FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

14. årgang, nr. 1, oktober 2000

Famøs 14.1; maj 2000.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)

Deadline for næste nummer:
Fredag den 24. november 2000

Indlæg modtages gerne og kan sendes til famos@math.ku.dk (meget gerne skrevet i LaTeX), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

Famøs er et internt fagblad.

Fagbladet Famøs
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web-adresse:
http://www.math.ku.dk/famos/

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 700 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder

Sjældent har det været så sjovt at lave FAMØS som denne gang. Siden sidst er det strømmet ind med bidrag fra læserne, primært i form af løsninger til flertallet af de opgaver der gemte sig i artiklen „Uløste/uløselige opgaver“ i sidste nummer.

Et enkelt andet indlæg har dog også fundet vej til redaktionen, og vi har allerede lovning på indlæg til næste nummer, deriblandt en formentlig ganske interessant side 9-sætning.

Den absolut glædeligste nyhed er dog at finde på bagsiden af dette nummer, to initiativrige tredjeårsstuderende har påtaget sig opgaven med at køre studenterkollokvierne videre. En stor hyldest til Ruth og Lars!

Det er også rart at se, at vi igen i år har optaget en masse nye studerende med en stor interesse for matematik. Et stort velkommen med et håb om en god studietid på Institut for Matematiske Fag.

Der er faktisk kun en kedelig ting ved at lave dette nummer af FAMØS, og det er redaktionens størrelse. Jeg sidder her helt alene, og kan blot konstatere at ét andet redaktionsmedlem har meddelt at han blev forhindret, og at det tredje redaktionsmedlem bare ikke har reageret. Der er hårdt brug for flere redaktører, det eneste der kræves er at du kan afse tid fire dage om året til et klippe-klistre-møde. Du behøver ikke være god til LaTeX, vi kan sagtens lære dig det der skal til. Du skal ikke være bekymret for om du er god nok til matematik, det kan ikke undgås. Der er ingen der tvinger dig til at skrive mere end du har lyst til til bladet, der er stor nok interesse for at skrive i FAMØS. Bladet kan ikke køre videre på denne måde, så hvis der ikke snart melder sig nogle nye redaktører, må der findes en anden løsning.

Om den tidligste indiske matematik

Toke Lindegaard Knudsen

Studerende med interesse for matematikkens historie er naturligvis bekendte med den ældste babyloniske og græske matematik. Derimod er den ældste matematik fra Indien ikke nær så velkendt. Formålet med denne artikel er, at give en kort introduktion til den ældste indiske matematik. Dette er et vidtrækkende og spændende emne, og kendskab til det giver et bedre overblik over den matematik der fandtes i de forskellige kulturer i oldtiden.

Śulbasūtraerne

Den tidligste indiske matematiske viden er nedfældet i en række tekster kaldet Śulbasūtraerne. Af størst matematisk interesse er Baudhāyana-śulbasūtra, Āpastamba-śulbasūtra, Kātyāyana-śulbasūtra og Mānava-śulbasūtra, opkaldt efter de vismænd som ifølge traditionen nedskrev dem. Dateringen af disse tekster er kontroversiel, men den alment accepterede datering placerer den ældste af disse tekster (Baudhāyana-śulbasūtra) omkring 800 f.kr. og den yngste (Kātyāyana-śulbasūtra) omkring 200 f.kr. Meget af den viden som beskrives i teksterne er dog bevisligt ældre end selve teksterne.

Det er vigtigt at bemærke, at Śulbasūtraerne ikke er matematiske tekster som sådan. Śulbasūtraerne er appendikser til rituelle tekster, og de beskriver den praktiske viden der er nødvendig for at opmåle de rituelle arenaer og konstruere de nødvendige altre. Denne viden er primært af en geometrisk natur. Der findes nogle få beviser, men teksterne er stort set indskrænket til kun at beskrive de matematiske (primært geometriske) resultater som er nødvendige i en rituel sammenhæng.

Śulbasūtraernes betydning for forståelsen af matematikkens udvikling i oldtidens Indien blev først påpeget af A. C. Burnell. Pionerarbejdet blev gjort af G. Thibaut, som i 1870'erne udgav en artikel om teksternes matematiske indhold samt oversatte Baudhāyana-śulbasūtra fra sanskrit til engelsk.

Matematik i tidlige indiske ritualer

Blot fordi den tidligste indiske matematik kun findes overleveret indenfor en rituel kontekst, bør man ikke tro, at denne matematik er simpel. De pågældende ritualer er ganske komplicerede og deres udførelse krævede tilstedeværelsen af en lang række rituelle eksperter. En af disse eksperter stod for opmålingen af de rituelle arenaer og konstruktionen af de forskellige altre. Konstruktionen af nogle altre kræver et omfattende kendskab til matematik og geometri.

I Agnicayana ritualet konstrueres et alter, hvis areal er fastsat til $7\frac{1}{2}$ kvadrat puruṣa.[1] Alteret opbygges i fem lag hver bestående af 200 mursten. Formen af alteret blev varieret alt efter hvilken effekt, man ønskede, at ritualet skulle have. Ønskede man at sikre sig den himmelske verden, blev alteret konstrueret i form af en falk. Ønskede man ødelæggelse af sine fjender, blev alteret konstrueret i form af hjulet på en stridsvogn. Alt efter ens ønske for ritualets udfald foreskrives en række former som alteret kan konstrueres efter.

Skulle en mand ønske atter at udføre Agnicayana ritualet skal alterets areal gøres større: Ved anden udførsel skal alterets areal være $8\frac{1}{2}$ kvadrat puruṣa, ved tredje udførsel $9\frac{1}{2}$ kvadrat puruṣa, osv. op til et alter med arealet $101\frac{1}{2}$ kvadrat puruṣa, det største alter som var tilladt.[2]

Det fremgår, at ritualet kræver et indgående kendskab til ikke-triviel geometri, såsom at konstruere en figur som er ligedannet med en given figur og har samme areal som en anden given figur. I Śulbasūtraerne finder vi den Pythagoræiske læresætning formuleret i fuld generalitet. Vi finder cirklens kvadratur og kvadratets cirkulatur behandlet.[3] Vi finder også en interessant approksimation af $\sqrt{2}$, dvs. længden af diagonalen i et kvadrat med sidelængde 1, nemlig

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34} = \frac{577}{408},$$

som stemmer overens med den eksakte værdi til 5 decimaler.

Det var endvidere ikke kun opmålingen af formen, et bestemt alter skulle have, der gav anledning til matematiske problemstillinger—også alterets opbygning med et bestemt antal mursten i flere lag var ikke altid trivielt.

Hjælpemidler til konstruktionernes praktiske udførsel

Da Śulbasūtraerne er skrevet med et praktisk formål for øje, er de geometriske metoder de indeholder beskrevet som de skulle udføres i praksis, inklusive hvilke hjælpemidler der skulle anvendes. Dette adskiller disse tekster fra f.eks. Euklids Elementer, hvor vi ikke finder ord som „lineal“ eller „passer“ nævnt.

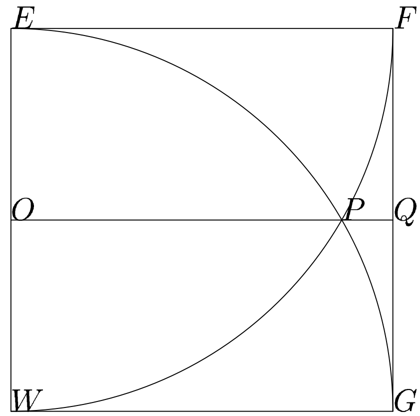
Til de praktiske geometriske konstruktioner anvendte de tidlige indere bambusstokke, snore og pløkker. Pløkkerne var stykker af træ som kunne slås fast i jorden. Snorene var forsynet med en løkke i hver ende. Disse løkker kunne fastgøres til pløkker og snoren kunne da udnyttes til at frembringe en ret vinkel (dette vil blive mere klart nedenfor). Bambusstokken anvendtes til længdemål men kunne også fungere som en slags passer, ved at man lavede et hul i stokken som blev fæstnet til en pløk og derefter drejet for at beskrive en cirkel (vi skal se et eksempel på dette nedenfor).

Af disse metoder er brugen af en bambusstok den ældste. Senere blev det mere almindeligt at anvende en snor, da en sådan er lettere at arbejde med end en bambusstok. I Śulbasūtraerne beskrives primært metoder der anvender snore, men nogle få metoder der involverer bambusstokke er også inkluderet i dem.

[1] En puruṣa er et længdemål som repræsenterer højden af en mand med oprejste arme. Der gælder, at 1 puruṣa er ca. 228.6 cm.

[2] Alterets areal svarer til ca. 530 kvadrat meter! Det er tvivlsomt, om et alter af denne størrelse nogensinde blev konstrueret.

[3] Det er i sagens natur klart, at de metoder som de tidlige indere angiver i denne forbindelse er approksimative.



Figur 1: Konstruktion af et kvadrat ved hjælp af en bambusstok

For at give et indblik i den matematik som Śulbasūtraerne indeholder, vil jeg her præsentere nogle af de metoder hvormed de tidlige indiske ritualister udførte en konstruktion, som er væsentlig for deres geometri, nemlig konstruktionen af et kvadrat med given sidelængde. De tre metoder nedenfor er ikke de eneste metoder for konstruktion af et kvadrat, som findes i Śulbasūtraerne, men de giver et godt indblik i den konstruktive geometri, som findes i disse tekster.

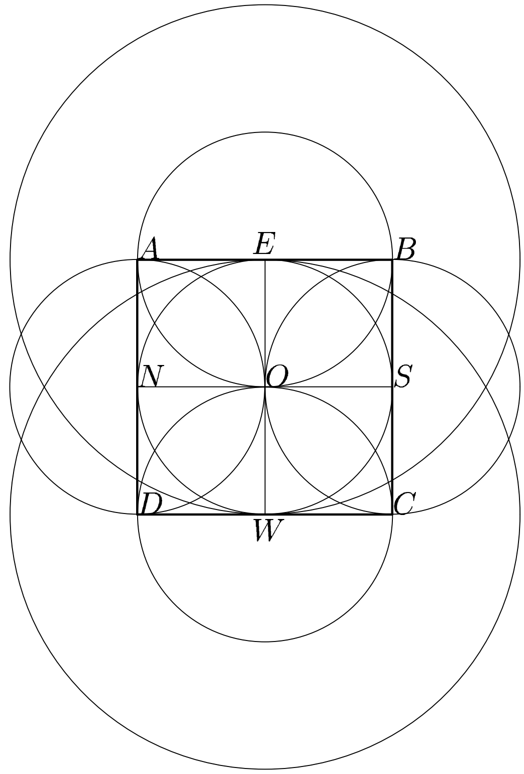
Konstruktion af et kvadrat ved hjælp af en bambusstok

I Āpastamba-śulbasūtra angives en metode for konstruktion af et kvadrat ved brug af en bambusstok.

Lad os antage, at vi ønsker at konstruere et kvadrat med sidelængde s. Til konstruktionen anvendes en bambusstok af længde s forsynet med tre huller, et i hver ende af stokken samt et på dens midte. På jorden afmåles en ret linje af længde s (for eksempel ved at bruge bambusstokken). Dette er linjestykket EW på figur 1. Midtpunktet O af dette linjestykke afmærkes, og en pløk placeres i hver af de tre punkter E, W og O. Bambusstokkens ene ende fastgøres nu til pløkken i punktet E, og ved at dreje stokken omkring dette punkt beskriver stokkens anden ende en cirkelbue med radius s. Ganske tilsvarende beskrives en cirkelbue med radius s og centrum i punktet W. De to cirkelbuer skærer hinanden i punktet P. Den ene ende af bambusstokken fastgøres nu til punktet O og placeres så den rører punktet P. Den frie ende af stokken bestemmer nu et punkt Q. Det er klart, at Q netop er midtpunktet for den side i det ønskede kvadrat der ligger overfor siden EW. Endelig placeres en pløk i punktet Q, og midtpunktet af bambusstokken fastgøres i dette punkt. Ved at dreje bambusstokken til dens to ender præcis berører de to cirkelbuer (bambusstokken vil her være tangent til begge cirkler) bestemmes to punkter F og G. Det er klart, at disse to punkter netop er de to manglende hjørner i det ønskede kvadrat. Vi har således konstrueret et kvadrat, nemlig $EWGF$, med sidelængde s.

Konstruktion af et kvadrat ved hjælp af et reb

I Baudhāyana-śulbasūtra findes en metode for konstruktion af et kvadrat ved brug af en snor. Konstruktionen, som giver anledning til et smukt geometrisk mønster, er



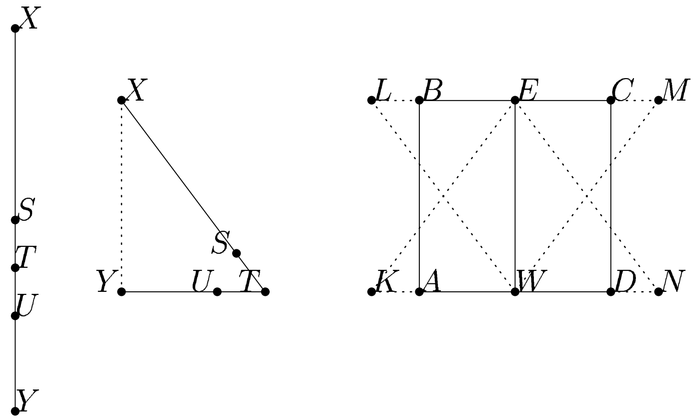
Figur 2: Konstruktion af et kvadrat ved hjælp af et reb

illustreret på figur 2.

Lad os antage, at vi ønsker at konstruere et kvadrat med sidelængde s. Til konstruktionen anvendes en snor af længde s forsynet med en løkke i hver ende. Først opmåles en ret linje af længde s. Denne linjes endepunkter og midpunkt er henholdsvis E, W og O. Der placeres en pløk i hver af disse tre punkter. Begge ender af snoren fastgøres til pløkken i punktet O. Ved at trække i snorens midtpunkt og dreje dette omkring O, beskrives en cirkel med centrum i O og radius $\frac{s}{2}$. Nu fastgøres den ene ende af snoren til pløkken i punktet E og med den anden ende af snoren beskrives en cirkel med centrum i E og radius s. Helt tilsvarende beskrives en cirkel med centrum i W og radius s. De to skæringspunkter for cirklerne og punktet O ligger på den samme rette linje. Denne linje skærer den første cirkel i punkterne N og S, og en pløk placeres i hver af disse punkter. Det er klart, at linjestykket NS er vinkelret på linjestykket EW. Endelig fastgøres begge ender af snoren på skift til hver af pløkkerne i punkterne E, W, N og S og fire cirkler hver med radius $\frac{s}{2}$ og centre i disse fire punkter beskrives. Disse fire cirkler vil skære hinanden parvis i punkterne A, B, C og D. Det er klart, at $ABCD$ er det ønskede kvadrat med sidelængde s.

Endnu en konstruktion der anvender en snor

Śulbasūtraerne indeholder også nogle metoder til konstruktion af et kvadrat der benytter den Pythagoræiske læresætning (eller rettere dens omvendte sætning). Nedenstående metode bruger den Pythagoræiske tripel $(3, 4, 5)$. En tilsvarende metode



Figur 3: Endnu en konstruktion der anvender en snor

der anvender den Pythagoræiske tripel $(5, 12, 13)$ findes også i Śulbasūtraerne.

Vi ønsker atter, at konstruere et kvadrat med sidelængde s. Hertil benyttes en snor af længde $2s$. Denne er vist til venstre på figur 3, hvor X og Y er snorens to endepunkter, S er midtpunktet mellem X og Y, U midtpunktet mellem S og Y og endelig T midtpunktet mellem S og U. En ret linje af længde s afmåles, og en pløk placeres ved hvert af linjens endepunkter. Snorens ender fastgøres nu til disse to pløkker og snoren strækkes i punktet T til den er stram som vist i midten af figuren. Herved opstår en retvinklet trekant XYT. At dette virkelig er en retvinklet trekant ses af, at $|TX| = s + \frac{1}{4}s = \frac{5}{4}s$ og $|TY| = \frac{3}{4}s$ og dermed

$$|TX|^2 - |TY|^2 = \left(\frac{5}{4}s\right)^2 - \left(\frac{3}{4}s\right)^2 = s^2 = |XY|^2.$$

Konstruktionen af det ønskede kvadrat er nu simpel. Vi strækker snoren til hver side i punktet T, og dernæst lader vi de to løkker bytte plads på pløkkerne og gentager proceduren. Punktet U på snoren vil hermed bestemme fire punkter A, B, C og D som vist til højre på figuren. Det er klart, at $ABCD$ er et kvadrat med sidelængde s.

Litteraturliste

- Datta, B. (1932), *The Science of the Sulba: A Study in Early Hindu Geometry.* Calcutta: Calcutta University Press. (Genoptrykt i 1991.)
- Sen, S. N. & Bag, A. K. (1983), *The Śulbasūtras of Baudhāyana, Āpastamba, Kātyāyana and Mānava with Text, English Translation and Commentary.* New Delhi: Indian National Science Academy.
- Thibaut, G. (1875), *On the Śulvasútras.* Journal of the Asiatic Society of Bengal, Vol. 44, pp. 227–275.

Unit Link livsforsikring

Thomas Møller, Forsikringsmatematisk Laboratorium

Indledning

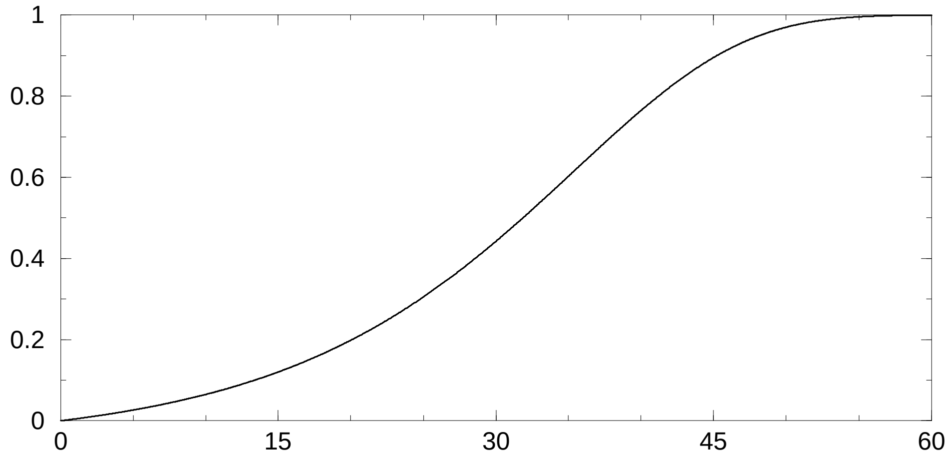
Forsikring handler om overførsel af risiko mellem to eller flere parter. Vi fokuserer på et forsikringsselskab som står overfor en portefølje af livsforsikringskontrakter. Disse kontrakter indeholder flere typer af risiko: Usystematisk risiko, eller risiko med hensyn til dødelighed, der kan elimineres ved at tegne flere forsikringer, og systematisk risiko, der er af en hel anden natur og som ikke kan elimineres ved blot at øge antallet af forsikringer. Kontrakterne er konstrueret på en sådan måde at forsikringsselskabet forpligter sig til at give køberen (forsikringstageren) et beløb på et givent fremtidigt tidspunkt givet at bestemte forsikringsbegivenheder er indtruffet. Der kunne for eksempel være tale om overlevelse til pensionsalder eller et dødsfald. Ved aftalens indgåelse betaler forsikringstageren en præmie. Vi tager udgangspunkt i forsikringsselskabets relative tab pr. forsikringstager, og ud fra betragtninger af tabets egenskaber, når antallet af forsikringstagere vokser, udledes det såkaldte (traditionelle) ækvivalensprincip. Denne fremgangsmåde, som stammer fra den traditionelle livsforsikringsteori, er imidlertid utilstrækkelig når man betragter såkaldte Unit Link livsforsikringskontrakter, hvor forsikringsydelsen er knyttet direkte til bestemte værdipapirer eller puljer. Her bliver det nødvendigt at tage nye redskaber i brug, som hører til grænseområdet mellem forsikring og finansiering; sidstnævnte var emnet for side 9-sætningen i december-1999-udgaven af FAMØS.

Stokastisk basis

Alle størrelser tænkes defineret på et måleligt rum $(\Omega, \mathcal{F})$ udstyret med et *sandsynlighedsmål* P, dvs. $P(\Omega) = 1$. Vi fikserer en endelig tidshorisont T og antager at $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ er udstyret med en voksende følge af σ-algebraer $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, for $0 \leq s < t \leq T$, kaldet en *filtrering* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Det antages at $\mathbb{F}$ er højrekontinuert, at $\mathcal{F}_0$ (og $\mathcal{F}$) indeholder alle P-nulmængder, samt at $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. En *stokastisk variabel* er en Borel-målelig afbildning $\omega \mapsto X(\omega)$. Husk at to stokastiske variable X_1 og X_2 siges at være *uafhængige*, hvis $P(\{X_1 \in B_1\} \cap \{X_2 \in B_2\}) = P(\{X_1 \in B_1\} P(\{X_2 \in B_2\})$ for alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Dødelighed og restlevetider

Vi betragter n personer som skal forsikres. Lad τ_i betegne restlevetiden for det i'te individ. Hændelsen $\{\tau_i \leq t\}$ svarer til at den i'te person er død inden tid t. Det antages at $\{\tau_i \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, hvilket betyder at det er kendt på tid t hvorvidt den i'te person er i live eller ej. Funktionen $t \mapsto P(\{\tau_i \leq t\}) = F(t)$ kaldes fordelingsfunktionen for den i'te persons restlevetid. Vi antager her at F er absolut kontinuert og lader f betegne dens tæthed med hensyn til Lebesgue målet på $[0, \infty)$. Funktionen F vil typisk se ud som i Figur 1 nedenfor. Vi har her anvendt den fordelingsfunktion



Figur 1: *Fordelingsfunktion for restlevetiden for en 45 årig.*

som anvendes af danske forsikringsselskaber, når de skal prisfastsætte livsforsikringer. Disse findes i det såkaldte G82-grundlag. Vi antager at $\tau_1, \ldots, \tau_n$ er uafhængige og at de har samme fordeling (forkortes i.i.d.).

Forrentning og diskontering

Vi antager indledningsvist at vores forsikringsselskab investerer kapital på en konto, hvor 1 kr. investeret på tid s bliver til $B_{s,t}$ på tid t. Vi sætter $B_t = B_{0,t}$. Man kan for eksempel lade B_t repræsentere udviklingen af en bankkonto ved at lade $B_t = \exp(\int_0^t \delta(u)du)$, hvor $\delta(u)$ betegner *renteintensiteten* på tid u. Hvis yderligere δ er konstant, så bliver $B_t = (1+i)^t$, med $i = e^\delta - 1$, hvilket for t heltallig blot svarer til 1 kr. akkumuleret med renters rente (årlig rentefod i).

Nogle simple kontrakter og deres kontantværdier

Vi er interesserede i at beskrive de betalinger som er omfattet af en livsforsikringskontrakt. I praksis findes der en lang række kontrakter. De væsentligste byggesten er dog den såkaldte *rene oplevelsesforsikring* og *dødsfaldsforsikringen*, idet det fra disse grundliggende kontrakter er muligt at konstruere en lang række andre vigtige livsforsikringskontrakter. Med en oplevelsesforsikring modtager forskringstageren en ydelse Y_T på tid T, hvis han eller hun fortsat er i live på dette tidspunkt. *Kontantværdien på tid* 0 af denne ydelse defineres som den tilbagediskonterede betaling:

$$H_i^{(1)} = 1_{\{\tau_i > T\}} \, Y_T \, B_T^{-1}.$$

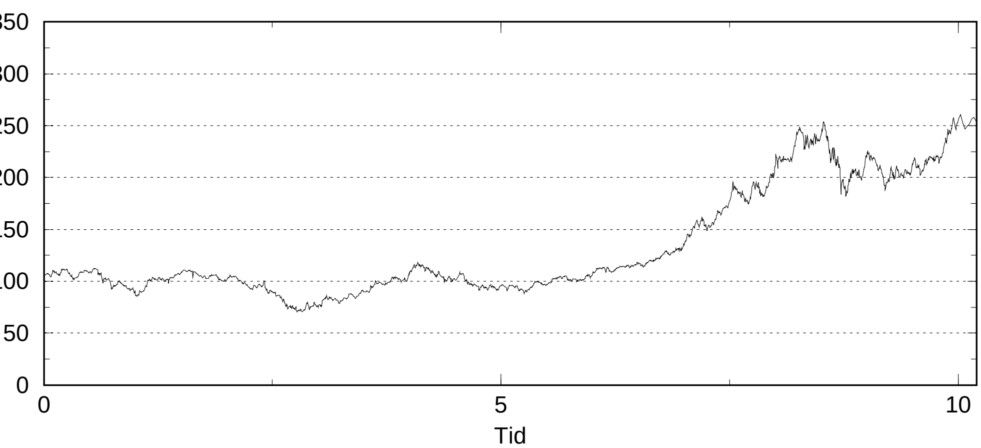
Her er $1_{\{\tau_i > T\}}$ netop 1, hvis den i'te forsikringstager fortsat er i live på tid T og 0 ellers. Dvs. hvis man på tid 0 investerede $H_i^{(1)}$ på kontoen B, da ville dette udvikle sig til netop $1_{\{\tau_i > T\}} Y_T$ på tid T. Her kræves dog en smule forsigtighed, idet $H_i^{(1)}$ jo er en stokastisk variabel, hvis udfald ikke vil være kendt på tid 0. Med dødfalsforsikringen udbetaler forsikringsselskabet et beløb Y_t på tid t hvis forsikringstageren dør på tid $t \leq T$. Her er tidspunktet τ_i for betalingen altså også ukendt. Kontantværdien af denne ydelse for den i'te forsikringstager bliver

$$H_i^{(2)} = 1_{\{\tau_i \leq T\}} \, Y_{\tau_i} \, B_{\tau_i}^{-1}.$$

Vi har ikke diskuteret hvad Y_t skal være. Det enkleste er at tænke på Y_t som et fast beløb som bliver aftalt mellem forsikringstageren og forsikringsselskabet ved indgåelsen af forsikringskontrakten, fx. 100.000 kr. Vi skal referere til denne situation som "traditionel livsforsikring". Som vi skal se nedenfor opstår der imidlertid nye interessante problemer hvis man tillader Y_t at afhænge af eksempelvis udviklingen i værdien af nogle værdipapirer. Dette fører til såkaldte Unit Link forsikringskontrakter, som i disse år er ved at blive introduceret på det danske marked. I mange lande udgør Unit Link produkter en relativ stor del af nysalget af pensionsopsparinger, og mange forventer at dette også vil være tilfældet i Danmark i løbet af et par år.

Unit Link livsforsikring

Så hvad er en Unit Link forsikring egentlig? En Unit Link livsforsikringskontrakt adskiller sig fra en traditionel livsforsikringskontrakt ved at det beløb, der udbetales ved indtræffelse af en bestemt begivenhed (død eller pension), er knyttet direkte til udviklingen af (en enhed eller *unit* af) nogle bestemte værdipapirer, for eksempel obligationer, aktier eller aktieindekser. Man kan også forestille sig at ydelsen knyttes til en pulje, dvs. en portefølje af aktier hvis sammensætning ikke nødvendigvis er givet på forhånd eller bestemt ud fra nogle på forhånd fuldstændigt fastsatte kriterier, men som kan ændre sig løbende. Lad nu S_t betegne værdien på tid t af en enhed af et aktieindeks. Et eksempel på hvad man måske kunne forvente sig ses i Figur 2 nedenfor, der viser hvorledes det danske aktieindeks, KFX-indekset, har udviklet sig i løbet af en 10 års periode fra 1990 til 2000.



Figur 2: *Udviklingen i det danske KFX-indeks i perioden 1/1-1990 til 1/4-2000.*

Her er et par simple eksempler på Unit Link kontrakter:

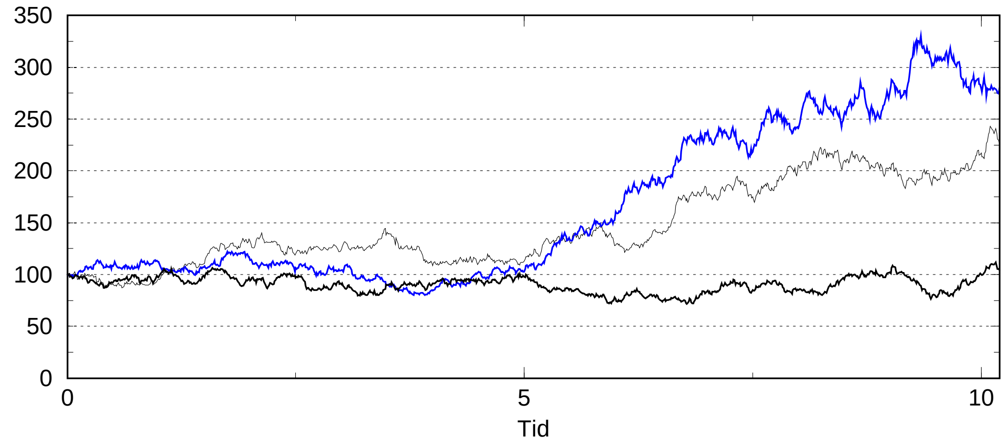
$$\begin{aligned} Y_T &= S_T, & (1)\\ Y_T &= \max(S_T, K) = (S_T - K)^+ + K, & (2)\\ Y_T &= K \prod_{t=1}^{T} \max\left(1 + \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}, 1 + \delta_t\right). & (3) \end{aligned}$$

Den simpleste Unit Link livsforsikring (1) kaldes også for en ren Unit Link forsikring. Her er ydelsen på tid T netop lig med værdien S_T af aktieindekset på tid T. I modsætning til en traditionel livsforsikringskontrakt er ydelsen altså her direkte knyttet til (udviklingen i) det valgte aktieindeks. Denne konstruktion kombinerer således elementer af livsforsikring (eller pensionsopsparing) med investering i aktier. Et sådant behov eller ønske kan tænkes at opstå blandt pensionsopsparerne i perioder, hvor aktiemarkederne udvikler sig særligt gunstigt. En risiko for forsikringstageren ved at vælge denne type kontrakt er imidlertid, at han eller hun ikke er garanteret noget mindstebeløb ved overlevelse til tid T. Man kan således ovenpå denne turbulente sommer på aktiemarkederne udmærket forestille sig den situation, hvor for eksempel KFX-indekset kan tabe en ikke ubetydelig del af sin værdi i løbet af en kortere periode. Denne periode kunne uheldigvis være sammenfaldende med tidspunktet, hvor forsikringstageren skulle have sin ydelse udbetalt. Fra forsikringstagerens synspunkt kunne det derfor være ønskværdigt med en form for garanti udstedt af forsikringsselskabet, som sikrer at ydelsen ikke falder under et givet beløb K. Dette er netop tilfældet i (2), som også kaldes Unit Link med slut-garanti. Denne ide kan udvides til at omfatte årlige garantier, hvilket er tilfældet i (3). Her er $\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$ den relative ændring i indekset i perioden $(t-1, t]$ og δ_t er det garanterede relative afkast i år t. Set på tid 0 er den garanterede ydelse under (3) givet ved $K \prod_{t=1}^{T}(1 + \delta_t)$.

Ligesom vi ikke kan afgøre på tid 0 præcis hvor længe forsikringstagerne med restlevetider $\tau_1, \ldots, \tau_n$ vil leve, så kender vi naturligvis heller ikke den fremtidige udvikling af aktieindekset. Dvs. på tid 0 ved vi ikke hvad S_t vil være for $t > 0$. I vores analyse vælger vi derfor at beskrive S_t som en stokastisk variabel for hvert t; man kalder familien $S = (S_t)_{t \in [0,T]}$ for en stokastisk proces. I litteraturen antages ofte at S kan beskrives ved en såkaldt geometrisk Brownsk bevægelse, dvs. at

$$S_t = S_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right), \tag{4}$$

hvor $(W_t - W_s)$ er uafhængig af $\mathcal{F}_s$ for vilkårligt $s < t$ og normalfordelt med middelværdi 0 og varians $t - s$. En delvis forklaring på den mærkelige parametrisering i (4) med $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ får man, når man beregner $\mathrm{E}[S_t]$. Udnyttes at $W_t \sim \mathrm{Normal}(0, t)$, fås nemlig at $\mathrm{E}[S_t] = S_0 \exp(\mu t)$. I Figur 3 kan man se et par mulige scenarier med denne model. Hvis man sammenligner disse med Figur 2, så ser det måske ikke umiddelbart ud som om, at der er væsentlige forskelle mellem disse figurer. En nærmere statistisk undersøgelse viser imidlertid, at den geometriske Brownske bevægelse kun kan opfattes som en approksimation, idet den ikke giver en helt præcis beskrivelse af virkeligheden; dette ligger dog uden for rammerne for denne artikel.



Figur 3: *Nogle mulige realisationer med en geometrisk Brownsk bevægelse.*

Forsikringsselskabets tab

Vi antager for enkelthedens skyld, at hver forsikringstager betaler præmie $\kappa^{(1)}$ for oplevelsesforsikringen eller $\kappa^{(2)}$ for dødsfaldsforsikringen ved aftalens indgåelse (på tid 0). Vi kan nu tale om kontantværdien på tid 0 af forsikringsselskabets tab knyttet til henholdsvis den rene oplevelsesforsikring og dødsfalsforsikringen. For oplevelsesforsikringen får vi for den i'te forsikringstager et tab med kontantværdi på tid 0 givet ved $L_i^{(1)} = H_i^{(1)} - \kappa^{(1)}$, hvilket for den samlede portefølje bestående af personerne med restlevetider $\tau_1, \ldots, \tau_n$ giver kontantværdien

$$L^{(1)}(n) = \sum_{i=1}^{n} L_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{\tau_i > T\}} Y_T\, B_T^{-1} - n\kappa^{(1)}. \tag{5}$$

For dødsfaldsforsikringen får vi på porteføljeniveau tabet

$$L^{(2)}(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(1_{\{\tau_i \leq T\}} Y_{\tau_i}\, B_{\tau_i}^{-1}\right) - n\kappa^{(2)}. \tag{6}$$

Specielt skal vi interessere os lidt for $\frac{1}{n}L^{(\cdot)}(n)$, som kan fortolkes som det gennemsnitlige tab pr. forsikringstager ved de to forskellige kontrakter, og undersøge deres egenskaber når n vokser. Fra statistikundervisningen kendes Store tals lov, som siger at for en følge af passende integrable i.i.d. stokastiske variable $X_1, \ldots, X_n$ gælder at gennemsnittet $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ konvergerer mod middelværdien $\mathrm{E}[X_1]$ på passende vis. Vi kan anvende dette resultat på vores levetider $\tau_1, \ldots, \tau_n$ eller mere præcist på de stokastiske variable $1_{\{\tau_i > T\}}$ og opnå at

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{\tau_i > T\}} \to \mathrm{E}[1_{\{\tau_1 > T\}}] = P(\{\tau_1 > T\}),$$

for $n \to \infty$. Altså får vi for $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}L^{(1)}(n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{\tau_i > T\}}\right) Y_T\, B_T^{-1} - \kappa^{(1)} \to P(\{\tau_1 > T\}) Y_T\, B_T^{-1} - \kappa^{(1)}. \tag{7}$$

Tilsvarende kan det vises for dødsfaldsforsikringen at

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1_{\{\tau_i\leq T\}}Y_{\tau_i}\,B_{\tau_i}^{-1}\right) \to \int_0^T Y_t\,B_t^{-1}dF(t) = \int_0^T Y_t\,B_t^{-1}f(t)\,dt,$$

for $n \to \infty$, hvor vi har udnyttet, at F er absolut kontinuert med tæthed f. Dermed fås

$$\frac{1}{n}L^{(2)}(n) \to \int_0^T Y_t\,B_t^{-1}f(t)\,dt - \kappa^{(2)}. \tag{8}$$

Resultaterne (7) og (8) kan fortolkes på følgende måde: Ved at øge antallet af forsikringstagere n elimineres usikkerheden med hensyn til forsikringstagernes dødelighed i den forstand, at når n vokser, da vil forholdet mellem det faktiske antal dødsfald og n nærme sig sandsynligheden for et dødsfald. Derimod bemærkes at vi ikke er kommet af med faktoren $Y_tB_t^{-1}$. For en Unit Link forsikring kan vi fortolke dette ved at sige, at vi ikke er kommet af med den usikkerhed som knytter sig til aktieindeksets fremtidige udvikling ved at øge antallet af forsikringstagere, hvilket jo er ganske naturligt. Men hvad kan man så gøre med denne størrelse? Man kunne måske indvende at det da burde være muligt på tilsvarende vis (ved anvendelse af Store tals lov) at eliminere denne finansielle risiko ved at betragte et voksende antal kontrakter knyttet til forskellige, uafhængige aktier. Dette er imidlertid umuligt, idet kontrakterne typisk er knyttet til et relativt lille antal aktier, som ydermere ikke er stokastisk uafhængige.

Det skal bemærkes, at antallet af forsikringstagere i en given portefølje naturligvis vil være endeligt og at man derfor i praksis ikke kan eliminere dødsusikkerheden fuldstændigt. Forsikringsselskaberne løser typisk dette problem ved at beregne præmier under såkaldt "forsigtige antagelser" om dødeligheden. For oplevelsesforsikringen betyder dette at man vælger at regne med en lidt større sandsynlighed for overlevelse, og for dødsfaldsforsikringen med en lidt større sandsynlighed for dødsfald. De klassiske livsforsikringskontrakter er da skruet således sammen at forsikringsselskabet løbende tilbagefører det overskud, som opstår som følge af denne forskel i form af bonus.

Forventede kontantværdier og ækvivalensprincippet

Vi kan nu beskrive det traditionelle ækvivalensprincip, som er baseret på ideen om at præmier og ydelser skal vælges således at den forventede kontantværdi af forsikringsselskabets tab pr. forsikringstager er lig med 0. Under antagelsen om at levetiderne $\tau_1,\ldots,\tau_n$ er uafhængige af (B,Y) giver ækvivalensprincippet for den rene oplevelsesforsikring

$$\kappa^{(1)} = \mathrm{E}[H_i^{(1)}] = P(\{\tau_1 > T\})\mathrm{E}[B_T^{-1}Y_T]. \tag{9}$$

Præmien har en meget naturlig form: Den beregnes som sandsynligheden for at forsikringstageren overlever til tid T multipliceret med middelværdien af den tilbagediskonterede betaling Y_T. Lad os se lidt på konsekvenserne af at anvende dette princip. Det følger umiddelbart ved at indsætte (9) i (7) at kontantværdien af det relative tab $L^{(1)}(n)/n$ konvergerer imod

$$P(\{\tau_1 > T\}) \left(Y_T \, B_T^{-1} - \mathrm{E}[B_T^{-1} Y_T]\right), \tag{10}$$

dvs. det relative tab er i grænsen proportionalt med forskellen mellem $Y_T \, B_T^{-1}$ og den forventede værdi heraf. Hvornår er dette forventede tab lig med 0 P-n.s.? Tabet er 0 netop hvis $Y_T B_T^{-1} = \mathrm{E}[Y_T B_T^{-1}]$ P-n.s., hvilket er tilfældet netop hvis $Y_T B_T^{-1}$ er konstant P-n.s. I den klassiske forsikringsmatematik arbejdede man typisk med Y_T konstant og valgte endvidere at lade B være givet på formen $B_t = \exp(\delta t)$. I dette tilfælde er (10) altså netop lig med 0. På denne måde kan præmien (9) siges at være fair. (Det er ikke svært at indse at, for vilkårlig $\varepsilon > 0$, vil en mindre præmie $\kappa^{(1)} - \varepsilon$ bevirke at $L_n^{(1)} \to \infty$, når $n \to \infty$, hvorimod en større præmie $\kappa^{(1)} + \varepsilon$ medfører at $L_n^{(1)} \to -\infty$ (uendelig stor gevinst).) For Unit Link kontrakterne (1)–(3) kender vi derimod ikke Y_T på forhånd, og (10) er derfor en stokastisk variabel hvis udfald først vil være kendt på tid T. Store tals lov er altså ikke tilstrækkelig til fastlæggelse af en fornuftig præmie i denne situation.

Betragt nu den rene oplevelsesforsikring med ydelsen (1). Anvender vi den ovenfor foreslåede geometriske Brownske bevægelse til at beskrive udviklingen for værdien af aktien S, da er der positiv sandsynlighed for at S_T antager værdi i et vilkårligt interval (s_0, s_1), $0 < s_0 < s_1 \leq \infty$, og dermed kan (10) antage en vilkårlig værdi mellem $-\mathrm{E}[Y_T B_T^{-1}]$ og $+\infty$. Resultatet (10) bevirker faktisk at uanset hvilken præmie vi vælger, da vil forsikringsselskabet nogle gange lide et meget stort tab og andre gange score en meget stor gevinst, afhængigt af udviklingen på de finansielle markeder. Med andre ord: den finansielle risiko er ikke blevet elimineret.

Prisfastsættelse af en ren Unit Link kontrakt

Som vi så ovenfor, så er det foreslåede modelapparat utilstrækkeligt til håndtering af den finansielle risiko i Unit Link livsforsikringskontrakter. Lad os derfor forlade ideen om at vælge præmien $\kappa^{(1)}$ på formen (9) som den forventede kontantværdi af de fremtidige ydelser. For at forsøge at eliminere den finansielle risiko inddrager vi nu muligheden for at *investere i det underliggende aktiv*, hvilket i dette tilfælde er aktieindekset med prisproces S. Ovenfor har vi således arbejdet under antagelsen om at forsikringsselskabet investerede præmierne på kontoen med prisproces B. Et oplagt alternativ er naturligvis at antage at forsikringsselskabet i stedet investerer (en del af) præmien i aktien S. I specialtilfældet med en ren Unit Link forsikring, hvor hele præmien κ investeres på tid 0 i aktien S svarende til $\frac{1}{S_0}$ enheder af aktien, får vi et noget andet svar. For enkelthedens skyld betragter vi kun den rene oplevelsesforsikring; tilsvarende regninger kan udføres for dødsfaldsforsikringen. Kontantværdien på tid 0 af forsikringsselskabets tab bliver i dette specialtilfælde:

$$\tilde{L}(n) = \left(\sum_{i=1}^{n} 1_{\{\tau_i > T\}} Y_T - n\kappa \frac{1}{S_0} \cdot S_T \right) B_T^{-1},$$

hvilket viser at

$$\frac{1}{n}\tilde{L}(n) \to S_T B_T^{-1}\left(P(\{\tau_1 > T\}) - \frac{\kappa}{S_0}\right), \tag{11}$$

for $n \to \infty$. I denne situation er tabet altså proportionalt med S_T, og hvis vi sætter

$$\kappa = S_0\, P(\{\tau_1 > T\}), \tag{12}$$

så ses netop at $\tilde{L}_n/n$ konvergerer mod 0, ligesom det var tilfældet i den klassiske situation, hvor Y_T og B_T var deterministiske. Præmien (12) har en ganske naturlig form: Den er beregnet som prisen for en aktie S_0 ganget med sandsynligheden for at forsikringstageren overlever til tid T. I en portefølje med n forsikringstagere skal selskabet således købe et antal aktier svarende til $nP(\{\tau_1 > T\})$, hvilket netop er det forventede antal overlevende. Argumentet som førte til (12) bestemmer ikke kun en fair præmie, men også en *investeringsstrategi*: Selskabet skulle investere hele præmien i aktien S.

Hvis vi derimod lader Y_T være givet på formen (2) eller (3) ser vi til vores store skuffelse at vi igen befinder os i situationen, hvor vi ikke rigtigt kan sige noget entydigt om hvordan κ skal fastsættes ud fra betragtninger af forsikringsselskabets tab pr. forsikringstager i en stor portefølje.

Nogle resultater fra finansieringsteorien

Antag nu at forsikringsselskabet både kan investere i aktien med prisproces S givet ved (4) og i bankkontoen med prisproces $B_t = \exp(\delta t)$ samt at selskabet løbende kan justere sine investeringer. Man kan for eksempel tænke sig tidsintervallet $[0, T]$ inddelt på følgende måde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$. På tid $t_0 = 0$ køber selskabet ξ_0 aktier og deponerer η_0 på bankkontoen. Værdien af denne portefølje er $V_0 = \xi_0 S_0 + \eta_0 B_0$, idet $B_0 = 1$. På tid t_1 har værdien af aktierne ændret sig til $\xi_0 S_{t_1}$ og det på bankkontoen deponerede beløb er blevet til $\eta_0 B_{t_1}$. Altså har selskabet tjent

$$\xi_0(S_{t_1} - S_{t_0}) + \eta_0(B_{t_1} - B_{t_0}). \tag{13}$$

Vi kan nu vælge at flytte nogle penge fra bankkontoen til aktier eller omvendt. Lad det nye antal aktier være givet ved ξ_{t_1} og det nye beløb deponeret på bankkontoen $\eta_{t_1} B_{t_1}$. Vi kræver at

$$\xi_0 S_{t_1} + \eta_0 B_{t_1} = \xi_{t_1} S_{t_1} + \eta_{t_1} B_{t_1},$$

dvs. værdien på tid t_1 af den nye portefølge (ξ_{t_1}, η_{t_1}) svarer præcis til summen af det oprindeligt investerede beløb og gevinsten (13). Hvis vi gentager dette, får vi

$$V_{t_k}(\xi, \eta) = V_0 + \sum_{j=1}^{k} \left(\xi_{j-1}\Delta S_j + \eta_{j-1}\Delta B_j\right), \tag{14}$$

hvor $\Delta S_j = S_j - S_{j-1}$ og $\Delta B_j = B_j - B_{j-1}$. Man kalder $(\xi, \eta) = (\xi_{t_0}, \eta_{t_0}, \ldots, \xi_{t_N}, \eta_{t_N})$ for en investeringsstrategi. Strategier (ξ, η) hvor værdien på ethvert tidspunkt er på formen (14) siges at være *selvfinansierende*. Den tilsvarende version i *kontinuert tid* er

$$V_t(\xi,\eta) = V_0 + \int_0^t \xi_u\, dS_u + \int_0^t \eta_u\, dB_u. \tag{15}$$

Her betegner ξ_t antal aktier som selskabet ejer på tid t og $\eta_t B_t$ er beløbet som selskabet har stående i banken. Det tillades i det følgende at (ξ,η) kan justeres kontinuert.

Lad nu $\nu = \frac{\mu-\delta}{\sigma}$, $\mathcal{G} = \sigma\{S_u, 0 \le u \le T\}$ og definer et ny mål Q ved den Radon-Nikodym afledede:

$$\frac{dQ}{dP} = \exp(-\nu W_T - \frac{1}{2}\nu^2 T).$$

Vi arbejder med følgende betingelser på investeringsstrategierne

$$\int_0^T |\eta_t| dt + \int_0^T \xi_t^2 dt < \infty \ P\text{-n.s.},$$

og kræver at $V(\xi,\eta)$ er ikke-negativ samt $\sup_{t\in[0,T]} V(\xi,\eta)_t B_t^{-1} \in L^2(Q)$. Dette sikrer at integralerne som indgår på højresiden af (15) er veldefinerede og at de har passende egenskaber.
Et hovedresultat i finansieringsteorien er da følgende:

Sætning. *Antag $X \in L^2(\mathcal{G}, Q)$. Da findes $\varphi = (\xi,\eta)$ og $V_0 \in \mathbb{R}$ således at*

$$X = V_T(\xi,\eta) = V_0 + \int_0^T \xi_t\, dS_t + \int_0^T \eta_t\, dB_t.$$

Yderligere gælder for ethvert tidspunkt $t \in [0,T]$:

$$V_t(\xi,\eta) = \mathrm{E}_Q\left[X e^{-\delta(T-t)} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Resultatet anvendes til prisfastsættelse på et finansiel marked af kontrakter X som er målelige med hensyn til $\mathcal{G}$, dvs. σ-algebraen frembragt af S_t, $0 \le t \le T$. Eksempler på X er (1)–(3). Sætningen siger at der findes en konstant V_0 og en selvfinansierende investeringsstrategi (ξ,η) således at slutværdien $V_T(\xi,\eta)$ netop er X, P-n.s. Hvis man forestiller sig at man har solgt en kontrakt som udbetaler X på tid T og modtaget præmien V_0, så er det således muligt at opnå netop beløbet X på tid T via investeringsstrategien (ξ,η). Det er derfor ingen risiko knyttet til salget af X, givet at man benytter den anviste investeringsstrategi! Ydermere ses at V_0 er den eneste rimelige præmie for kontrakten X, og at V_0 skal udregnes som en middelværdi under det nye mål Q

$$\text{Præmie} = V_0 = \mathrm{E}_Q[e^{-\delta T} X].$$

Det skal understreges at det er meget vigtigt at X er $\mathcal{G}$-målelig. Resultatet kan ikke udvides til at omfatte kontrakter som ikke opfylder denne betingelse.

Prisfastsættelse af en generel Unit Link kontrakt

Lad os til slut vende tilbage til vores Unit Link livsforsikringskontrakter, hvor Y_T ikke nødvendigvis er givet på formen $Y_T = S_T$. Som nævnt ovenfor er det ikke muligt at overføre sætningen ovenfor til en kontrakt med kontantværdi $H_i = 1_{\{\tau_i > T\}} Y_T B_T^{-1}$, idet H_i også afhænger af τ_i og dermed ikke er $\mathcal{G}$-målelig. Vi kan imidlertid anvende sætningen sammen med Store tals lov, således som vi forsøgte ovenfor. Antag derfor at forsikringsselskabet står overfor en portefølje af n identiske Unit Link kontrakter. Lad os antage at selskabet anvender samme strategi (ξ, η) for hver forsikringstager. Kontantværdien på tid 0 af selskabets tab bliver nu:

$$\tilde{L}(n) = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{\tau_i > T\}} Y_T B_T^{-1} - n\kappa + \left(nV_0(\xi,\eta) - nV_T(\xi,\eta)B_T^{-1}\right),$$

hvor de første 2 led er det sædvanlige tab, se (5), mens de sidste 2 led er kontantværdien af tabet ved at anvende investeringsstrategien $(n\xi, n\eta)$. Det følger nu direkte at

$$\frac{1}{n}\tilde{L}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{\tau_i > T\}} Y_T B_T^{-1} - V_T(\xi,\eta)B_T^{-1} + (V_0(\xi,\eta) - \kappa)$$

Vi ser nu at hvis vi vælger $\xi_t = P(\{\tau_1 > T\})\xi_t^Y$ og $\eta_t = P(\{\tau_1 > T\})\eta_t^Y$, hvor (ξ^Y, η^Y) er strategien fra sætningen ovenfor som genererer Y_T, da er netop

$$\begin{aligned} V_0(\xi,\eta) &= P(\{\tau_1 > T\})\, \mathrm{E}_Q[Y_T e^{-\delta T}], \\ V_T(\xi,\eta) &= P(\{\tau_1 > T\})\, Y_T. \end{aligned}$$

Dvs. med denne strategi gælder

$$\frac{1}{n}\tilde{L}(n) \to P(\{\tau_1 > T\})\, \mathrm{E}_Q[Y_T e^{-\delta T}] - \kappa \tag{16}$$

for $n \to \infty$. Specielt gælder at den fair præmie κ for Unit Link forsikringen findes ved at sætte højresiden i (16) lig 0, altså

$$\kappa = P(\{\tau_1 > T\})\, \mathrm{E}_Q[Y_T e^{-\delta T}]. \tag{17}$$

I vores nye modelapparat har dette igen en naturlig form. Præmien beregnes som sandsynligheden for at forsikringstageren overlever til tid T multipliceret med prisen på det finansielle marked for en kontrakt som udbetaler Y_T på tid T. Sammenlignes dette med det traditionelle ækvivalensprincip (9) ses at de to præmier kun adskiller sig ved det mål, der er anvendt til at udregne middelværdien af $Y_T B_T^{-1}$. Markedsprisen for Y_T beregnes således ikke som middelværdien under det oprindelige mål P, men som middelværdien under et ækvivalent mål Q. Bemærk at analysen også giver en anvisning til hvordan forsikringsselskabet skal investere præmierne $n\kappa$. Ved n personer skal selskabet følge strategien

$$(\xi_t, \eta_t) = (nP(\{\tau_1 > T\})\xi_t^Y, nP(\{\tau_1 > T\})\eta_t^Y),$$

hvilket svarer til at selskabet blot genererer den rent finansielle kontrakt, som på tid T udbetaler beløbet $Y_T \, \mathrm{E}[\sum_{i=1}^n 1_{\{\tau_i > T\}}]$.

En række spørgsmål melder sig nu. For eksempel: Er det *optimalt* i en eller anden forstand for forsikringsselskabet at investere således? Er det muligt at opdatere strategien (ξ, η) på en sådan måde at man tager højde for at man løbende observerer når forsikringstagerne dør? Er det muligt at undgå denne to-trins procedure, hvor man kombinerer store tals lov med prisfastsættelse af finansielle kontrakter? Etc. Disse og mange andre spørgsmål undersøges i dag i det forskningsområde som kaldes "the interplay between insurance and finance".

Litteratur

Disse emner behandles mere indgående i kurset FM0, som er baseret på forelæsningsnoterne *Basic Life Insurance Mathematics* af Ragnar Norberg, samt i kurset FM1. Den Brownske bevægelse behandles nærmere i kurset Statistik 2B. De citerede resultater fra finansieringsteorien kan også findes i

LAMBERTON, D. and LAPEYRE, B. (1996). *Introduction to Stochastic Calculus applied to Finance*, Chapman & Hall.

For en introduktion til finansieringsteorien, se fx. David Landos Side 9-Sætning i december-1999-udgaven af FAMØS.

Interview med den nye studievejleder

I løbet af sommeren har de matematiske fag(og datalogi) fået en ny studievejleder. Merete Grove Jacobsen er stoppet efter 3 år på posten, og er blevet afløst af Esben Wendt Lorenzen. FAMØS har stillet Esben nogle spørgsmål.

FAMØS: *Hvor længe har du læst?*

Jeg har læst matematik- filosofi i fire år, men i virkeligheden kan jeg jo nok kun bryste mig af en kneben bachelorgrad!

FAMØS: *Hvordan har du det med den fordom, at hvis man har dumpet en del kurser og „bumlet" lidt rundt, så kan man altid blive studievejleder?*

Neeej- det syntes jeg er noget pjat. Er man meget målrettet i sine studier vælger man nok ikke at blive studievejleder, men er man medlem af den store grå masse af gennemsnitsstuderende der ikke evner at fordybe sig i studierne 24 timer i døgnet, syv dage om ugen, så er man jo nok i en ganske god position til at finde studievejledning spændende. Jobbet som studievejleder skal ikke ses som en erstatning for studierne, men mere som en mulighed for at få spredt sine daglige aktiviteter.

FAMØS: *Hvad har din største sag hidtil været?*

Helt overordnet kan man jo sige at det som regel er temmelig kompliceret, når der fra universitets side er begået en eller anden form for fejl, der har betydning for en studerende. Alt bliver da lige pludselig meget uforståeligt og teknisk.[1]

FAMØS: *Hvad ser du som din største udfordring i jobbet?*

Det må så afgjort være at give kommende studerende og mine medstuderende en fornuftig og brugbar vejledning. Noget af det værste er følelsen af at have givet en vejledning der ikke kunne bruges til så meget.

FAMØS: *Hvad er det for nogle problemer folk typisk kommer med?*

En forudsætning for at kunne besvare dette spørgsmål fyldestgørende er nok at man har været vejleder i en længere periode, da de spørgsmål man møder vist nok er meget årtidsafhængigt. Jeg har været ansat siden juni i år og i den periode har det i høj grad drejet sig om optagelse på de forskellige studier, altså kommende studerende der vil have klarlagt deres muligheder for at læse naturvidenskab. Dertil har jeg snakket med en hel del studerende der har problemer i forhold til deres bifag, hvad skal der til for at få undervisningskompetance, hvad er mulighederne for at skifte bifag?

FAMØS: *Hvem er det der typisk kommer?*

Alle typer, — og det er jo en rigtig fin ting!

FAMØS: *Hvordan mener du selv du er kvalificeret til jobbet?*

[1] Esben har tavshedspligt, hvilket begrænser hans muligheder for at besvare spørgsmålet.

Åh nej, det onde, onde selvreflekterende spørgsmål! ... ... Jo, — lad mig se engang ... flid, fedt og snyd, det er jo altid en god ting at kunne!! Nej hånden på hjertet, jeg dur ikke til sådanne spørgsmål.

FAMØS: *Har du fået indfriet dine forventninger til jobbet?*
Helt bestemt! Især har det været en fornøjelse at opleve, at man stort set fra første dag bliver betragtet som en medarbejder, med sine egne ansvarsområder. De andre medarbejder på fakultetet, folkene på institutterne, andre vejledninger mm. har været lynhurtige til at finde ud af hvem jer var, bruge min viden og stille krav. Forventningen om at man i jobbet har sit eget område, med en dertil hørende viden, er altså hurtigt blevet opfyldt.

FAMØS: *Har du fået nogen overraskelser i jobbet?*
Ork ja, en hel masse. Faktisk bliver jeg overrasket stortset hver dag, der er jo så frygtlig meget jeg skal lære. Nej ... da jeg startede på jobbet valgte jeg ikke at medbringe gamle forstillinger om hvad der er tilfældet og hvad der ikke er tilfældet. På den måde ville jeg ikke risikere at medbringe fejlagtige forestillinger. Dette har så også betydet at de store superchokerende overraskelser er udeblevet. Men lur mig, inden længe har alt jo sikkert ændret sig, og så skal man jo passe fandens godt på!

FAMØS: *Har du nogen beføjelser?*
Laaang tænke pause ... nej, jeg er vist stadig den lille studerende på gulvet der bare følger trop!

FAMØS: *Ligger der andet i jobbet end vejledning af studerende?*
Hvad laver jeg på studievejledningen når jeg ikke vejleder? Surfer på nettet og kigger ud af vinduet ... Nej, selvfølgelig ikke. Med jobbet som studievejleder følger en hel masse ekstraopgaver, opgaver som ikke direkte relaterer sig til vejledning. Jeg skal prøve at nævne et par stykker:

Holdtilmeldning Vi på studievejledningen stå for at fordele de nye studerende på øvelses hold. Dette er et kæmpe puslespil, med de gule holdtilmeldningsskemaer som brikker. Det tager ca en weekend at ordne den sag

Skemalægning To gange om året lægger vi skema. I februar måned lægges skemaet for efterårssemestret og i september måned lægges skemaet for forårssemestret. Som med holdtilmeldningen er der hver gang tale om en arbejdsbyrde af en weekends varighed, hvor fag, tidspunkt og lokale skal gå op i en højere enhed.

Skriftligt materiale Studievejledningen står for at udgive en hel del informationsmateriale. De vigtigste er nok Studiehåndbogen, avisen "Studier på Naturvidenskab"og Faginformationerne (en mere uddybende beskrivelse af hvert af fagene, rettet til uddannelsessøgende.). Desuden bliver vi ofte bedt om at læse korrektur på forskelligt materiale. Endelig er der også en del arbejde forbundet ved vedligeholdelse af forskellige hjemmesider, her tænker jeg på vores egen hjemmeside www.nat.ku.dk/nat-nsv og lektionsplanen www.sis.ku.dk/nat.

Jobbet som studievejleder indbefatter også en del arbejde ud af huset, her er det væsentlige nok foredrag (f.eks. på rusture og gymnasier) og møder (studienævnsmøder, fakultetrådsmøder mm.).

Opgaveløsninger

I sidste nummer bragte vi en større samling opgaver, som vi havde stillet siden september 94, men af forskellige grunde aldrig bragt en løsning til.

Den første opgave handlede om at placere flagstænger på en kolonihavegrund, der hele tiden blev delt i stadig flere stykker. Asger Grunnet har tænkt en del over denne opgave og sendt følgende delvise løsning:

> Jeg vil i det følgende vise at der faktisk findes en øvre grænse for hvor lang en følge af flagstænger kan blive!
>
> Antag at vi i det n'te trin har flagstænger i positionerne $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, samt at nummereringen er valgt så $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1}$. Da hvert af intervallerne $]\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}[$ for $i = 0, \ldots, n-1$ skal indeholde præcis en flagstang, må vi have at
>
> $$\lfloor nx_i \rfloor = i \quad \text{for alle } i. \tag{1}$$
>
> Vi fortsætter nu til trin $n+1$ og tilføjer en flagstang i position z. Antag at $x_k < z < x_{k+1}$. Forudsat at dette overhovedet kan lade sig gøre, må der gælde en ligning svarende til (1):
>
> $$\lfloor (n+1)x_i \rfloor = \begin{cases} i & \text{for } i \leq k, \\ i+1 & \text{for } i > k. \end{cases}$$
>
> Lad nu x og y, med $x < y$, være positionerne på to vilkårlige flagstænger, der findes i trin n. Hvis det er muligt at udvide flagstangs-følgen til trin $n+1$, giver det ovenstående at der må gælde:
>
> $$\lfloor nx \rfloor < \lfloor (n+1)x \rfloor \Rightarrow \lfloor ny \rfloor < \lfloor (n+1)y \rfloor. \tag{2}$$
>
> Jeg vil i det følgende vise at denne egenskab ikke kan gælde for vilkårligt lange følger. Først vil jeg kigge lidt nærmere på hvilke værdier af n, der opfylder at $\lfloor nx \rfloor < \lfloor (n+1)x \rfloor$. Til dette formål sættes
>
> $$M_x = \{n \in \mathbb{N} | \lfloor nx \rfloor = \lfloor (n+1)x \rfloor\}.$$
>
> Der gælder følgende:
>
> **Lemma.** Lad $x \in]1 - \frac{1}{m}; 1 - \frac{1}{m+1}[$ for et $m \geq 2$. Antag at n tilhører M_x. Så vil ingen af tallene $n+1, n+2, \ldots, n+m-1$ tilhøre M_x, men enten $n+m$ eller $n+m+1$ vil tilhøre M_x.
>
> **Bevis.** Da n tilhører M_x har vi at $\lfloor nx \rfloor = \lfloor (n+1)x \rfloor$. Idet vi sætter $nx = p + \alpha$ for $p \in \mathbb{N}_0$ og $\alpha \in [0; 1[$, har vi derfor at $\alpha + x < 1$. Da $x > 1 - \frac{1}{m}$ kan vi desuden slutte at $\alpha < \frac{1}{m}$. Vi har nu at
>
> $$\lfloor (n+k)x \rfloor \geq \lfloor p + k + \alpha - \frac{k}{m} \rfloor = p + k - 1 \quad \text{for } 1 \leq k \leq m.$$

Dette viser at $n+k$ ikke kan tilhøre M_x for $1 \leq k \leq m-1$. Vi bruger nu uligheden $x < 1 - \frac{1}{m+1}$ til at slutte at

$$\begin{aligned}
p+m-1 &\leq \lfloor (n+m)x \rfloor \\
&\leq \lfloor (n+m+1)x \rfloor \\
&\leq \lfloor (n+m+2)x \rfloor \\
&\leq \lfloor p+\alpha+x+(m+1)x \rfloor \\
&\leq \lfloor p+\alpha+x+m \rfloor \\
&= p+m,
\end{aligned}$$

hvoraf det ses at højst en af ulighederne kan være ægte, og dermed at enten $m \in M_x$ eller $m+1 \in M_x$. Dette afslutter beviset.

Bemærk at implikationen (2) også kan skrives $M_y \subseteq M_x$. For at finde et n som ikke opfylder (2), er det således nok at finde et n som tilhører M_y men ikke M_x.

Vi ved at der, efter trin 20, findes en flagstang med position $x \in]\frac{15}{20}; \frac{16}{20}[=]1-\frac{1}{4}; 1-\frac{1}{5}[$. Ligeledes findes, efter trin 42, en flagstang med position $y \in]\frac{35}{42}; \frac{36}{42}[=]1-\frac{1}{6}; 1-\frac{1}{7}[$. Ifølge lemmaet vil et af tallene $42, 43, \ldots, 48$ tilhøre M_y. Kald dette tal n. Hvis n ikke tilhører M_x, da har vi en modstrid med (2). Antag derfor at $n \in M_x$. Lemmaet giver nu at det næste tal i M_x er enten $n+4$ eller $n+5$ og det næste tal igen er mindst $n+8$. Lemmaet giver også at det næste tal i M_y er enten $n+6$ eller $n+7$. Dette viser at enten $n+6$ eller $n+7$ tilhører M_y men ikke M_x, hvilket er i modstrid med (2).

Ovenstående viser at der ikke kan findes en flagstangs-følge på $48+7=55$ flagstænger.

Det kunne nu være interessant at vide om denne grænse er optimal, dvs. om der faktisk findes flagstangs-følger på 54 flagstænger. Min umiddelbare fornemmelse er at grænsen højst sandsynligt er en del lavere. Jeg har sat min computer på problemet, og den længste følge den har fundet indtil nu er på 14 flagstænger (check selv efter):

0,03621767
0,59787853
0,79777441
0,34640675
0,92902910
0,17681833
0,44592300
0,69215074
0,27251194
0,88216416
0,53819629
0,11629542
0,73206045
0,37472567

Man kan altså konkludere at grænsen er mellem 14 og 54. Jeg giver opgaven videre:

Opgave. Hvor lang er den længste flagstangs-følge?

Godt to uger senere skrev Asger:

Siden jeg sendte min løsning af flagstangs-opgaven, er det lykkedes mig at skrive et computerprogram, der finder den eksakte grænse for længden af en flagstangs-følge. Det viser sig, at der ikke findes flagstangs-følger af længde 18 eller større (forudsat selvfølgelig at mit program er korrekt!). Jeg inkluderer her en flagstangs-følge af længde 17:

0,148351648351648
0,970588235294118
0,458041958041958
0,73030303030303
0,289915966386555
0,577380952380952
0,0741758241758242
0,82843137254902
0,379807692307692
0,656862745098039
0,218253968253968
0,88562091503268
0,514705882352941
0,0294117647058824
0,766968325791855
0,322916666666667
0,594117647058824

Dette udgør naturligvis ikke et matematisk bevis, så jeg håber stadig på at en anden læser vil være i stand til at finde et bevis for denne grænse.

De tre næste opgaver skyldtes Kennie Nybo Mortensen. Til de første to har vi modtaget en håndskrevet besvarelse[1], fra A. Storm, der også spørge om vi er interesserede i bidrag til opgavesektionen, og svaret på det spørgsmål er (som det altid har været) at forslag til opgaver er ligeså velkomne som forslag til alt andet. Så kom endelig med dem! Udover A. Storm har også Gunnar Restorff løst opgaverne, da han har løst alle tre bringer vi hans løsninger her:

I sidste nummer af FAMØS efterlyste I løsninger til en række opgaver. Derimellem var nogle opgaver som Kennie Nybo Mortensen stillede i FAMØS for nogle år siden. Her har jeg så et forslag til løsning af disse.
Lad $(X, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og lad, for en vilkårlig mængde $A \subseteq X$, A^{-},A° og A^{c} betegne hhv. afslutningen af A, det indre af A og komplementærmængden til A. For en vilkårlig mængde $A \subseteq X$ har vi da følgende regneregler:

[1] Det er man selvfølgelig meget velkommen til, vi skal bare opfordre til at man vedlægger/inkluderer navn og kontaktoplysninger helst e-post-adresse.

Sætning 1.

$$A^{c-c} = A^\circ, \quad A^{-\circ-\circ} = A^{-\circ} \text{ og } A^{\circ-\circ-} = A^{\circ-}.$$

Bevis. A^{c-} er den mindste afsluttede mængde indeholdende A^c. Således er A^{c-c} er den største åbne mængde indeholdt i $A^{cc} = A$. Dvs. $A^\circ = A^{c-c}$. Vi har at $A^{-\circ} \subseteq A^-$ og $A^\circ \subseteq A^{\circ-}$, så $A^{-\circ} \subseteq (A^{-\circ})^- \subseteq (A^-)^- = A^-$ og $A^\circ = (A^\circ)^\circ \subseteq (A^{\circ-})^\circ \subseteq A^{\circ-}$. Altså har vi vist at $A^{-\circ} = (A^{-\circ})^\circ \subseteq (A^{-\circ-})^\circ \subseteq (A^-)^\circ$ og $(A^\circ)^- \subseteq (A^{\circ-\circ})^- \subseteq (A^{\circ-})^- = A^{\circ-}$. Vi har selvfølgelig gentagne gange benyttet at operationerne $^\circ$ og $^-$ er ordensbevarende, dvs. $\forall A_1, A_2 \subseteq X (A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_1^\circ \subseteq A_2^\circ \wedge A_1^- \subseteq A_2^-)$. □

Korollar 2. *For en vilkårlig mængde $A \subseteq X$ har vi at*

$$A^{-c-} = A^{-c-c-c-}.$$

Bevis. Ifølge foregående sætning har vi at $A^{-c-} = A^{-\circ c} = A^{-\circ-\circ c} = A^{-c-c-cc} = A^{-c-c-c-}$. □

Sætning 3. *Det maksimale antal forskellige mængder man kan få ved at anvende operationerne ^{c} og $^-$ på en mængde $A \subseteq X$ er 14; disse er*

$$A, A^-, A^{-c}, A^{-c-}, A^{-c-c}, A^{-c-c-}, A^{-c-c-c},$$
$$A^c, A^{c-}, A^{c-c}, A^{c-c-}, A^{c-c-c}, A^{c-c-c-} \text{ og } A^{c-c-c-c}.$$

Bevis. Det er klart at det er nytteløst at anvende samme operation to gange i træk. Af korollaret får vi således umiddelbart det ønskede. □

Vi betragter nu det topologiske rum $\mathbb{R}$ med den sædvanlige topologi. Lad nu $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ være en nummerering af de rationale tal. Sæt $O :=]-1,1[\cap \bigcup_{i=1}^{\infty}]q_i - 2^{-i}, q_i + 2^{-i}[$. Så er $O \subseteq]-1,1[$ en åben mængde som indeholder alle rationale tal mellem -1 og 1. Sæt $A := O \cup \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Q} \cap]-2,2[)$.

Sætning 4. *For mængden A, som er defineret lige ovenover, er ingen af de i sætning 3 nævnte mængder ens.*

Bevis. Beviset overlades til læseren, det er en nem, uinteressant og ligeud øvelse (hvor man dog med fordel kan bruge reglen $A^{c-} = A^{\circ c}$ fra sætning 1). □

Der er mange der har fundet fejlen i følgende udregning:

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = \left(\sum_{i=1}^{x} x \right)' = \sum_{i=1}^{x} (x)' = \sum_{i=1}^{x} 1 = x \cdot 1 = x$$

problemet er selvfølgelig at i det øjeblik vi skriver en sum af x led er udtrykket kun veldefineret for $x \in \mathbb{N}$, og følgelig giver det ikke længere mening at differentiere.

Den næste opgave handlede om såkaldt „vandrette" afstande, her er kommet to reelt ens løsningsforslag, det ene fra Jens Ulrik Lefmann, det andet kommer fra Henning Makholm, som udover at løse opgaven har tænkt lidt videre og stiller et par nye opgaver. Vi bringer derfor Hennings løsning.

Lad os lige rekapitulere hvad opgaven gik ud på:

> Et tal $h \in]0,1]$ kaldes (i denne opgave) for en vandret afstand, hvis der for alle kontinuerte funktioner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ med $f(0) = f(1)$ findes et $x \in [0, 1-h]$ så $f(x) = f(x+h)$. Vis at hvis h er en vandret afstand, så er $h = 1/n$ for et naturligt tal n.

Jeg starter med at indføre lidt notation. For ethvert $h \in]0,1]$ definerer jeg operatoren Δ_h ved

$$(\Delta_h f)(x) = f(x) - f(x+h)$$

Δ_h er således en afbildning fra $C^0([0,1])$ til $C^0([0,1-h])$. Som datalog har jeg en mere praktisk notation til rådighed til sådanne definitioner: jeg kan simpelthen definere

$$\Delta = \lambda h \in]0,1]\,.\lambda f \in C^0([0,1]).\lambda x \in [0,1-h].f(x) - f(x+h)$$

Princippet bag denne **lambda-notation** er at "$\lambda x.blablabla$" betyder den funktion f der har egenskaben "$\forall x.f(x) = blablabla$", idet variablen x kan forekomme i udtrykket $blablabla$. Denne notation, indført af Church i 1930'erne, burde være langt mere anvendt i matematikken end den er (og havde den været det, havde jeg måske bestået Mat 3GE i sin tid, men det er en anden historie...)
Hermed kan vi omformulere definitionen af en vandret afstand: h er vandret afstand hvis og kun hvis $\Delta_h f$ altid har et nulpunkt.

Min første hypotese var at opgaven er en trickopgave, altså at den beder om at vise et svagere udsagn end det der faktisk gælder. Man kunne fx forestille sig at den eneste vandrette afstand var 1 – så kunne kan hurtigt komme på vildspor ved at forsøge at finde en generel konstruktion af et passende n.
Altså må vi lige starte med at vise at alle tal på formen $1/n$, hvor n er et positivt[2] naturligt tal, faktisk er vandrette afstande. Det viser sig at være nogenlunde let. Lad $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ være givet, og sæt $h = 1/n$. Nu stiller fjenden med en kontinuert $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ med $f(0) = f(1)$, og vi skal så vise at $\Delta_h f$ har et nulpunkt.
Jeg regner nu

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_h f)(kh) &= (\Delta_h f)(0) + (\Delta_h f)(h) + \cdots + (\Delta_h f)(1-h) \\ &= f(0) - f(h) + f(h) - f(2h) + \cdots + f(1-h) - f(1) \\ &= f(0) - f(1) = 0\end{aligned}$$

Idet summen af disse værdier af $\Delta_h f$ er 0 er de enten alle 0 (og da er vi færdige) eller også er der mindst et positivt $(\Delta_h f)(kh)$ og et negativt $(\Delta_h f)(k'h)$; og da $\Delta_h f$ tydeligvis er kontinuert lige som f, må den have et nulpunkt et sted mellem kh og $k'h$.

[2] Som datalog anser jeg naturligvis 0 for at være et naturligt tal.

Godt. Der er altså ikke tale om et trickspørgsmål. Tilbage står nu at vise at tallene af formen $1/n$ udgør *samtlige* vandrette afstande. Altså vælger fjenden et $h \in]0,1]$ som ikke er på denne form – det vil sige at $nh \neq 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi skal så finde et f så $\Delta_h f$ ikke har noget nulpunkt.
For at få lidt mere struktur på opgaven vælger vi en konstant $a \neq 0$ og sætter os for at $\Delta_h f$ skal være den konstante funktion $\lambda x.a$. Det kan lade sig gøre hvis f har formen $\lambda x.ax/h + g(x)$ hvor g er en funktion med periode h. Da Δ_h ignorerer konstante led kan vi også beslutte os til at $f(0) = g(0)$ skal være 0. For at $f(0) = g(0)$ som krævet skal $g(1) = -a/h$. Her kommer forudsætningen $\forall n.nh \neq 1$ ind i billedet; den sikrer at dette krav ikke strider mod $g(0) = 0$.
Herefter er det let at konstruere en kontinuert g med de søgte egenskaber. Vi kan nøjes med en simpel savtakfunktion, men skal vi skrive et eksplicit regneudtryk op er det nemmere at vælge

$$g = (\lambda x.c \sin^2(\pi x/h)) \quad \text{hvor} \quad c = \frac{-a/h}{\sin^2(\pi/h)}$$

som med alle definitionerne sat ind i hinanden bliver til

$$f(x) = \frac{a}{h}\left(x - \frac{\sin^2(\pi x/h)}{\sin^2(\pi/h)}\right)$$

Hermed er opgaven sådan set løst, men lad os lige generalisere den lidt. Den oprindelige ordlyd kvantiserer over samtlige *kontinuerte* funktioner f. Hvad nu hvis vi trækker f fra et andet funktionsrum, fx samtlige differentiable funktioner f eller samtlige polynomier?
Det er klart at jo større funktionsrum vi bruger, desto sværere bliver det at være vandret afstand – og omvendt. Derfor kan vi bruge hvad vi netop har fundet ud af til at indse, at når funktionsummet *indeholder* C^0 vil enhver vandret afstand have formen $1/n$, og når funktionsrummet er *indeholdt i* C^0 vil alle tal af formen $1/n$ være vandrette afstande.
Faktisk kan vi sige lidt mere, idet den f vi konstruerede ovenfor var C^∞ – så for ethvert funktionsrum der indeholder C^∞ vil alle vandrette afstande have formen $1/n$. Det vil sige at vi har afklaret hvad der er vandrette afstande for alle rum mellem C^0 og C^∞, nemlig netop tal på formen $1/n$.
Forholdet er ikke særlig interessant når vi betragter større funktionsrum end C^0. Ihvertfald bliver 1 den eneste vandrette afstand i alle de interessante større funktionsrum jeg kan finde på (fx hvis vi tillader stykvis kontinuerte funktioner eller komplekse funktionsværdier).

Opgave 1.1

Vis at netop tallene på formen $1/n$ er de vandrette afstande når vi betragter rummet $\mathbb{R}[X]$ af polynomier. (Det er tilladt at udnytte gamle side 9-sætninger).

Opgave 1.2

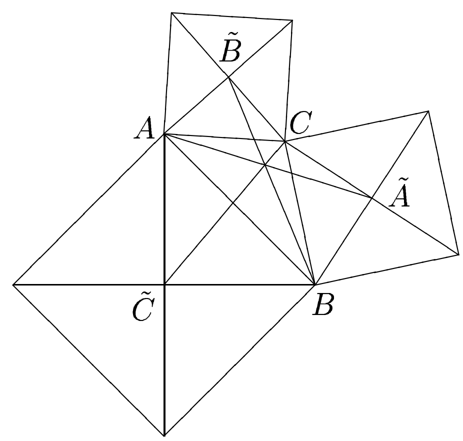
Undersøg hvilke tal der er vandrette afstande, når vi betragter rummet af polynomier af grad højst k. (Jeg kender ikke svaret).

Den næste opgave som handlede om trekanter har Henning også løst.

Opgaven var

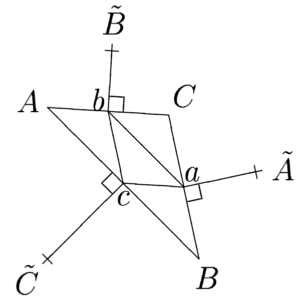
> Tegn en trekant. Tegn et kvadrat på hver af siderne (så det vender væk fra trekanten og har siden som side, ja). Marker hvert af kvadraternes midtpunkter. Tegn streger fra hvert af det netop markerede punkter til trekantens modstående hjørnepunkt. Vis at de tre streger, du lige har tegnet, skærer hinanden i samme punkt.

Det ser sådan her ud når man tegner tegningen:



Det ser jo vældig pænt ud, men hvordan viser man det? En moderne matematikers første indskydelse er naturligvis at komme rendende med et koordinatsystem. Det kan også godt lade sig gøre – men hvis man bare sætter $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ og regner løs, får man hurtigt brug for mere papir (eller datamatstøtte). Lidt bedre bliver det hvis man sørger for at vælge koordinatsystemet således at $A = (0, 1)$ og $B = (1, 0)$; så kan man ved at regne på forholdet mellem de to dele linjen $\tilde{C}C$ deles i af henholdsvis $A\tilde{A}$ og $B\tilde{B}$ slippe forholdsvis nådigt igennem. (Det smarte ved netop den udregning er at man kan bytte om på A og B i udregningerne blot ved at bytte om på de to resterende parametre, der udgør Cs koordinater).

Men det er stadig en omvej. Den nemme løsning er som følger: $\tilde{A}A$, $\tilde{B}B$ og $\tilde{C}C$ skærer hinanden i samme punkt fordi de er højderne i $\triangle\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$! For at indse det, tegner vi en anden tegning, hvor fx $\tilde{B}$ er konstrueret som et passende punkt på ACs midtnormal, i stedet for centrum af kvadratet på AC:



Nu indfører vi relationen "er lige så lang som men drejet 90 grader med uret" mellem vektorer, noteret "$\perp$".
For at indse at fx $\tilde{A}A \perp \tilde{B}\tilde{C}$ kan vi så skrive

$$\begin{aligned} \tilde{A}A &= \tilde{A}a + ab + bA \\ \tilde{B}\tilde{C} &= \tilde{B}b + cb + c\tilde{C} \end{aligned}$$

og da $\tilde{A}a \perp aB = bc$, $ab = Bc \perp cC$ og $bA \perp \tilde{B}b$ kan vi konkludere at $\perp$ også må gælde mellem summerne.

Den sidste opgave vi stillede i sidste nummer var i modsætning til de andre ny, og handlede om en kodelås. Igen er der flere der har løst opgaven. Henning kom først med løsningen, og da han løsning er ret velformuleret, har vi valgt endnu engang at bringe hans løsning.

I værste fald skal man indtaste 10003 cifre. De første tre cifre giver ingen chance, men resten kan tilrettelægges således at hvert ciffer afslutter en hidtil uset kode.
For at vise denne påstand foreslår jeg at vi betragter opgaven som en orienteret graf med 1000 knuder og 10000 kanter. Hver kant svarer til en kode (den er navngivet med fire cifre $xyzw$). Hver knude er navngivet med *tre* cifre, og den kant der svarer til koden $xyzw$ går fra knude xyz til knude yzw. I hver knude er der 10 kanter der ender og 10 kanter der begynder.
For at finde en 10003-cifres strategi skal vi konstruere en Königsbergsk vej i grafen (altså en vej der indeholder hver kant præcis én gang). Det gør jeg på følgende måde:
Vælg en vilkårlig startknude k. Lav en vej fra k ud gennem grafen, idet du vælger en vilkårlig endnu ubrugt kant væk fra hver knude du kommer til. På et eller andet tidspunkt er der ikke nogen ubrugte kanter du kan vælge, men det må så være fordi du er kommet tilbage til k – i alle andre knuder er der altid lige så mange ubrugte ud-kanter som ubrugte ind-kanter. Derfor kan du nu binde slutningen af din vej sammen med starten, så du nu har en cykel.
Nu er der muligvis stadig nogen kanter du ikke har fået brugt endnu. Hvis der er det, så vælg en knude der bliver berørt af cyklen og stadig har mindst en ubrugt ud-kant. Så længe der er ubrugte ud-kanter vil der findes sådan en knude – grafen er stærkt sammenhængende, og en vej fra

> en vilkårlig knude i cyklen til startknuden i en ubrugt kant vil indeholde mindst en pasende knude. Gør den valgte knude til ny startknude k, skær cyklen over der. Forlæng den overskårne cykel ud ad den ubrugte ud-kant og fortsæt som om intet var hændt.
> Den ovenstående proces kan kun stoppe med at du har en cykel i grafen der berører samtlige kanter netop en gang. Ved at skære den over en vilkårligt sted får vi en 10000 kanter lang vej som vi kan bruge til at forsøge at taste ind i dørkontrolsystemet.

Som det kan ses har Henning Makholm været rigtig produktiv, og en stor tak for det. Faktisk løste han også „differentiationsproblemet", men vi synes også lige i skal have indledningen fra hans e-brev med løsningerne.

> Normalt nøjes jeg med at skabslæse FAMØS, eftersom jeg kun er halvvejs matematiker (et bifag for snart længe siden). Men det skar mig sådan i hjertet at få at vide at I ikke engang selv har løsninger til de opgaver jeg sad i mit skab og hyggede mig med i julen – så hermed får I mine. Der er også nede i bunden en løsning til $\aleph_2$ fra majnummeret.
> Jeg er dog nødt til lige at reagere på den morale I bringer. Hvad er der dog galt i at stille opgaver man ikke mender svaret på? Nedskæringer m.v. til trods er vi vel stadig et universitet, og en af opgaverne på et universitet er at bedrive videnskab. Nu strides de lærde vist stadig om hvad den bedste definition af "videnskab" er, men vi kan vel alle blive enige om at at så længe man kun stiller sig spørgsmål man allerede kender svaret på, er det *ikke* videnskab. Hurra for uløste opgaver!
>
> Henning Makholm, DIKU

Andre „skabslæsere" skal absolut heller ikke holde sig tilbage. Vi har som matematikere godt af input udefra.

Pointen om uløste opgaver kan vi også kun være enige i, men nu er det jo heller ikke sig selv FAMØS stiller opgaver. Når vi stiller opgaver i FAMØS er det derimod for at hjælpe vore læsere med at stille sig selv spørgsmål de ikke kender svaret på. Når vi så foretrækker at bringe løsninger er det som en service til de læsere der har kæmpet med opgaven, enten så kan se hvordan de kunne have gjort, eller forhåbentlig for at bekræfte dem i at de har gjort det rigtige.

Vi har et par nye „uløste" problemer på vej.

Da vores læsere åbenbart er glade for at få nogle opgaver at arbejde med, bringer vi i tillæg til de to opgaver Henning stillet i besvarelse af en af opgaverne fra sidst, endnu en lille opgave. Husk at både besvarelser og nye opgaver er meget velkomne.

En lille opgave inspireret af oldtidens indiske ritualer

Toke Lindegaard Knudsen

I de gamle indiske ritualer anvendtes et alter kaldet Gārhapatya. Dette alter kunne enten have form som en cirkel eller som et kvadrat. Uanset formen skulle alteret dog opbygges i fem lag, hver bestående af præcis 21 mursten. Ud af disse fem lag er det første, tredje og femte lag identiske, og tilsvarende er det andet og fjerde lag også identiske. Murstenene i de forskellige lag skal endvidere placeres på en sådan måde, at kanterne på murstenene i et lag ikke falder sammen med kanterne på murstenene i de to lag der ligger over og under det på gældende lag (dette gælder naturligvis ikke ved alterets rand).

Hvis alteret har form som et kvadrat, bliver dette specielt interessant, hvis vi tillige kræver, at alle murstenene også skal være kvadratiske. Med andre ord, hvordan overdækker vi et kvadrat med sidelængde 1 med to lag af mursten, 21 mursten i hvert lag,[1] så kanterne på murstenene i de to lag ikke falder sammen med hinanden (undtagen ved kvadratets rand)?

Man kan anvende kvadratiske mursten med så mange forskellige sidelængder, som man måtte ønske, men jo færre jo bedre.

I den gamle indiske tekst Baudhāyana-śulbasūtra angives en måde at gøre dette på , men desværre uden en forklaring på hvordan forfatteren er kommet frem til denne løsning.

God fornøjelse!

[1] Vi kan se bort fra de resterende tre lag, som blot er identiske med de to første.

Studenterkollokvium reddet i 11'te time

I sidste nummer af FAMØS kunne man læse, at studenterkollokviet fredag eftermiddag var ved at blive nedlagt. Så i mangel af bedre alternativer har vi (undertegnede) besluttet os for at forsøge på at få kollokviet i gang igen.

Eftersom det ikke kører af sig selv, vil vi hermed opfordre jer til at kontakte os med ønsker eller forslag til emner, fordragsholdere, og andet relevant (måske er du selv interesseret i at være med i arrangørgruppen?) på:

`m98lmj@math.ku.dk`, eller
`m98ria@math.ku.dk`

Vi vil gerne som yderlige motivation minde om, at det er muligt at erhverve nogle af sine 2.dels seminarpunkter ved at holde et kollokvium.

Vi håber at høre fra mange af jer.

Lars og Ruth