt.

Pakningskonstanten $\delta(U)$ er defineret ved

$$\delta(U) = \sup_{\mathcal{U}} \rho(\mathcal{U})$$

hvor $\rho(\mathcal{U})$ er tætheden og hvor supremum tages over samtlige pakninger $\mathcal{U}$ af U, for hvilke $\rho(\mathcal{U})$ er defineret.

Center pakningskonstanten $\delta^*(U)$ for U er defineret som

$$\delta^*(U) = \delta(U) \big/ \mu(U) \tag{1}$$

Definition 2. *Normen*
For $x = (x_j)_{j=1}^{r+s} \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$, definerer vi normen $N : \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \to \mathbb{R}$ ved:

$$N(x) = \Pi_{j=1}^{r} |x_j| \cdot \Pi_{j=r+1}^{r+s} |x_j|^2$$

Det var de indledende bemærkninger - så er vi klar:

Lad K være et algebraisk tallegeme af endelig grad n over $\mathbb{Q}$ og lad diskriminanten for K over $\mathbb{Q}$ betegnes Δ.
Lad R være ringen af algebraiske heltal i K, og lad r og s være antallet af hhv. reelle og komplekse Arkimedean Primes i K. [3]
Vi siger jvf. ovenfor, at K er euklidisk eller at R er euklidisk mht. normen, hvis der gælder:

$$\forall a, b \in R, b \neq 0 \exists c, d \in R : a = cb + d \text{ og } N(d) < N(b)$$

Vi betragter nu K som indlejret i $\mathbb{R}$-algebraen, $K_{\mathbb{R}} = K \oplus_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, som er en $\mathbb{R}$-algebra isomorf med $\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$.
Idet jeg identificerer $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$ ved at sende

$$(a + ib) \to (a + b, a - b) \text{ for } a, b \in \mathbb{R}$$

får jeg identifikationen $K_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{2s} = \mathbb{R}^n$
Med denne identifikation bliver R et gitter med determinant $|\Delta|^{\frac{1}{2}}$ i $\mathbb{R}^n$. (se evt. Algebraisk talteori s.3.49)

[3] Archimedean Primes: Vores tallegeme K er en udvidelse af $\mathbb{Q}$, med $[K : \mathbb{Q}] = n$.
Lad $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Når vi tænker på denne måde, svarer r og s til antallet af hhv. reelle og komplekse rødder til minimalpolynomiet $\in \mathbb{Q}[x]$ for α.

Lad R^* betegne gruppen af enheder i R og lad

$$M = \sup \{m \mid \text{der eksisterer } w_1, w_2, ..., w_m \in R \text{ så } w_i - w_j \in R^*, \forall i, j; 1 \leq i < j \leq m\} \tag{2}$$

Sætning
Lad K være et algebraisk tallegeme af grad n med diskriminant Δ over $\mathbb{Q}$ og lad N og M være defineret som ovenfor.
Lad videre $U \subset \mathbb{R}^n$ være en begrænset Lebesque målelig mængde med positivt Lebesque mål og med egenskaben

$$N(u - v) < 1 \text{ for alle } u, v \in U \tag{3}$$

Lad $\delta^*(U)$ betegne center pakningskonstanten, med denne notation er K euklidisk hvis uligheden:

$$M > \delta^*(U) * |\Delta|^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

er opfyldt.

Bevis for sætningen
Jeg ønsker altså at vise, at K er Euklidisk.
For hvert $a, b \in R, b \neq 0$ må vi finde $c, d \in R$ således at

$$a = cb + d \text{ og } N(d) < N(b)$$

(Definitionen på at R er Euklidisk)

Hvis vi lader $x = \frac{a}{b}$ kan vi se, at det er tilstrækkeligt at finde et $c \in R$ så

$$N(x - c) < 1$$

Vi indser dette:
Lad $x = \frac{a}{b}$.
Idet $a = cb + d$ får vi $d = a - cb$.
Dermed har vi:

$$\begin{aligned}
N(d) < N(b) &\iff N(a - cb) < N(b) \\
&\iff N(a) - N(cb) < N(b) \\
&\iff \frac{N(a) - N(cb)}{N(b)} < 1 \\
&\iff \frac{N(a)}{N(b)} - \frac{N(cb)}{N(b)} < 1 \\
&\iff N(\frac{a}{b}) - N(\frac{cb}{b}) < 1 \\
&\iff N(\frac{a}{b} - c) < 1 \\
&\iff N(x - c) < 1
\end{aligned}$$

Lad nu $w_1, ..., w_m$ være en følge i R som defineret i (2)[4].
Der vil da gælde

$$w_i - wj \in R^*, \forall i, j; 1 \leq i < j \leq m$$

og antagelsen af (4) giver os dermed

$$m > \delta^*(U) \cdot |\Delta|^{\frac{1}{2}}$$

for et m. Da m er antallet af elementer i en følge, må $M = m$ for ét af m'erne (det største naturligvis).

Vi benytter (1) og ser at:

$$\begin{aligned} & m > \delta^*(U) \cdot |\Delta|^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow\ & m > \frac{\delta(U)}{\mu(U)} \cdot |\Delta|^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{m \cdot \mu(U)}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}} > \delta(U) \end{aligned} \tag{5}$$

Vi kan tillade os denne regning, idet vi har antaget, at U har positivt Lebesguemål.

Betragt nu systemet

$$\mathcal{U} = (U + w_i x + \alpha)_{1 \leq i \leq m, \alpha \in R}$$

af forskydninger af U.

Tætheden for denne følge er givet ved [5]:

$$\rho(\mathcal{U}) = \frac{m \cdot \mu(U)}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}}$$

og idet (5) gav os

$$\frac{m \cdot \mu(U)}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}} > \delta(U)$$

har vi nu

$$\rho(\mathcal{U}) > \delta(U)$$

Da $\delta(U)$ imidlertid er defineret som $\delta(U) = \sup_{\mathcal{U}} \rho(\mathcal{U})$ er uligheden ovenfor i

[4] At en sådan følge eksisterer og har endelig længde vises i 2.del af Lenstras artikel

[5] C.A.Rogers, Packing and Covering, Cambridge University Press 1964, theorem 1.5

modstrid med definitionen af $\delta(U)$.
Vi kan slutte, at systemet $\mathcal{U}$ ikke er en pakning på U.

Der må derfor eksistere (i, α) og (j, β) med $1 \leq i < j \leq m$ og $\alpha, \beta \in R$ således at

$$(U + (w_i x + \alpha)) \cap (U + (w_j x + \beta)) \neq \emptyset$$

dvs. der eksisterer $u, v \in U$ så

$$u + w_i x + \alpha = v + w_j x + \beta$$

Antag nu $i = j$ men $(i, \alpha) \neq (j, \beta)$ dvs $\alpha \neq \beta$. Da vil gælde

$$u + \alpha = v + \beta \Leftrightarrow u - v = \beta - \alpha$$

Idet $N(u - v) < 1, \forall u, v \in U$ har vi

$$N(\beta - \alpha) < 1$$

Idet $\beta - \alpha$ er et algebraisk heltal ($N(\alpha), N(\beta) \in \mathbb{Z}_+$ idet vi bemærker, at en Euklidisk funktion afbilleder ind i $\mathbb{N}_0$ og vi derfor opnår positive værdier eller 0) kan dette kun være tilfældet hvis $\beta - \alpha = 0$ dvs. $\beta = \alpha$, men dette er i modstrid med antagelsen, at (i, α) og (j, β) er forskellige.
Vi slutter derfor at $i \neq j$.

Idet $i \neq j$ har vi $w_i - w_j \in R^*$, dvs. $N(w_i - w_j) = 1$.

Lad nu $c = \frac{\beta - \alpha}{w_i - w_j}$. Det er klart at $c \in R$ da α, β, w_i og $w_j \in R$.
Mellemregning: vi har

$$u + w_i x + \alpha = v + w_j x + \beta \Leftrightarrow x = \frac{(v - u) + (\beta - \alpha)}{w_i - w_j}$$

Vi ser derfor at :

$$\begin{aligned} N(x - c) &= N\left(\frac{(v - u) + (\beta - \alpha)}{w_i - w_j} - \frac{\beta - \alpha}{w_i - w_j}\right) \\ &= N\left(\frac{(v - u) + (\beta - \alpha) - (\beta - \alpha)}{w_i - w_j}\right) \\ &= N\left(\frac{(v - u)}{w_i - w_j}\right) \\ &= N(v - u) < 1 \end{aligned}$$

Med dette $c = \frac{\beta - \alpha}{w_i - w_j} \in R$ er sætningen vist. $\square$

At der eksisterer følger af elementer, som dem vi benyttede i defintionen af M, bliver der redegjort for i artiklens anden del, hvor der også præsenteres 132 euklidiske tallegemer og vises en metode - diskuteres en metode - til at finde euklidiske tallegemer af en given grad.

Opgaver

Jens Carstensen

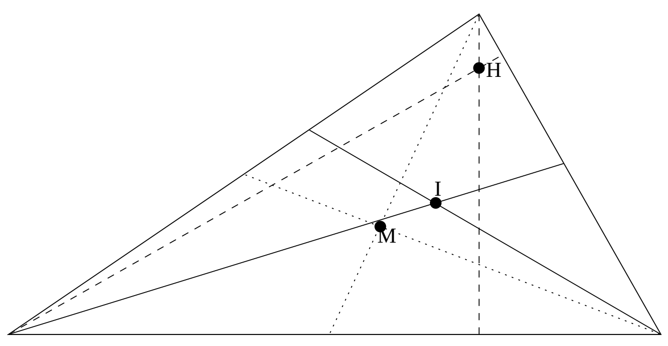
Opgave 2. *Find de hele tal p, for hvilke ligningen*

$$x^2 + px + 2001 = 0$$

har to hele løsninger. Besvar det samme spørgsmål for ligningen

$$x^2 + px + 2002 = 0$$

Opgave 3. *Vis, at der i enhver* skæv *trekant gælder at hvis M er medianernes skæringspunkt, I centrum for den indskrevne cirkel og H højdernes skæringspunkt, så vil $\angle MIH$ være stump. (En* skæv *trekant er en trekant der hverken er retvinkelt, ligebenet eller ligesidet.)*



Figur 1: En skæv trekant med M, I og H markeret.

Holdning og struktur

Esben Meluengracht Flachs (årgang 99)

Fra to års studier på matematik, engagement i fagråd og sæde i studienævnet, har jeg - blandt undervisere og ældre studerende - erfaret nogle markant forskellige tilgangsvinkler til matematikstudiet og specielt til studerende på første og andet studieår. Med den faldende søgning og det store frafald og diskussionen om eventuelle strukturelle og holdningsmæssige problemer som årsager til disse tendenser med stadigt færre ansøgere og mange studieskiftere, har jeg søgt at samle og gøre opmærksom på nogle forhold på afdelingen og/eller instituttet, som jeg mener har betydning for disse tendenser. Det er i denne sammenhæng vigtigt at bemærke, at mine ord om emnet ikke er ment som eller skal benyttes som en dadlen af enkelte undervisere, og ikke er andet end resultatet mine egne erfaringer og overvejelser og diskussioner med undervisere og andre studerende. Det centrale er den generelle indstilling, som jeg opfatter den.

Holdningsaspekter

På mange kurser mødes man som studerende med en engageret og åbnende underviser, der gerne vil forsøge at videregive sin egen begejstring og faglige kunnen. Dermed er der skabt et miljø, hvor man som studerende har lyst til at befinde sig og gøre en ekstra indsats, hvis stoffet skulle være svært.

Der er dog også undervisere, der giver udtryk for en noget mindre imødekommende facon overfor nye studerende. Dette er især i forhold til indholdet af den undervisning, der foregår på de to første studieår. Man mødes som studerende med en let hovedrystende og noget opgivende holdning. Nutidens studerende har ikke lært nok før de kom på universitetet. Det, der i dag undervises i på første år, er i vid udstrækning stof, man før lærte i gymnasiet. Det bør derfor ikke være svært, og for underviseren opfattes denne gruppe af matematiske emner som banale og ikke som rigtig universitetsmatematik. Hvis de studerende mod forventning skulle finde stoffet svært, er det da let fra en undervisers side blot at afvise dette med, at de studerende idag blot ikke kan så meget matematik som i gamle dage, da underviseren selv var studerende. Blandt både undervisere og studerende er der en tendens til ikke at anerkende det første studieårs matematikkurser som værende „rigtig matematik“ (Hvad det så er?), da det ikke er svært eller abstrakt nok (disse to begreber følges nok ad i nogen grad). Dette er udtryk for en holdning, der nemt kan opfattes som nedladende. Denne har formodentlig i nogen grad rod i ovenstående betragtning af undervisningen som delvist gymnasiestof. For en studerende for hvem stoffet synes svært i denne situation, vil tilbøjeligheden til at gøre en ekstra indsats hurtigt opgives, da man jo alligevel ikke er ved at lære rigtig matematik. Dette kan da være medvirkende til, at studerende holder op med at læse matematik. Resultatet kan være en reaktion fra den studerendes side, der er lig denne: „Hvis det, jeg sidder med nu, ikke er rigtig matematik, så kan det være lige meget.“ Dermed er der skabt en tilstand, hvor der mellem undervisere og studerende ikke er forståelse for hvorfor undervisningen ikke fungerer. Denne holdning er også mærkbar i studienævnet, hvor focus ideligt placereres på de studerendes manglende kundskaber og det såkaldte gode/nødvendige frafald.

Specielt blandt de studerende, men også blandt underviserne er der en udbredt sondring mellem „matematik“ og „rigtig matematik“. De to begreber er ikke helt veldefinerede, og der er ikke fuldstændig enighed om indholdet i de to „typer“ matematik. Der er dog en tendens til at anskue „rigtig matematik“ som værende alt andet end Mat 1 og gerne den svære del af pensum. Specielt Mat 1 anskues ofte som et håndværk mere end en (eller flere) matematisk(e) discipliner. Dette kan være rigtigt, men det er da vigtigt at ihukomme, at det tager tid at lære et håndværk ordentligt. Desuden er Mat 1, det fundament hvorpå resten af matematikken bygger sin søjlehal, og det er derfor vigtigt at opbygge og vedligeholde det. Denne holdning afstedkommer, at der bliver set ned på førsteårsstuderende pga. indholdet i de kurser de følger - noget de ikke har indflydelse på. Desuden skaber denne sondring endnu større skel mellem de studerende på de første og de senere årgange. Den direkte konsekvens for underviserne er beskrevet ovenfor. Indirekte, er konsekvensen den, at miljøet på afdelingen bliver noget indspist, da kun de studerende med en interesse i den „rigtige matematik“ anses for værende „rigtige studerende“. Altså en holdning, der kan af de studerende kan opleves som - en i mine øjne - unødvendig faglig arrogance.

Gennem meget af den fortløbende undervisning i matematik, fra folkeskole over gymnasium til universitet, gentages det hver gang man møder et nyt sted, at det man lærte det foregående sted ikke var matematik. Således også ved ankomsten til universitetet, men her lærer man desuden senere i forløbet, at det man lærte i starten heller ikke var matematik. Derved udskydes et af de identitetsskabende og -bærende elementer ved en uddannelse, nemlig følelsen af at tilhøre en sluttet kreds af mennesker med samme interesse, fælles sprog og faglighed, til stadighed, og berøver dermed nye studerende muligheden for at føle sig hjemme og at være rigtigt med. Dermed er igen de nye studerende sat udenfor institutets kreds. Strukturelle aspekter: Når der starter en ny årgang af studerende, er hver studerende et nyt ansigt og blot en blandt mange andre nye. Hvis disse studerende skal få at godt studieforløb, er det ikke nok, at de bliver introduceret til nogle ældre studerende gennem diverse rusforløb. Det er også nødvendigt med en kontakt til undervisere udover den der er til en forelæsning i UP-1. Først når man ikke blot er en af de nye, men også en studerende med kontakt til andre studerende og undervisere, har man fundet sig tilrette på instituttet, og har dermed overskud og lyst til at gøre det ekstra, der skal til når bla. Mat 2AN begynder at blive svært.

Et af de eksempler på denne forskelsbehandling, der sprang i øjnene på mig, er den årlige semesterstartsfest for undervisere og studerende. Denne bliver kun annonceret på kurser med et navn, der starter med mindst „Mat 3 .". På denne måde sørger man effektivt for ikke at indbyde studerende på de to første årgange, uden dog at formene denne gruppe af studerende adgang. Dermed er en mulighed for at knytte kontakter på tværs af årgange, studerende og undervisere spildt.

Et andet forhold, der ikke er fremmende for integrationen af nye studerende og sammenfaldende med den manglende „rigtige matematik" på de første studieår, er Studenter Kollokvierne. Disse er vel ment som appetitvækkere til områder af matematikken de studerende har mulighed for senere at stifte bekendtskab med eller fordybe sig i. Sådan som ordningen er skruet sammen nu er niveauet lagt omkring Mat 3 (men man skal ikke lade sig afskrække), dermed berøver man igen de nye studerende muligheden for at snuse til en del af den videregående og „rigtige matematik". Hvis man arrangerede noget tilsvarende for studerende på første og andet år, var der skabt mulighed for en dialog med undervisere og nogle oplevelser med stof, der er mere spektakulært end Mat 1, allerede tidligt i uddannelsen.

Det er forståeligt, at underviserne møder den enkelte studerende på en helt ny årgang med et begrænset engagement. Der er mange nye og efter nogen tid vil kun halvdelen være tilbage. Desuden er det store frafald medvirkende til, at man som underviser kun ser meget få af de nye studerende på et af de overbygningskurser, man underviser på. Altså kan man ligeså godt vente med at engagere sig i den enkelte til disse kurser, hvor det er sikkert at den studerende kan give noget igen, og man er sikker på at få tilfredsstillet sin egen ambition om at undervise på det højest mulige niveau.

Det er min påstand, at denne holdning i sig selv er årsag til en del af det store frafald. Netop den mekanisme som får underviserne til at vente med et engagement er dobbeltvirkende og fremmer et eventuelt studiestop eller -skift.

I de ældre studerendes syn på nye studerende er det mit indtryk, at der fokuseres meget på niveauet i undervisningen og herunder specielt på et faldende eller sænket niveau i forhold til tidligere dvs. da de fulgte de på gældende kurser. De fleste diskussioner om tilstanden og ændring af denne på de første to års kurser,er ofte strandet på et krav fra de ældre studerende, om i alle tilfælde ikke at sænke niveauet (yderligere). Dette giver udtryk for en holdning til nye studerende, som er de en fare for det faglige niveau, i stedet for at være en mulighed for at bære den matematiske tradition videre.

Konklusion

Mine forslag til områder hvorpå der kan skabes ændringer for at bedre studiemiljøet er:

- En gennemgang af - også de ikke direkte studierelevante - tilbud til studerende på alle trin i uddannelsen, og en ligestilling af disse.
- Underviserne må ændre holdningen til både de nye studerende og til den undervisning, der skal foregå på især de første studieår, eller omstrukturere undervisningen.
- De ældre studerende må se de nye studerende som en mulighed og ikke som en risiko for forfladigelse af det faglige niveau.
- Et tilbud om undervisning i „rigtig matematik“ på første studieår eller en accept af den manglende "rigtige matematik"på første år, og dermed af indholdet på Mat 1.

Nogle forslag til relevante områder og inspirationskilder er: Noget af Mat Y, Fysik*, Studenter Kollokvier også for første og andet år.