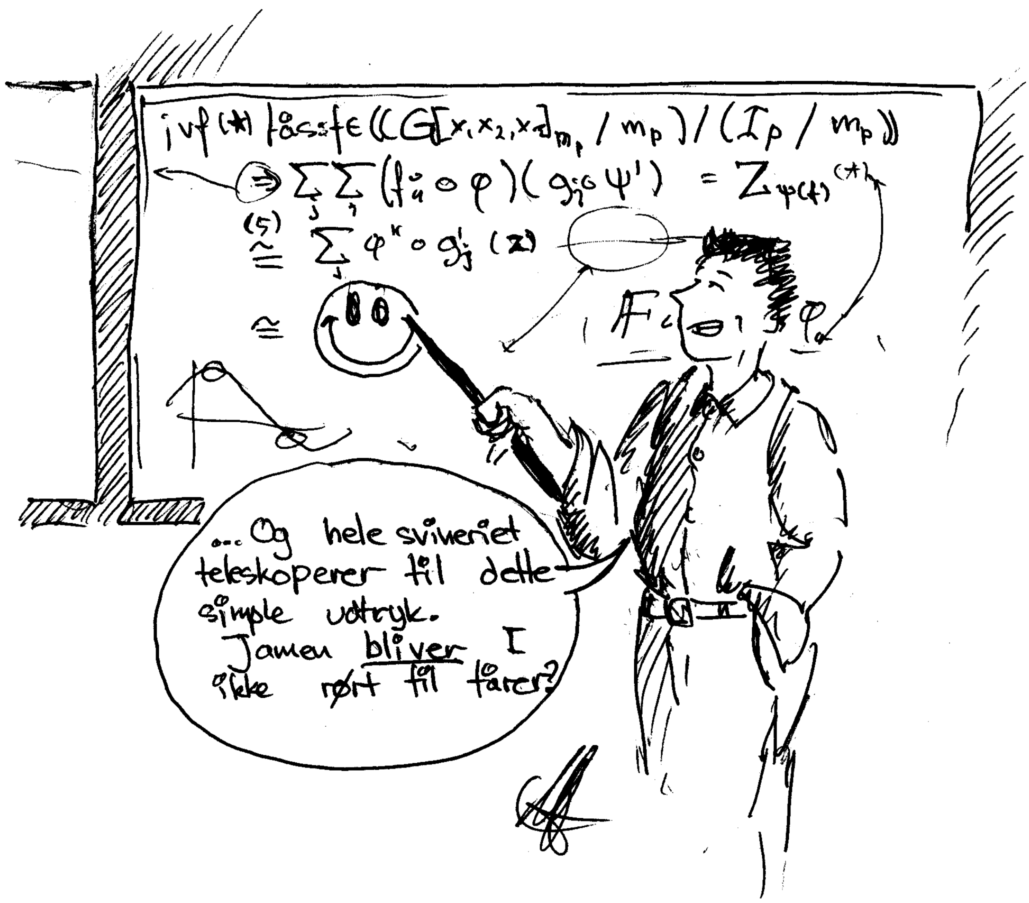
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

14. årgang, nr. 4, maj 2001



FAMØS 14.4; maj 2001.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)
Peter Lund

Tegner:

Ulf Worsøe

Deadline for næste nummer:
Fredag den 21. september 2001

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web-adresse:
`http://www.math.ku.dk/famos/`

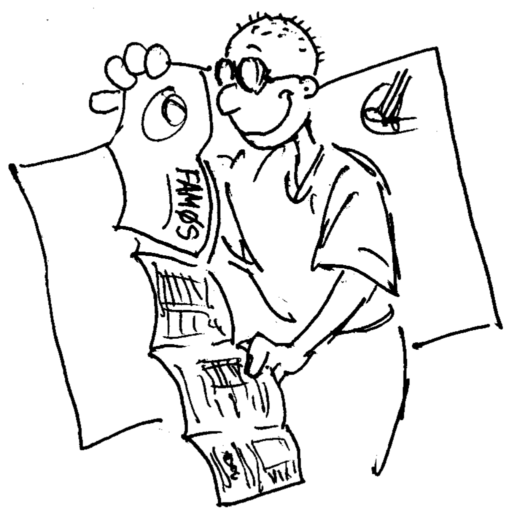
Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 600 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder 3
Forskerdag 2001 4
Opgave 5
Opgaveløsninger 6
Picards små og store mirakler . . 9
Douglas Noel Adams, polyhistor 1952–2001 15



Leder

Hvad er det vi leder efter i år? I denne pludselige sommervarme leder jeg personligt efter noget vand og nogle kølige kvindehænder... Nå! Okay! På den måde „leder“. Jamen, sådan en kan jeg da også skrive.

„Endnu engang er det blevet forår i Danmark. Solen skinner, græsset er grønt og vi ved godt at vi burde sidde og læse.“ Nej vi burde ej! Det er nu vi lever! Det er nu vi er unge! Grib livet, grib chancen, nyd sommeren, den er garanteret væk i morgen. Matematikken kan man holde ved lige ved at hviske små søde polynomier ind i øret på sin kæreste om aftenen når temperaturen igen er blevet til at holde ud.

For en matematiker er der sket et par ting og sager på det seneste som man bør tænke over. For det første er Douglas Adams død. For det andet vandt vi IKKE melodi grandprix. Under hvilke plausible afstemningsregler ville det alligevel være lykkedes? Jeg anbefaler evt. interesserede at støve deres Lewis Carroll (aka. Charles Dodgson) af og kigge på nogle af hans overvejelser om pointgivning i tennisturneringer. Der er ikke noget så dejligt som at sidde på en eng under et træ i den danske sommer og læse Lewis Carrol mens man lytter til bækkens milde klukken og solsortenes fløjt. Det skulle da selvfølgelig lige være hvis man havde den rette, den eneste ene at gøre det sammen med. Og en flaske kølig champagne. Og nogle jordbær. Men bortset fra det er det noget af det bedste. Hvis altså man ikke kan finde på andre ting at gøre sammen med den eneste ene under et træ på en eng i den danske sommer osv...

Famøs har også valgt aldrig at blive fed!

Der var tilsyneladende nogle af vores bidragydere der også blev overrasket af den pludselige sommer. Måske de også fandt på andre ting at lave sammen med deres eneste ene i sommervarmen eller også kogte deres hjerner lige så meget sammen som min. I hvert fald bliver dette nummer lidt tyndere end vi havde ventet.

En Tegner! En Rigtig Tegner!

Vi har også en rigtig god nyhed! Vi har fået os en rigtig tegner som både kan tegne og lave tegninger. Fik jeg sagt at han var tegner? I kan nyde frugten af hans idelige slid rundt omkring i bladet. En stor klapsalve og et fuldtonigt velkommen til Ulf Worsøe!

Forskerdag 2001

Henrik Chr. Grove

Sidste gang skrev vi i lederen om ting der ikke var døde. Siden da har det vist sig at heller ikke matematisk afdelings forskerdag var død. Forskerdagen opstod i 1997 og efter tre vellykkede gennemførsler i 1997, 1998 og 1999, skete der ikke noget sidste år. Men i år var der så nogen der fik lyst til at afholde dette glimrende arrangement igen.

Den 23. april var så dagen der var blevet valgt. Den første taler var Peter Jørgensen, overskriften for hans foredrag var „kvantegeometri". Det viste sig at dække over et forsøg på at bruge geometriens ord til at lave ikke-kommutativ algebra. Peter tog udgangspunkt i et eksempel for $xy - yx$ i stedet for 0 gav x, og definerede så de mest elementære begreber i stil med hvad man lærer på 3AG i det kommutative tilfælde. Planen blev til en linie, linier bestod blot af et enkelt punkt, men alligevel galdt de alle de velkendte sætninger som f.eks. Bezouts sætning.

Den næste taler var en forelsket Flemming Topsøe. Han indrømmede selv at være forelsket i den informationsteori han skulle fortælle om. Det blev til en indledning med en definition af de grundlæggende begreber og derefter et dyk ned i nogle af de ting Flemming forsker i. Hvad mon hans kone siger til det?

Tredje taler var Erik Christensen der arbejder på at finde ud af hvor lang en C^*-algebra kan være. Han gav en kort (men til lejligheden passende) introduktion til emnet, og fortalte derefter om den udvikling der har været fra de første resultater der gav længderne 2 og 3 for visse klasser af C^*-algebraer. Man kender stadig ikke C^*-algebraer med andre længder end 2 og 3, men Erik sluttede af med et bud på en C^*-algebra med uendelig længde.

Efter en lille kaffepause, var det blevet Jørn Børling Olssons tur. Han var forberedt på at der var nogle der ikke var interesserede i emnet, og derfor havde han skrevet følgende opgave op på tavlen:

> For hvilke værdier af n er binomialkoefficienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ en primtalspotens?

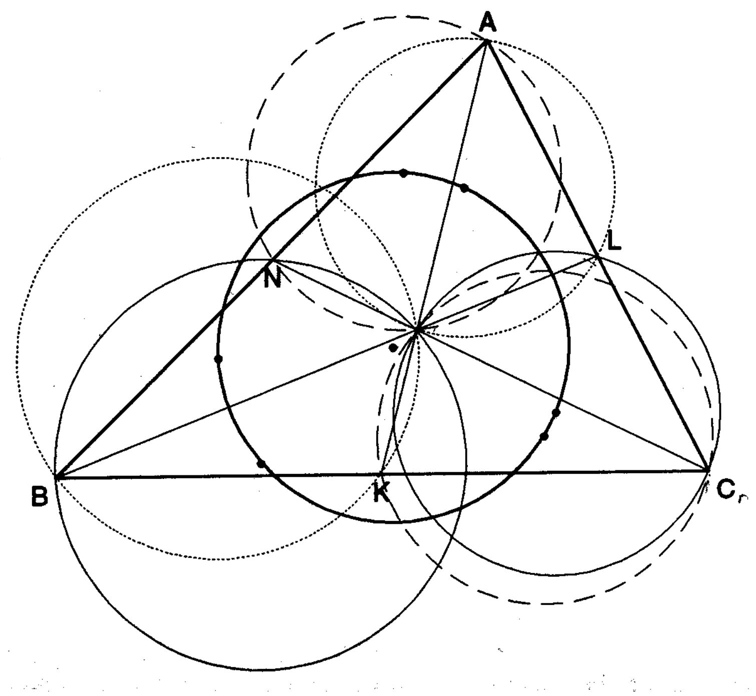
Os der gad lytte til hans fortælling om „Repræsentationsteori og kombinatorik" fik ud over et indblik i emnet, en del af svaret på opgaven, nemlig en nødvendig betingelse på n.

Søren Eilers afsluttede talerrækken med at tale om „Operatoralgebra versus symbolsk dynamik". Søren startede med at forklare hvordan man overhovedet finder forbindelser mellem de to umiddelbart ret forskellige områder af matematikken. Et interessant foredrag om hvordan man opfører resultater fra det ene emne til det andet og omvendt.

En af de interessante ting var den måde Søren havde lært mange af tingene på, det er nemlig sket ved at inddrage andendelsstuderende og dyrke „undervisningsbaseret forskning“. F.eks. har Eik Kristensen og Ole Lund Jensen som et fagprojekt lavet et sted på nettet der kunne besvare nogle spørgsmål om matricer, og det gav Søren en demonstration af.

Opgave

Jens Carstensen



I trekanten Δ deler medianerne AK, BL og CN trekanten i seks mindre trekanter. Vis at centrene for disse seks trekanters omskrevne cirkler ligger på en cirkel. Karakteriser centrum for denne cirkel.

Opgaveløsninger

Opgave 1

Dette var sidste nummers udfordrende opgave, som redaktionen ikke har de endelige svar på.

Det første spørgsmål var: „Hvor mange punkter kan man placere i planen så forholdet mellem et vilkårligt par af afstande er rationelt?“ Svaret er ganske trivielt uendelig mange, f.eks. er $(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \{0\}$ en uendelig mængde af punkter med den ønskede egenskab.

Dette er selvfølgelig et kedeligt svar på spørgsmål, for alle punkterne ligger jo på linie, derfor spurgte vi hvad svaret var hvis man kræver at punkterne udspænder planen. Her på redaktionen kan vi „kun“ nå vilkårligt mange. Vi starter med punkterne $(0,0)$, $(3,0)$ og $(0,4)$, som udgår hjørner i en retvinket trekant, så har vi allerede fået udspændt planen, men indtil videre har vi kun tre punkter, og vi lovede jo vilkårligt mange. Vi fortsætter så med at vælge en pythagoræisk trippel, f.eks. $(5,12,13)$, den skalerer vi så til $(4, 9\tfrac{3}{5}, 10\tfrac{2}{5})$, så ser vi at vi kan tilføje punktet $(9\tfrac{3}{5}, 0)$. Sådan kan vi blive ved med at vælge pythagoræiske tripler (der er uendelig mange), og således opnå vilkårligt mange punkter. Desværre er det ikke klart om vi kan blive ved uendeligt længe eller om punkterne vil komme til at ligge uendeligt langt fra hinanden. Dette er det første uafklarede spørgsmål.

Denne løsning er heller ikke for interessant, nu får vi godt nok udspændt planen, men vi har kun to punkter der ikke ligger på linie med alle de andre. Det var så baggrunden for at spørge til konstruktioner der er interessante langs mere end én akse. Her har vi ingen gode ideer.

Man kan ikke umiddelbart overføre konstruktionen til højere dimensioner så der mangler vi stadig gode bud. Mit bedste (i $\mathbb{R}^3$) er at tage to ligesidede trekanter med sidelængden 3, og placere dem i parallelle planer med afstanden 4, så bliver alle afstande 3, 4 eller 5. Noget tilsvarende kan man formentlig gøre i højere dimensioner, ved at vælge et $(n-1)$-simplex i R^n, på den måde kan man få $2 \cdot n$ punkter, men det må der da være en læser der kan gøre bedre?

Opgave 2

Opgaven handlede om at vende trekanter af mønter, så de ikke længere pegede opad men nedad i stedet. Tabel 1 indeholder de første par svar. Måske kan man ud fra tabellen spotte et mønster, de første differenser er 1, de næste 3 er 2, de næste 3 er 3 og de næste er 4.

Antal rækker	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Antal flytninger	0	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26

Tabel 1: Det nødvendige antal flytninger for at vende små trekanter.

En mere struktureret måde at løse opgaven på er at konstatere at man for at vende en trekant, skal flytte to små trekanter op, og en lille trekant ned. Kald antallet af mønter i de trekanter du flytter op for x og antallet af mønter i den trekant du flytter ned y. Ved at se på sidste række i den oprindelige trekant kan man så indse at $x+(y+1)+x=R$, hvor R er antallet af mønter i sidste række, hvilket er lig med antallet af rækker. I denne ligning kan vi isolere $y=R-2x-1$.

Antallet af mønter der skal flyttes er så $2\cdot\frac{x(x+1)}{2}+\frac{y(y+1)}{2}$. Hvis vi her indsætter udtrykket for y får vi følgende udtryk:

$$M(x)=3x^2-2x(R-1)+\frac{R(R-1)}{2}$$

Dette er et andengradspolynomium i x og da koefficienten til x^2 er positiv, kan vi slutte at der må være et minimum (det er jo meget heldigt), så er der kun tilbage at differentiere og sætte lig nul, og foretage lidt korrektion for at få heltallige løsninger.

En måde at udtrykke løsningen på er:

$$M=\begin{cases}\frac{(R-1)(R+2)}{6} & \text{hvis } R\equiv_3 1\\ \frac{R(R+1)}{6} & \text{ellers}\end{cases}$$

Opgave 3

Her var tale om en opgave der rent faktisk vakte interesse, de første par dage efter at FAMØS var udkommet, kunne man på tavlen i S01, se en masse udregninger med diverse rækker, og efter nogle forsøg så jeg også et bevis for det ønskede. Desværre lykkedes det mig ikke at få Morten til at renskrive beviset til FAMØS.

Først kan man konstatere at man kan dividere med 4 (som er et kvadrattal så det ændrer ikke noget). Så bliver opgaven at vise at ethvert tal af formen $1111\cdots 11-22\cdots 2$, hvor der er dobbelt så mange 1-taller som 2-taller, er et kvadrattal.

Ved at regne de første tilfælde ud får man formentlig ideen til at gætte på at

$$\sum_{k=1}^{2n}10^k-2*\sum_{k=1}^{n}10^k=\left(3*\sum_{k=1}^{n}10^k\right)^2.$$

Som sagt kan man komme igennem med lidt Cauchy-multiplikation og rækkegymnastik.

Opgave 4

Opgaven var:

> Betragt de 44 heltal $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{43} < a_{44} \leqslant 125$. Bevis at der blandt de 43 differencer $a_{i+1} - a_i$ er en værdi der forekommer mindst 10 gange.

Det er ganske enkelt et spørgsmål om at tælle. $a_{44} - a_1 = a_{44} - a43 + a43 - a_{42} + \cdots - a_2 + a_2 - a_1$ Hvis hver diffenrens (som er et positivt tal) højst må forekomme 9 gange, bliver denne størrelse mindst $9{\cdot}1{+}9{\cdot}2{+}9{\cdot}3{+}9{\cdot}4{+}7{\cdot}5 = 125$, men $a_{44} - a_1 < 125 - 0 = 125$, og det er en modstrid.

Opgave 5

Opgaven lød:

> Bevis at $ax^2 + bx + c$ ikke har nogen rationelle rødder hvis a, b og c er positive ulige heltal.

Antag at $x = {}^t\!/_n$ (hvor ${}^t\!/_n$ er en uforkortelig brøk) er en løsning, så er $(*)at^2 + btn + cn^2 = 0$. Eftersom ${}^t\!/_n$ er uforkortelig, kan højst et af tallene t og n være lige. Hvis netop ét af tallene er ulige, er to af leddene i $(*)$ lige, mens det tredje er ulige, og deres sum kan derfor ikke være 0. Hvis både t og n er ulige, er alle tre led ulige, og det ses således at ligningen ikke kan have en rationel rod.

Picards små og store mirakler

Johannes Aastrup

Jeg har altid syntes (d.v.s. lige siden jeg havde kompleks funtionsteori på andet år af matematikstudiet) at Picards lille og store sætning er imponerende og overaskende. Beviserne for disse bliver som regel sprunget over i indledende kurser i kompleks funktionsteori, så jeg synes, at dette er et godt sted at genemgå et beviser for dem. Og faktisk viser det sig, at beviset for den lille sætning er temmelig elementært (det er lige før, at det kunne gennemgås til en mat1 forelæsning). Beviset for den store bliver lidt mere teknisk og kræver noget kendskab til kompleks funktionsteori. Bl.a. indgår der i beviset Montels sætning, som er en vigtig ingrediens, ikke blot i Picards store sætning, men også i en del andre sætninger indenfor kompleks funktionsteori og jeg har valgt, som et lille ekstra nummer, nu da jeg var varm, at medtage en til konsekvens af Montels sætning, nemlig sætning 8, som er et, efter min mening, ret overraskende resultat.

Beviserne er hentet i den lille pampflet *Steven Krantz, Complex Analysis: The geometric Viewpoint, The Carus Mathematical Monographs, 29*, og er, som titlen antyder, baseret på Riemannsk geometri. Jeg vil dog ikke gå så meget ind i at forklare den geometriske betydning af begreberne; specielt vil jeg ikke forklare den geometriske betydningen af krumning.

Picards lille sætning

På et område Ω af den komplekse plan (det vil sige en åben og sammenhængende delmængde af $\mathbb{C}$) kigger vi på operatorerne

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ og } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Det følger af Cauchy-Riemann ligninger at $f : \Omega \to \mathbb{C}$ er kompleks differentiabel netop hvis $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ og at i så tilfælde er $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$. Den sædvanlige kæderegel giver følgende sammensætningsregler

$$\frac{\partial (f\circ g)}{\partial z}(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g(z))\frac{\partial \bar{g}}{\partial z}(z)$$

og

$$\frac{\partial (f\circ g)}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g(z))\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}(z)$$

Endvidere har vi $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}$

En metrik på et område Ω af $\mathbb{C}$ er en kontinuert funktion $\rho : U \to [0, \infty[$ så ρ er to gange kontinuert differentiabel på $\rho^{-1}(]0, \infty[)$.

Ideen med en metrik er, at tillægge en stykvis kontinuert differentiabel kurve $\gamma : [a, b] \to \Omega$ en længde ved $l_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|\rho(\gamma(t))dt$. Eller sagt anderledes, så tillægger vi $\gamma'(t)$ længde $|\gamma'(t)|\rho(\gamma(t))$.

Givet to punkter $z_1, z_2 \in \Omega$ kan vi definere afstanden $d_\rho(z_1, z_2) = \inf\{l_\gamma | \gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2\}$. I de fleste tilfælde vi skal kigge på, vil dette være en metrik i 2AN forstand.

Det vigtigste eksempel vi skal kigge på er Poincare metrikken på disken $D(0, r)$ givet ved $\rho_r(z) = \frac{r}{r^2 - |z|^2}$.

Hvis vi har givet en holomorf afbildning f mellem to områder Ω_1 og Ω_2 af $\mathbb{C}$ og ρ er en metrik på Ω_2, definerer vi pull-back metrikken $f^*\rho$ på Ω_1 ved $f^*\rho(z) = \rho(f(z))|f'(z)|$.

Endelig defineres krumningen af en metrik ρ i de punkter hvor ρ er forskellig fra 0 til

$$K_\rho(z) = -\frac{\Delta(\log(\rho))(z)}{(\rho(z))^2}$$

En lille udregning giver, at $K_{\rho_r}(z) = -4$.

Er $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ en holomorf funktion og er $f'(z) \neq 0$, da er $K_{f^*\rho}(z) = K_\rho(f(z))$. Dette følger nemt af, at for en holomorf funktion g er $\Delta(\log |g|) =$ [1]$\frac{1}{2}(\Delta(\log g) - \Delta(\log \bar{g})) = 0$.

Følgende lemma er meget centralt for sammenhængen mellem kompleks funktionsteori og metrikkerne vi har indført

Lemma 1 (Ahlfors-Schwarz). *Lad Ω være et område og lad ρ være en metrik på Ω med $K_\rho(z) < -B < 0$ for alle $z \in \Omega$. For enhver holomorf funktion $f : D(0, r) \to \Omega$ er $f^*\rho \leq \frac{2}{\sqrt{B}}\rho_r$.*

Bevis. Hvis $f^*\rho = 0$ er påstanden oplagt. Vi kan derfor antage, at $f^*\rho \neq 0$. For $r' < r$ betragter vi funktionen $\frac{f^*\rho}{\rho_{r'}}$. For r' tilpas stor, er denne funktion forskellig fra nul, og da den udvider til en kontinuert funktion på afslutningen af $D(0, r')$, vil den antage et positivt maksimum. Lad z_0 være et punkt, hvor den antager et maksimum. Dermed fås

$$\begin{aligned} 0 \leq -\Delta(\log \tfrac{f^*\rho}{\rho_r})(z_0) &= -K_{\rho_r}(z_0)(\rho_r(z_0))^2 + K_{f^*\rho}(z_0)(f^*\rho(z_0))^2 \\ &\leq 4(\rho_r(z_0))^2 - B(f^*\rho(z_0))^2 \end{aligned}$$

Heraf følger, at $\frac{f^*\rho}{\rho_{r'}} \leq \frac{2}{\sqrt{B}}$, og da dette gælder for alle r' passende store, fås det ønskede.

[1]"...og når jeg lægger mænd og kvinder sammen - det skal man jo være lidt forsigtig med, men på det her område tør jeg godt - så giver 39 pct. af mændene og 30 pct. af kvinderne befolkningen tilsammen, og det må være 69 pct. Tager jeg fejl?" Aase D. Madsen (Dansk Folkeparti).

Korollar 2. *Hvis Ω er et område med en metrik ρ, der har krumning opad begrænset af $-B > 0$, og $f : \mathbb{C} \to \Omega$ er holomorf, da er f konstant.*

Bevis. For $r > 0$ har vi lige set, at $(f_{|D(0,r)})^*\rho(z) \leq \frac{2}{\sqrt{B}}\rho_r(z)$. Dermed er $f^*\rho = 0$, d.v.s. $f'(z) = 0$ for alle z, som ønsket.

Korollar 3 (Picards lille sætning). *Hvis f er en hel ikke konstant funktion, da er $f(\mathbb{C})$ hele $\mathbb{C}$ eller hele $\mathbb{C}$ minus et punkt.*

Bevis. Det er nok at konstruere en metrik på $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ med en krumning, der opad begrænset af en negativ konstant. Men

$$\mu(z) = \left(\frac{\sqrt{1 + |z|^{\frac{1}{3}}}}{|z|^{\frac{5}{6}}}\right)\left(\frac{\sqrt{1 + |z-1|^{\frac{1}{3}}}}{|z-1|^{\frac{5}{6}}}\right)$$

vil være en sådanne metrik idet

$$K_\mu(z) = -\frac{1}{18}\left(\frac{|z-1|^{\frac{5}{3}}}{(1 + |z|^{\frac{1}{3}})^3(1 + |z-1|^{\frac{1}{3}})} + \frac{|z|^{\frac{5}{3}}}{(1 + |z|^{\frac{1}{3}})(1 + |z-1|^{\frac{1}{3}})^3}\right)$$

som oplagt er opad begrænset af en negativ kontant.

Riemannsfæren, normale familier og Picards store sætning

Vi betragter nu Riemann sfæren, der som mængde er $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ og som topologisk rum blot etpunktskompaktifiseringen af $\mathbb{C}$. En funktion $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ kaldes holomorf, hvis f er holomorf hvor $f \neq \infty$ og $\frac{1}{f}$ er holomorf hvor $f \neq 0$ (per konvention er $\frac{1}{\infty} = 0$). Med andre ord er f holomorf netop hvis f er meromorf eller konstant lig ∞.

Vi har to afbildninger fra $\mathbb{C}$ ind i $\hat{\mathbb{C}}$, nemlig den naturlige N og så $I : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ givet ved $I(z) = \frac{1}{z}$ for $z \neq 0$ og $I(0) = \infty$. En metrik på $\hat{\mathbb{C}}$ består af to metrikker på $\mathbb{C}$, ρ_N og ρ_I, så $(I^{-1} \circ N)^*\rho_N(z) = \rho_I(z)$ når $z \neq 0$.

Motivationen for denne lidt besynderlige definition af metrik skal findes i følgende. Lad os sige vi har en kontinuert kurve $\gamma :]a, b[\to \hat{\mathbb{C}}$ og antag $\gamma(t_0) \neq \infty$. Vi kan så betragte kurven $N^{-1} \circ \gamma$ defineret i en omegn af t_0. Hvis så denne kurve er differentiabel i t_0 tillægger vi $\gamma'(t_0)$ længden $|(N^{-1} \circ \gamma)'(t_0)|\rho_N(N^{-1}(\gamma(t_0)))$. Hvis $\gamma(t_0) \neq 0$ så tillægger vi $\gamma'(t_0)$ en længde på samme måde som før, hvor blot N er udskiftet med I. Læg mærke til, at hvis $\gamma(t_0) \neq 0$ og ∞, så sikrer definitionen af metrik, at det er underordnet om vi bruger N eller I. Længden vi tillægger $\gamma'(t_0)$ med en metrik ρ, betegner vi også $\|\gamma'(t_0)\|_\rho$.

Givet en metrik ρ på $\hat{\mathbb{C}}$ og en holomorf funktion $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ definerer vi pull back metrikken ved $f^*\rho(z) = \rho_N(N^{-1}(f(z)))|(N^{-1} \circ f)'(z)|$ hvis $f(z) \neq \infty$ og $f^*\rho(z) = \rho_I(I^{-1}(f(z)))|(I^{-1} \circ f)'(z)|$ hvis $f(z) \neq 0$.

Den metrik på $\hat{\mathbb{C}}$ vi primært skal kigge på er $\sigma_N(z) = \sigma_I(z) = \frac{2}{1+|z|^2}$. Denne metrik kaldes også den sfæriske metrik. Grunden til dette er, at vi kan identificere $\hat{\mathbb{C}}$ med enhedssfæren i $\mathbb{R}^3$ ved at afbilde $N(x+iy)$ ind i

$$\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, 1 - \frac{2}{1+x^2+y^2}\right)$$

og tilsvarende afbilde $I(x+iy)$ ind i

$$\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{-2y}{1+x^2+y^2}, \frac{2}{1+x^2+y^2} - 1\right)$$

d.v.s. stereografisk projektion. Kalder vi denne afbildning φ og lader γ være en kurve på $\hat{\mathbb{C}}$, da vil længden af γ' målt med σ netop være den euklidiske længde af $(\varphi \circ \gamma)'$. Specielt ser vi, at det metriske rum, som den sfæriske metrik inducerer, er kompakt.

Vi indfører nu nogle vigtige tekniske begreber. Målet er Montels sætning, som er hovedingrediensen i beviset for Picards store sætning.

En følge af funktioner (f_n) fra et metrisk rum M_1 til et andet metrisk rum M_2 siges at konvergere normalt mod f, hvis $f_n \to f$ uniformt på enhver kompakt delmængde af M_1.

En familie $\mathcal{F}$ af funktioner kaldes normal hvis enhver følge fra $\mathcal{F}$ har en normalt konvergerende delfølge (grænsefunktionen behøver ikke at ligge i $\mathcal{F}$).

Endelig kaldes $\mathcal{F}$ ækvikontinuert, hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$ så $d(x,y) < \delta$ medfører at $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ for alle $f \in \mathcal{F}$.

Sætning 4 (Arzela-Ascoli). *Lad U være en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$ og lad M være et kompakt metrisk rum. Hvis en familie $\mathcal{F}$ af funktioner fra U til M er ækvikontinuert på alle kompakte delmængder af U, da er $\mathcal{F}$ normal.*

Bevis. En god opgave i metriske rum.

Vi kan nu give en karakterisering af normale familier af holomorfe funktioner fra Ω til $\hat{\mathbb{C}}$ i termer af pull.backs af den sfæriske metrik σ:

Sætning 5. *En familie $\mathcal{F}$ af holomorfe funktioner fra Ω til $\hat{\mathbb{C}}$ er normal netop hvis der for enhver kompakt mængde $K \subset \Omega$ findes M_k så $f^*\sigma(z) \leq M_K$ for alle $z \in K$ og $f \in \mathcal{F}$.*

Bevis. Antag, at der for hvert kompakt $K \subset \Omega$ findes M_K så $f^*\sigma(z) \leq M_K$ for alle $f \in \mathcal{F}$ og alle $z \in K$. Betragt en kompakt mængde K af formen $\overline{D(z,r)} \subset \Omega$. Givet $z_1, z_2 \in K$ vælges en sti $\gamma : [a,b] \to K$ mellem z_1 og z_2. Vi har så

$$\begin{aligned} d_\sigma(f(z_1), f(z_2)) &\leq \textstyle\int_a^b \|(f \circ \gamma)'(t)\|_\sigma dt \\ &= \textstyle\int_a^b f^*\sigma(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt \leq M_K \int_a^b |\gamma'(t)|dt \end{aligned}$$

hvilket viser, at $\mathcal{F}$ er ækvikontinuert på K. Dermed bliver $\mathcal{F}$ ækvikontinuert på enhver kompakt mængde K i Ω, d.v.s. $\mathcal{F}$ er normal.

Antag nu, at $\mathcal{F}$ er normal. Det er så nemt at, se at $\{f^*\sigma | f \in \mathcal{F}\}$ er normal som funktioner fra Ω ind i $\mathbb{R}$, hvoraf det ønskede følger.

Sætning 6 ((Paul!) Montels sætning). *Lad $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ være tre forskellige punkter. Hvis $\mathcal{F}$ er en familie af holomorfe funktioner fra Ω ind i $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$, da er $\mathcal{F}$ normal*

Bevis. Ved at anvende passende transformation af $\hat{\mathbb{C}}$ kan vi antage, at $a = 0, b = 1$ og $c = \infty$. Endvidere er det nok at vise normalitet af $\mathcal{F}$ på mængder af formen $D(z_0, r)$. Vi bemærker så, at der for metrikken μ konstrueret i beviset for Picards lille sætning gælder, at der findes en konstant M, så $\sigma(z) \leq M\mu(z)$, for alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Dermed giver Ahlfors-Schwarz lemma, at der findes en konstant L så

$$f^*\sigma \leq M f^*\mu \leq L\rho_r$$

for alle $f \in \mathcal{F}$. Specielt vil der for hver kompakt delmængde K af $D(z_0, r)$ findes M_K, så $f^*\sigma(z) \leq M_K$ for alle $z \in K$ og $f \in \mathcal{F}$, som ønsket.

Hvis vi er givet en familie $\mathcal{F}$ af holomorfe funktioner med værdier i $\mathbb{C}$, kan vi selvfølgelig også snakke om normalitet af $\mathcal{F}$ som funktioner ind i $\mathbb{C}$. Dette begreb vil være forskellig fra normalitet af $\mathcal{F}$ som funktioner ind i $\hat{\mathbb{C}}$. Dog vil der gælde, at hvis en følge af holomorfe funktioner (f_n) fra $\mathcal{F}$ konvergerer normalt som funktioner med værdier i $\hat{\mathbb{C}}$, vil denne følge enten konvergere normalt, som funktioner med værdier i $\mathbb{C}$, eller divergere normalt, d.v.s. for enhver kompakt delmængde K af Ω og for hvert positivt tal L, vil der findes et M, så for $n \geq M$ vil $|f_n(z)| > L$ for alle $z \in K$. Dette følger af residuesætningen, thi antag at (f_n) ikke konvergerer normalt som funktioner ind i $\mathbb{C}$. Dermed vil der for grænsefunktionen f gælde, at der findes $z \in \Omega$ så $f(z) = \infty$. Vi kan så finde en omegn $D(z, r)$ af z så (f_n) f.v.t. ikke antager værdien 0 på $D(z, r)$ og så $(\frac{1}{f_n})$ konvergerer normalt mod $\frac{1}{f}$ på $D(z, r)$. Antages, at $\frac{1}{f}$ kun har diskrete nulpunkter på $D(z, r)$, giver residue sætningen, at antallet af nulpunkter for $\frac{1}{f}$, talt med multiplicitet, indenfor $D(z, r')$, $r' < r$, er

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\frac{1}{f})'}{\frac{1}{f}} dz$$

hvor γ er kurven $\gamma(t) = z + r'e^{2\pi i t}$. Denne størrelse er imidlertid nul da

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\frac{1}{f_n})'}{\frac{1}{f_n}} dz = 0$$

idet $\frac{1}{f_n}$ er nulpunktfrie og $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ uniformt på $D(z, r')$. Altså konkluderer vi, at $\frac{1}{f}$ ikke har nogle nulpunkter på $D(z, r')$, hvilket er en modstrid. Altså vil $\frac{1}{f}$ ikke have nogle diskrete nulpunkter på $D(z,r)$, hvorfor $\frac{1}{f} = 0$ på $D(z,r)$. Sammenhæng af Ω giver så, at $f = \infty$ på Ω, d.v.s. f_n divergerer normalt.

Af Montels sætning følger nu let

Sætning 7 (Picards store sætning). *Lad f være en holomorf funktion med en essentiel singularitet i a. For enhver omegn U af a vil $f(U \setminus \{a\})$ bestå af hele den komplekse plan eller hele den komplekse plan minus et punkt.*

Bevis. Vi kan antage, at $a = 0$ og at $U = D(0,1)$. Antag, at $\mathbb{C} \setminus f(U \setminus \{0\})$ består af mindst to punkter. Sæt $f_n(z) = f(\frac{z}{n})$. Ifølge Montels sætning vil (f_n) have en delfølge (f_{n_j}) som enten konvergerer normalt eller divergerer normalt. Hvis (f_{n_j}) konvergerer normalt vil der specielt gælde, at der findes M så $|f_{n_j}(z)| \leq M$ på $\{z||z| = \frac{1}{2}\}$. Dermed er $|f|$ begrænset på $\{z||z| = \frac{1}{2n_j}\}$. Men maksimum modulus princippet vil medføre, at $|f|$ er begrænset på $D(0, \frac{1}{2})$. (Maksimum modulus princippet siger, at givet en holomorf funktion g på $D(z,r)$, da er $|g(z)| \leq \max\{|g(z')|||z' - z| = r'\}$, hvor $r' < r$ og i tilfælde af lighed, er g konstant. Princippet følger af Cauchys integral sætning, idet denne giver, at $g(z) = \int_0^1 g(z+r'e^{2\pi i t})dt$.) Dette er i modstrid med, at 0 er en essentiel singularitet for f.

I tilfældet hvor (f_{n_j}) divergerer normalt, betragtes blot $\frac{1}{f_{n_j}}$ istedet og resten forløber stort set som før.

Sætning 8. *Lad Ω være et område, så $\mathbb{C} \setminus \Omega$ består af mindst to punkter. Lad endvidere $f : \Omega \to \Omega$ være holomorf og antag, at der findes z_0 så $f(z_0) = z_0$ og $|f'(z_0)| = 1$. Da er f en konform afbildning, d.v.s. der findes $g : \Omega \to \Omega$ holomorf, så $(g \circ f)(z) = (f \circ g)(z) = z$ for alle $z \in \Omega$.*

Bevis. Vi kan antage at $z_0 = 0$. Dermed har f formen

$$f(z) = az + \text{led af højere orden},$$

$|a| = 1$. Det er en god lille øvelse at vise, at når a er et komplekst tal med $|a| = 1$, så findes en delfølge (a^{n_j}) af (a^n) så $a^{n_j} \to 1$. Sætter vi derfor $f_n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n}$ har (f_n) ifølge Montels sætning en normalt konvergerende delfølge (f_{n_i}), så der for grænsefunktionen h gælder, at $h'(0) = 1$. Der vil nu gælde, at $h(z) = z$ thi er dette ikke tilfældet har h formen

$$h(z) = z + a_m z^m + \text{endnu højere ordens led}$$

Dermed har $h_n = \underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{n}$ formen

$$h_n(z) = z + a_m n z^m + \text{endnu højere ordens led}$$

hvilket er i modtrid med, at (h_n) har en normalt konvergerende delfølge.

For at konstruere g betragter vi følgen $(f_{n_i - 1})$. Denne har en normalt konvergerende delfølge og grænsefunktionen g vil opfylde de ønskede krav.

Douglas Noel Adams, polyhistor 1952–2001

Peter Firefly Lund

Douglas Adams (ikke at forveksle med Douglas Q. Adams) er netop død, 49 år, fredag den 11. maj 2001. Den officielle forklaring er et hjerteanfald, muligvis fremprovokeret af smertene i dioderne ned langs hele den venstre side.

Adams var en stor matematiker, fysiker, antropolog, biolog, filolog og historiker – og så har vi endda ikke nævnt det hele. Han var renæssancemenneskets polyhistor, en moderne da Vinci, hvis da bare da Vinci havde kunnet skrive og Adams kunnet tegne.

Adams ydede tidligt store bidrag til matematikken, specielt den del der kunne anvendes direkte i fysikken i form af sandsynlighedsteori (The Hitchhikers Guide to the Galaxy, 1979, dansk 1985), alternative løsninger af tensorligninger og Schrödingerligningen (samme) og fremført bevis for eksistensen af ikke-lokale fjernvirkninger i populærvidenskabelig form i Dirk Gently's Holistic Detective Agency (1987, dansk 1989). Dertil kommer studier i matematikken bag – eller foran? – brownske bevægelser i ophedede væsker.

Før det arbejdede Adams undercover i det britiske propagandaministeriums afdeling for elektroniske, æterbårne medier som producer for bl.a. Dr. Who.

Det var Adams der indførte topologiske overvejelser i arkitekturen ved at beskrive hvordan det er at bo i et hus der vender på vrangen og samtidig give en alternativ gennemgang af omverdensproblemet (So Long and Thanks for all the Fish 1984, dansk 1988), som han i øvrigt allerede tidligere havde behandlet i form af The Total Perspective Vortex som indgår i nogle informative radioudsendelser fra 1978.

På det biologiske område udarbejdede Adams en taxonomi for farver, specielt gjorde han meget ud af de blå nuancer. Hans farvelære kæmpede længe med J.W. von Goethes men viste sig i længden at være denne overlegen.

Ud over det videnskabelige og oplysende arbejde fandt Adams tid til aktivistarbejde for bedring af blåhvalers og petuniaers kår.

Som Hemingway var han også en ynder af storvildtjagt i fremmede og eksotiske egne. Ligesom The Short and Happy Life of Francis Macomber står som en af Hemingways største noveller er Adams' beskrivelse af jagten på Chesterfield sofaen gribende i al sin enkelhed.

Hans filologiske studier lå ret tidligt i karrieren (The Meaning of Liff, 1983, fordansket af Anders Lund Madsen 1998) men lå alligevel som en understrøm i det senere forfatterskab.

Sideløbende med alt det førnævnte havde han en karriere som rejsebogsforfatter (Last Chance to See 1990). Oven i det hele magtede han at skrive klummer om det at være en kompulsiv Mac bruger der nægtede at gå på afvænning. Han udleverede aldrig andre i disse klummer, men af og til sig selv, uden at det blev pinligt. De står stadig som noget af det morsomste der er skrevet i et computerblad.

Han vil blive savnet, husket og mindet af generationer af sære, svagt menneskelignende væsener rundt omkring på gymnasier og naturvidenskabelige fakulteter i hele verden.