FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
14. årgang, nr. 3, marts 2001

Nu også i det

21.

århundrede!

FAMØS 14.3; marts 2001.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)
Peter Lund

Deadline for næste nummer:
Fredag den 4. maj 2001

Indlæg modtages gerne og kan sendes til famos@math.ku.dk (meget gerne skrevet i LaTeX), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web-adresse:
http://www.math.ku.dk/famos/

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 700 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder

Så kom FAMØS også ind i år 2001, og endnu engang er årets første nummer ikke særlig stort. Vi tager med glæde imod bidrag af enhver art, det være sig debat om studiets opbygning, en artikel om noget spændende matematik du er stødt på, en interessant opgave, eller måske en løsning på en af de opgaver vi stiller. Det kunne også være noget helt andet du synes FAMØS skal bruge spalteplads på, vi stiller ikke særlige krav til seriøsitet eller lødighed.

Endnu engang må vi undskylde at have skrevet noget vrøvl i sidste nummer, Asger Grunnet har aldrig været redaktør på FAMØS, han har kun skrevet en enkelt artikel og løst nogle opgaver. Vi har haft en redaktør der hed Asger, og fejlen skyldes at redaktøren rodede i efternavnene. Et tegn på at jeg har lavet FAMØS for længe, og trænger til at blive skiftet ud?

Måske ville det hjælpe blot at få nogle flere medredaktører. Jeg ser ingen grund til at det nødvendigvis skal gå som det gjorde med kollokvierne, hvor arrangøren var blevet kandidat inden der var nogen der tog affære.

Vi kunne også godt bruge en kreativ sjæl i redaktionen, til at forsyne bladet med nogle tegninger. Vi har i arkiverne fundet et gammelt nødråb som bringes på bagsiden, sammen med en tegning fra FAMØS' forgænger Plus-Minus.

Apropos ting der ikke er døde, så har der netop været semesterstartsfest på matematisk afdeling, for første gang i $1\frac{1}{2}$ år. Desværre var jeg forhindret i at deltage, så I må undvære en beretning, men mon ikke det har været lige så sjovt og hyggeligt som de foregående gange.

Strøtanker om matematikuddannelsen

Søren Møller Hansen, Thomas Jensen,
Morten Gram Pedersen og Jakob Juul Stubgaard

Dette indlæg er tænkt som et bidrag til debatten om en fremtidig studieordning på matematik. Vi beskæftiger os alle fire med geometri og analyse, hvorfor vi ikke vil kommentere algebradelen af uddannelsen.

Vi har to forslag til forbedring og styrkelse af disse to emneområder.

Det første omhandler geometriens placering på bachelordelen. Som det er nu, er det meget svært overhovedet at komme i gang med en geometriuddannelse her på stedet. Man lærer ganske simpelt for lidt geometri på første del — og det er tilmed end ikke nødvendigt at tage 3GE for at blive bachelor. Den version af 3GE, der kører i øjeblikket, hører efter vores mening nærmere hjemme på 2. år — eventuelt i en mindre udgave, der kan erstatte 2SS som obligatorisk kursus. 2SS skulle så i stedet for, som tidligere, være et valgfrit kursus på 3. år. Dette ville give mulighed for et mere ambitiøst 3. års kursus i abstrakt differentialgeometri, som kunne forudsætte 3GT.

Det andet forslag skyldes, at vi mener det er en mangel, at man kun i meget begrænset omfang stifter bekendtskab med anvendt matematik på 1.-delen. Her tænkes specielt på emner som differentialligninger, variationsregning, dynamiske systemer mv.

Dette skal *ikke* forstås på den måde, at vi skal lære at bygge broer og tunneller — men på den måde, at emner indenfor den umiddelbart anvendelige matematik præsenteres og behandles. Selvfølgelig med en stringent matematisk tilgang. At arbejde med anvendt matematik er ikke ensbetydende med at gå på kompromis med det faglige niveau, som under alle omstændigheder skal være højt. Det er vores personlige opfattelse, at det *også* er tilfredsstillende at lære et matematisk emne, som man straks kan se en nyttig anvendelse af. Et håb i den forbindelse er — udover at dyrke vores egen faglige interesse — at det kunne tiltrække flere studerende, samt holde på dem, der ellers ville skifte til andre, mindre abstrakte fag.

Som det er i dag har man kun mulighed for at følge anvendelsesorienterede kurser på 2.-delen (med mindre man læser ren matematik, og derfor har plads til at tage kurser som Mat DL1). Størsteparten af disse kunne med fordel udbydes på 3. år, hvis kursernes pensum tilpasses de studerendes forudsætninger. Mange af kurserne kan allerede nu følges på 3. år, men de står ikke opført som 3. års kurser — og det afholder nok de fleste fra at tage dem. Kurserne kunne så tages i stedet for nogle af de obligatoriske kurser. F.eks. kan operatorer på Hilbert rum sagtens indføres i forbindelse med et kursus i „kvantemekanikkens matematik“.

Et problem ved en sådan model er selvfølgelig, at der skal udbydes flere kurser. Som løsning på dette, vil vi gerne bakke op om Mikkel Øbros forslag i FAMØS (maj 2000), der kort sagt gik ud på 'læsning under vejledning' — dvs. læsekurser suppleret med oversigtsforelæsninger og seminarforedrag. Desuden vil et tættere samarbejde med andre institutioner (Universitetet i Lund, DTU og andre) også øge kursusudbudet betragteligt. En forudsætning er selvfølgelig at der i Lektionskataloget gøres opmærksom på mulighederne og henvises til relevante kurser. Vi kan nævne, at Mat-Øk allerede samarbejder med polit-studiet på denne måde.

Opsummeret ønsker vi et bredere udvalg af emner — specielt mere geometri og anvendt matematik, som supplement til de kurser der findes i dag.

Opgaver

Opgave 1

Hvor mange punkter kan man placere i planen så forholdet mellem et vilkårligt par af afstande er rationelt?

Hvad hvis man kræver at punkterne udspænder planen?

Hvad sker der hvis man kræver at konstruktionen er „interessant" langs mere end én akse?

Hvad er svaret på de tilsvarende spørgsmål i rummet/$\mathbb{R}^4$/ ... ?

Opgave 2

Figur 1: Nedadpegende trekant af 20-kroner

Hvis man arrangerer 3 mønter i en trekant der peger nedad, kan man ved bare at flytte én mønt få trekanten til at pege opad. Hvor mange flytninger skal der til at vende trekanten hvis der er 3, 4, 5 eller n rækker af mønter?

Opgave 3

En lille opgave fra årets Georg Mohr-konkurrence. Det kan lige nævnes at opgave 2 i årets konkurrece tidligere har været stillet i FAMØS (september 99), dog med en lidt anden ordlyd.

Figur 2: Opadpegende trekant af 60 kroner

Vis, at ethvert tal på formen $44\ldots44 - 8\ldots8$, hvor der er dobbelt så mange 4-taller som 8-taller er et kvadrattal.

Opgave 4

Betragt de 44 heltal $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{43} < a_{44} \leqslant 125$. Bevis at der blandt de 43 differencer $a_{i+1} - a_i$ er en værdi der forekommer mindst 10 gange.

Opgave 5

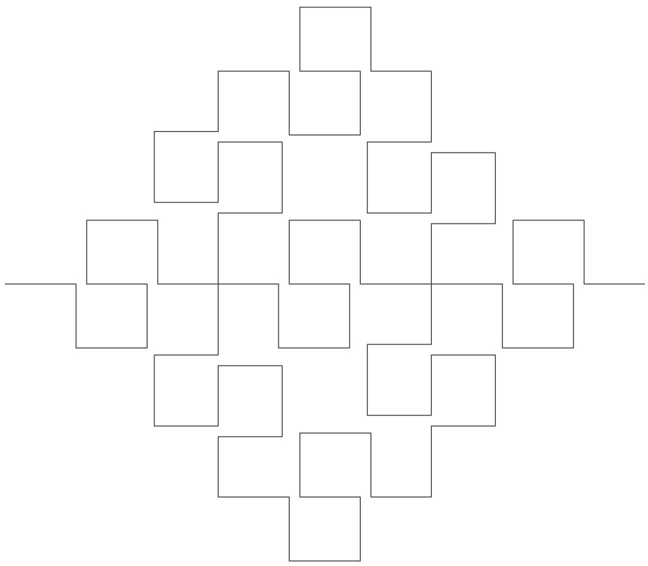
Bevis at $ax^2 + bx + c$ ikke har nogen rationelle rødder hvis a, b og c er positive ulige heltal.

Peanos kurve?

Peter Lund & Henrik Chr. Grove

Her er en side vi skal have fyldt ud så side 9-sætningen, rent faktisk kan komme til at begynde på side 9. Inspireret af side 9-sætningen fik vi lyst til at søge efter Peanos kurve på nettet, vores eneste sikre resultat er overbevisningen om at folk er ret uenige om hvordan Peanos kurve egentlig ser ud, så ...

ABESKØN lyshåret slem funktion, parat til alt det frække kun 111 år, peanoeser, både kontinuert og reel. Er du mand nok til at differentiere mig? Du må prøve i alle huller. Tors-fre-lørdag, tlf. +31 41 59 26 53.



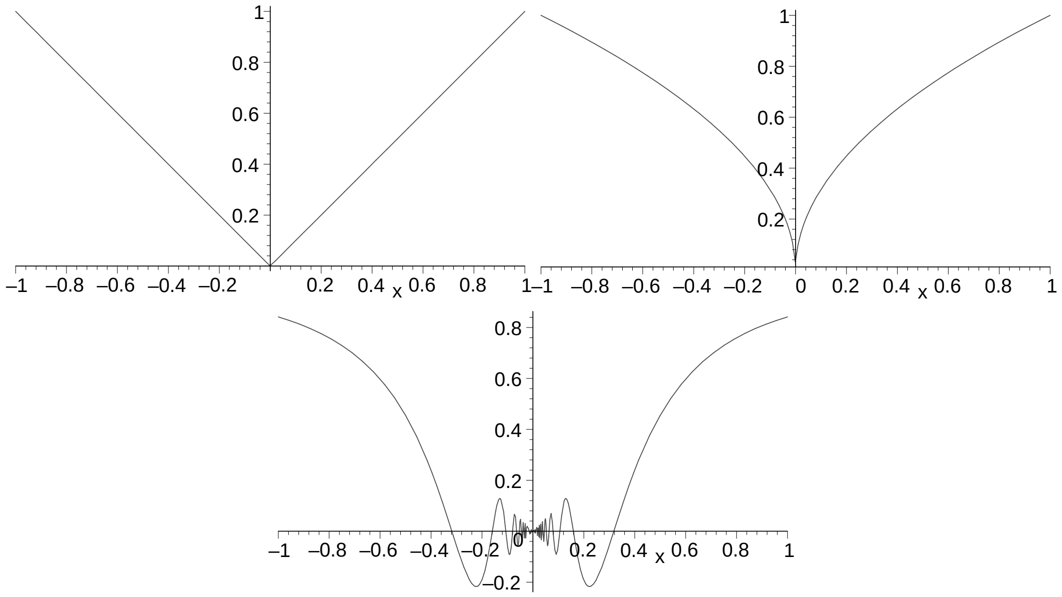
Figur 1: „Lad os fylde rummet ud sammen, skatter“

ALTID frisk mager mængde. Både grupper og alene. Lad os lave brownske bevægelser i den vandrette plan hele natten. Tlf. +27 18 28 18 45.

Slemme funktioner

Henrik Schlichtkrull

Når vi skal give et eksempel på en kontinuert reel funktion, der ikke er differentiabel, plejer vi at bruge funktionen $f(x) = |x|$ (se fig. 1), der ikke er differentiabel i 0 fordi de venstre- og højreafledede ikke stemmer overens. Et andet eksempel fås ved at betragte $f(x) = |x|^{1/2}$, der har lodret tangent i 0. Endnu værre opfører funktionen defineret ved $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ og $f(0) = 0$ sig. Den er kontinuert i 0, men dens differenskvotient $\frac{1}{h}(f(h) - f(0)) = \sin \frac{1}{h}$ konvergerer ikke og går heller ikke mod $\pm\infty$ for $h \to 0$.



Figur 1: Ikke-differentiable funktioner

Det er klart at man ved at klistre sådanne funktioner sammen kan konstruere en kontinuert funktion der opfører sig lige så slemt i et givet sæt af isolerede punkter. En berømt sætning af Weierstrass fortæller imidlertid, at der findes kontinuerte funktioner som er langt værre:

Side 9-sætningen *Der findes en kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som ikke er differentiabel i noget punkt.*

Ved fremkomsten af sætningen i 1872 vakte den tilsyneladende megen opsigt. Her skal man tænke på, at Peano heller ikke var kommet med sin kurve (den er fra 1890), så man var ikke vant til andet end at kontinuert er pænt. Det fremgår af Weierstrass eget forord ([6], side 71), at selv berømte matematikere som Gauss, Cauchy og Dirichlet havde regnet med at en kontinuert funktion nødvendigvis er differentiabel, pånær i isolerede punkter. Sidenhen har man opdaget at Bolzano vistnok havde et lignende eksempel 40 år i forvejen, men det var blevet i skuffen ([3] side 402).

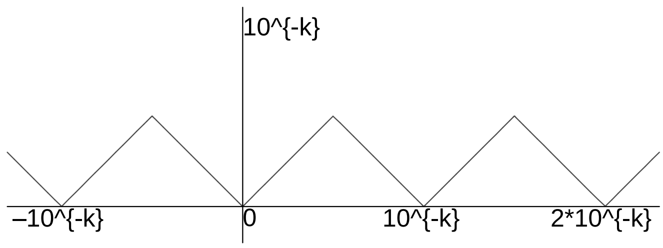
Weierstrass viste, at funktionen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ opfylder det ønskede, hvis a er et ulige heltal, $0 < b < 1$ og $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Han viste endda mere, nemlig at differenskvotienterne for f i et hvilket som helst punkt ikke konvergerer, hverken fra venstre eller højre, og heller ikke mod uendelig.

Her vil jeg nøjes med at bevise sætningen som den er formuleret ovenfor. Beviset, som er en del enklere end det af Weierstrass, kommer fra van der Waerden [5], som skriver at han havde stillet det som en opgave i „Wiskundig genootschap", hvilket vistnok betyder FAMØS på hollandsk. Opgaven gik ud på at vise, at nedennævnte funktion f ikke er differentiabel i noget punkt. Det elegante bevis skyldes en af bladets læsere, idet van der Waerdens eget var mere indviklet.

Bevis. Lad f_k betegne „savtaksfunktionen" givet ved at $f_k(x)$ er afstanden fra x til den nærmeste k-tallige decimalbrøk, altså

$$f_k(x) = \min_{p \in \mathbb{Z}} |x - 10^{-k} p|$$

(se fig. 2). På hvert interval $[10^{-k}p; 10^{-k}(p + \frac{1}{2})]$, $p \in \mathbb{Z}$, er f_k altså lineært voksende med hældningen 1, og på $[10^{-k}(p - \frac{1}{2}); 10^{-k}p]$ er den lineært aftagende med hældning -1. Specielt er $0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{2}10^{-k}$, og f_k er kontinuert.



Figur 2: Savtakfunktionen f_k

Sæt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Da rækken har den konvergente majorantrække $\frac{1}{2}\sum 10^{-k}$ er den uniformt konvergent. Altså er f kontinuert. Påstanden er, at f ikke er differentiabel i noget punkt.

Lad $x \in \mathbb{R}$. Vi vil konstruere en følge $x_n \to x$, for hvilken følgen af differenskvotienter $(f(x_n) - f(x))/(x_n - x)$ ikke konvergerer. For hvert n betragtes det interval I_n af typen $[10^{-n}p; 10^{-n}(p + \frac{1}{2})[$ eller $[10^{-n}(p - \frac{1}{2}); 10^{-n}p[$, som x tilhører. Vi vælger x_n blandt de to tal $x \pm 10^{-(n+1)}$ således at den også tilhører I_n. Det er klart at $x_n \to x$.

For $k > n$ er $f_k(x_n) = f_k(x)$ idet $x_n - x = \pm 10^{-(n+1)} \in 10^{-k}\mathbb{Z}$. Da f_n er lineær på intervallet I_n, er den det også på intervallet mellem x_n og x. For $k < n$ er $I_n \subset I_k$ og dermed er f_k også lineær mellem x_n og x. Dermed er

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{n} \pm 1 \equiv n + 1 \mod 2$$

Altså alternerer følgen af differenskvotienter mellem lige og ulige heltal, og den konvergerer dermed ikke. □

Lad os indføre betegnelsen *slem* for den egenskab ved en kontinuert funktion, at den ikke er differentiabel i noget punkt af dens definitionsmængde.

Så snart vi har fundet en enkelt slem funktion, får vi straks en hel skare ud fra princippet „slem+pæn=slem". Nærmere betegnet, hvis f er slem, da er $f + g$ ligeledes slem for enhver differentiabel funktion g. Det fører til nedenstående korollar.

Lad $[a; b] \subset \mathbb{R}$ være et begrænset, afsluttet interval, og lad $C[a; b]$ betegne mængden af kontinuerte reelle funktioner derpå. Vi udstyrer $C[a; b]$ med den uniforme norm, $\| \cdot \|_u$.

Korollar *Mængden $\mathcal{S}$ af slemme funktioner er tæt i $C[a; b]$.*

Bevis. Lad $\varphi \in C[a; b]$. Det følger af Weierstrass approksimationssætning (se f.eks. [2], s. 121-122), at der findes en følge g_n af differentiable funktioner (endda polynomier) på $[a; b]$, som konvergerer uniformt mod φ. Lad $\varphi_n = g_n + \frac{1}{n} f$, hvor f er restriktionen til $[a; b]$ af den ovenstående funktion. Da er $\varphi_n \in \mathcal{S}$, og den konvergerer uniformt mod φ. □

Historien er imidlertid ikke slut hermed. Som nævnt i beviset herover, er mængden af pæne (differentiable) funktioner tæt i $C[a; b]$. Idet vi nu ved, at også de slemme funktioner ligger tæt i $C[a; b]$, er det naturligt at overveje hvem der er flest af, de pæne, de slemme eller måske dem som er hverken eller. Det overraskende svar blev givet af Banach i 1931, [1], som viste, at det i en vis forstand er *reglen, snarere end undtagelsen, at en kontinuert funktion er slem.*

For at præcisere, må vi først indføre en måde at skelne mellem tætte mængders fyldighed. Lad (M, d) være et metrisk rum, og lad os straks antage at det er fuldstændigt. Det er $C[a; b]$ jo. At en delmængde $A \subseteq M$ er tæt i M betyder som bekendt at $\bar{A} = M$. Hvis også A's indre er tæt, f.eks. hvis A er åben og tæt, så må vi anse A for at fylde særlig meget. F.eks. er $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ åben og tæt i $\mathbb{R}$, men hverken $\mathbb{Q}$ eller $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ opfylder dette skrappe krav, idet de begge har tomt indre.

Ligesom for $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gælder generelt, at hvis to disjunkte mængder begge er tætte i M, da har de begge tomt indre. Det gælder dermed både for mængden $\mathcal{S}$ af slemme funktioner i $C[a;b]$ og for dens komplementærmængde (som består af de funktioner der er differentiable i mindst et punkt), at den ikke fylder så meget at den har tæt indre.

Vi observerer nu, at tager vi fællesmængden mellem to mængder, som begge er åbne og tætte, da får vi atter en åben og tæt mængde (ses let). Det samme gælder dermed for endelige fællesmængder, men det gælder ikke generelt for uendelige fællesmængdedannelser. Derfor indfører vi følgende definition.

Definition En delmængde $A \subseteq M$ kaldes *fed* i M, hvis der findes tællelig mange åbne tætte mængder $G_1, G_2, G_3, \ldots$, således at $A \supseteq \cap_{n=1}^{\infty} G_n$. En delmængde af M kaldes *mager* i M, hvis dens komplementærmængde er fed.

For eksempel er $\mathbb{Q}$ mager (og $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dermed fed) i $\mathbb{R}$. Skriver vi nemlig $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, da er $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \cap G_n$ hvor $G_n = \mathbb{R} \setminus \{x_n\}$. Begreberne stammer i øvrigt fra Baire (1899), der brugte betegnelsen „første kategori“ om magre mængder. Ordet mager er vistnok opfundet af Bourbaki. Mængder som ikke er magre kaldes genialt nok ikke-magre (eller af „anden kategori“). Bemærk at begreberne fed og ikke-mager er forskellige; der findes mange mængder som hverken er fede eller magre. Men vi skal se om lidt, at fed medfører ikke-mager.

Den nedenstående sætning, at fede mængder er tætte, kaldes ofte *Baires kategorisætning*. Med den finder vi en egenskab ved visse tætte delmængder, som udmærker dem fremfor andre, nemlig at de er fede. Bortset fra mængderne med tæt indre er det disse mængder som „fylder mest“.

Det følger specielt af Baires sætning, at fede mængder ikke er tomme. Det ses let fra den ovenstående definition af begrebet fed, at fællesmængden af to fede mængder igen er fed. Dermed kan en mængde og dens komplementærmængde ikke begge være fede. Thi deres fællesmængde er tom. Med andre ord, en fed mængde kan ikke også være mager, som nævnt ovenfor.

Vi har set ovenfor, at $\mathbb{Q}$ er mager og $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ er fed i $\mathbb{R}$. Det følger altså dermed af Baires sætning at $\mathbb{Q}$ ikke er fed i $\mathbb{R}$. Dette stemmer overens med at der er flere irrationale end rationale tal (eller man kunne vælge at sige, at Baires sætning giver et nyt bevis for at $\mathbb{R}$ ikke er numerabel, for hvis $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ var numerabel, ville $\mathbb{Q}$ også være fed).

Sætning *I et fuldstændigt metrisk rum er enhver fed mængde tæt.*

Bevis. (findes i utallige lærebøger, f.eks. [4], s. 42) Lad $A \supseteq \cap_{n=1}^{\infty} G_n$ som ovenfor, med hvert G_n åben og tæt. Lad $x \in M$ og $\epsilon > 0$ være givet. Vi skal vise, at $K(x, \epsilon)$ ikke har tom fællesmængde med A.

Da G_1 er tæt findes et punkt $x_1 \in K(x, \epsilon) \cap G_1$, og da G_1 er åben findes $\epsilon_1 > 0$ så $K(x_1, \epsilon_1) \subseteq K(x, \epsilon) \cap G_1$. Vi kan antage, at $\epsilon_1 \leq \frac{1}{2}\epsilon$. Da G_2 er tæt og åben findes tilsvarende $x_2 \in M$ og $\epsilon_2 \leq \frac{1}{2}\epsilon_1$ således at $K(x_2, \epsilon_2) \subseteq K(x_1, \epsilon_1) \cap G_2$. Således fortsættes. Vi finder dermed en aftagende følge af kugler $K(x_1, \epsilon_1) \supseteq K(x_2, \epsilon_2) \supseteq \ldots$, således at $K(x_n, \epsilon_n) \subseteq G_n$ for hvert n. Idet $\epsilon_n \to 0$, er følgen af centre (x_n) en Cauchy følge. Dens grænsepunkt tilhører $K(x_n, \epsilon_n)$ for hvert n, og dermed også $\cap_{n=1}^{\infty} G_n$. Altså er $K(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. □

Vi kan nu vende tilbage til funktionerne. Den omtalte sætning af Banach lyder i al sin enkelthed:

Sætning *Mængden $\mathcal{S}$ af slemme funktioner er fed i $C[a; b]$.*

Vi viser faktisk lidt mere, nemlig at mængden $\mathcal{R}$ af „slem-fra-højre“ funktioner, dvs. funktioner der ikke er differentiable fra højre i noget punkt af $[a; b[$, er fed. Tilsvarende kan man vise, at mængden $\mathcal{L}$ af slem-fra-venstre funktioner er fed. Mængden $\mathcal{R} \cap \mathcal{L}$ af funktioner, som er slemme fra begge sider, er dermed også fed.

Bevis. ([2], side 68) Lad for hvert $M > 0$ og $\delta > 0$ mængden $G_{M,\delta} \subseteq C[a; b]$ bestå af de funktioner f, for hvilke der for hvert $x \in [a; b - \delta]$ findes et $h \in]0; \delta]$ således at $|f(x + h) - f(x)| > hM$.

Det er klart, at enhver kontinuert funktion, der er differentiabel fra højre i mindst et punkt $x \in [a; b[$, ikke tilhører $G_{M,\delta}$ for M tilstrækkelig stor og δ tilstrækkelig lille. Altså er

$$\cap_{n=1}^{\infty} G_{n,1/n} \subseteq \mathcal{R}.$$

Hvis vi kan vise, at $G_{M,\delta}$ er åben og tæt, er vi dermed færdige.

Vi viser, at $G_{M,\delta}$ er åben ved at vise at dens komplementærmængde er afsluttet. Lad $f_n \notin G_{M,\delta}$ og antag, at $f_n \to f \in C[a; b]$ uniformt. Påstanden er, at $f \notin G_{M,\delta}$.

For hvert n findes $x_n \in [a; b - \delta]$ således at $|f_n(x_n + h) - f_n(x_n)| \leq Mh$ for alle $0 < h \leq \delta$. På grund af kompakthed har følgen (x_n) et fortætningspunkt $x \in [a; b - \delta]$. Ved at udtage en delfølge, og derefter udtage den tilsvarende delfølge af (f_n), kan vi således antage, at $x_n \to x$. Påstanden er nu, at $|f(x+h) - f(x)| \leq Mh$ for alle $h \in]0, \delta]$.

Der gælder

$$\begin{aligned} &|f(x + h) - f(x)| \\ &\quad \leq |f(x + h) - f(x_n + h)| + |f(x_n + h) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|. \end{aligned}$$

Idet f er kontinuert i x og i $x + h$, vil det første og det sidste led gå mod 0 for $n \to \infty$. Endvidere kan midterledet vurderes således:

$$|f(x_n + h) - f(x_n)| \leq |f_n(x_h + h) - f_n(x_n)| + 2\|f - f_n\|_u$$

Da $|f_n(x_h + h) - f_n(x_n)| \leq Mh$ og $\|f - f_n\|_u \to 0$, fås $|f(x + h) - f(x)| \leq Mh$ som ønsket. Altså er $G_{M,\delta}$ åben.

Vi viser dernæst, at $G_{M,\delta}$ er tæt. Lad $f \in C[a;b]$ og $\epsilon > 0$. Vi skal vise, at der findes $g \in G_{M,\delta}$ med $\|f-g\|_u < \epsilon$. Af Weierstrass' approximationssætning følger, at vi kan antage f er differentiabel med kontinuert afledet (vi kunne endda antage den er et polynomium). Dermed er f' begrænset. Vælg en savtaksfunktion φ med tilstrækkelig lave men til gengæld meget stejle takker, således at $\|\varphi\|_u < \epsilon$ men $|\varphi'(x)| > M + \|f'\|_u$ for alle $x \in [a;b]$, bortset fra knækpunkterne. Sæt $g = f + \varphi$. Da er $\|f-g\|_u < \epsilon$.

Påstanden er, at $g \in G_{M,\delta}$. Lad $x \in [a;b[$. Hvis x ikke er et knækpunkt for φ, er g differentiabel i x med

$$|g'(x)| = |\varphi'(x) + f'(x)| \geq |\varphi'(x)| - \|f'\|_u > M.$$

Uanset om x er et knækpunkt eller ej, gælder ifølge middelværdisætningen at $(g(x+h) - g(x)) = g'(\xi)h$, hvor $\xi \in]x, x+h[$. Blot skal h være tilstrækkelig lille til at $]x, x+h[$ ingen knækpunkter indeholder. Altså er $|g(x+h) - g(x)| > Mh$ for h tilstrækkelig lille. Det viser det ønskede. $\square$

Bemærk, at vi med de to sidste sætninger har fået et nyt og tydeligvis mere besværligt bevis for Weierstrass' side 9-sætning. Ydermere er dette bevis ikke konstruktivt, idet det ikke anviser en eneste konkret slem funktion. Der findes mange andre beviser for eksistensen af slemme funktioner. F.eks. optræder de i teorien for Brownske bevægelser (en Brownsk bevægelse er med næsten sikkerhed slem!).

Jeg vil slutte med at nævne et resultat, der viser at også pæne funktioner kan være ret slemme, når man går dem efter i sømmene. En differentiabel funktion kan nemlig godt opføre sig lidt i stil med eksemplet $x \sin \frac{1}{x}$ som vi startede med. F.eks. er funktionen $x^2 \sin \frac{1}{x}$ differentiabel i 0, men den opfører sig alligevel ikke særlig pænt, eftersom den danser helt vildt i en omegn.

En kontinuert reel funktion f, defineret i en omegn af $x \in \mathbb{R}$, kaldes *oscillerende* i x, dersom den ikke er monoton i hverken $]x-\epsilon, x[$ eller $]x, x+\epsilon[$ for noget $\epsilon > 0$. F.eks. er $x \sin \frac{1}{x}$ og $x^2 \sin \frac{1}{x}$ oscillerende i 0.

Sætning *Der findes en differentiabel funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er oscillerende i ethvert punkt af $\mathbb{R}$.*

Lad f være sådan en funktion. Da f ikke er monoton i $]x-\epsilon, x[$, har den et lokalt ekstremum deri, for ethvert $\epsilon > 0$. Vi konkluderer, at mængden af punkter, hvori f har lokalt ekstremum, er tæt. Da f er differentiabel betyder det, at $f' = 0$ på en tæt mængde. Det virker faktisk temmelig modbydeligt.

Sætningen skyldes Köpcke, 1890 (se [3], side 412). Et smart bevis, som udnytter Baires sætning, findes i [7].

Litteraturliste

[1] *S. Banach,* Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen. Studia Math. 3 (1931), 174-180.

[2] *R.P. Boas,* A primer of real functions. 3rd ed. Mathematical Association of America, 1981.

[3] *E.W. Hobson,* The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series, Vol II. Cambridge 1926.

[4] *W. Rudin,* Functional analysis. McGraw-Hill 1973.

[5] *B.L. van der Waerden,* Ein einfaches Beispiel einer nicht-differentierbaren stetigen Funktion. Math. Z. 32 (1930), 474-475.

[6] *K. Weierstrass,* Mathematische Werke, II. Berlin 1895.

[7] *C.E. Weil,* On nowhere monotone functions. Proc. Amer. Math. Soc. 56 (1976), 388-389.


...."OG MAN RØRER TIL KONSISTENSEN ER SOM TYND PANDEKAGE-DEJG"
AHA! KOLMOGOROV'S KONSISTENSSÆTNING!
© PETER THEJLL 80


ER DER EN TEGNER BLANDT LÆSERNE?!!?