FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
13. årgang, nr. 3, marts 2000

Lejeune Dirichlet

FAMØS 13.3; marts 2000.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)
Peter Lund

Korrektur:

Rikkelara Nielsen

Deadline for næste nummer:
Fredag den 28. april 2000

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web adresse:
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 700 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder

Velkommen! Det må være ordet der skal begynde lederen i dette nummer af FAMØS.

Vi kan først sige velkommen til Forsikringsmatematisk Laboratorium (FML), der siden 1. februar har været en del af Institut for Matematiske Fag (IMF), i stedet for at være et institut for sig selv. Eftersom det er IMF der betaler for trykningen af FAMØS[1], betyder det at Forsikringsmatematikerne nu også er med til at betale for FAMØS. På redaktionen har vi hele tiden ment, at vi var hele E-bygningens fagblad, så dette vil ikke betyde noget for vores holdning til bidrag fra forsikringsmatematikerne, som naturligvis er meget velkomne!

Vi kan også sige velkommen til det nye samlede Studienævn for Matematiske Fag, der er en sammenlægning af de tre små studienævn vi tidligere havde her i bygningen. Fordelene skulle bl.a. være bedre koordinering og samarbejde mellem fagene.

[1] og det er vi naturligvis særdeles glade for

Dirichletrækker

Henrik Chr. Grove

Jeg vil i denne artikel give en introduktion til Dirichletrækker, med speciel vægt på ligheder og forskelle til potensrækker.

Potensrækker har formen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Det forekommer ret indlysende at forsøge at bytte om på k og z og forsøge at betragte rækker af formen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^z$.[1] Som vi skal se om et øjeblik, får man et „pænere“ konvergensområde ved at tilføje et minus til z. På denne måde har vores række fået formen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-z} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\log k \cdot z}$$

og dette er, hvad man en Dirichletrække af *speciel type*.[2] Uden at miste ret meget kan vi generalisere dette ved at konstatere, at $(\log k)_{k\in\mathbb{N}}$ er en strengt voksende følge med grænseværdi (passende defineret) uendelig. Dette leder frem til følgende:

Definition 1. Ved en Dirichletrække (af almen type) forstås en række af formen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}, \quad \text{hvor } 0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$$

Følgen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ kaldes undertiden for rækkens type.

Vi har allerede set et specialtilfælde, et andet interessant tilfælde er $\lambda_k = k - 1$, hvor vi ved at sætte $w = e^{-z}$ får $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$, altså en potensrække. Transformationen $w = e^{-z}$ afbilder halvplanen $\{x + iy | x > x_0\}$ på (den udprikkede) cirkelskive med centrum i 0 og radius x_0. Da vi ved, at potensrækker (med centrum i 0) har et konvergensområde af denne form, kan vi gætte os til, at Dirichletrækker af denne form er konvergente i en halvplan af den nævnte type. Som vi skal ske om et øjeblik, gælder dette generelt for Dirichletrækker.

Konvergens

Spørgsmålet om absolut konvergens er hurtigt klaret takket være følgende:

Sætning 2. *Hvis Dirichletrækken $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$ er absolut konvergent i $z_0 = x_0 + iy_0$, så er den absolut konvergent i halvplanen $\{x + iy | x \ge x_0\}$.*

[1] Bemærk at vi summerer fra 1 for at undgå problemer, når vi om et øjeblik skriver lidt om på udtrykket, eftersom $0^z = 0$ (for $z \neq 0$ betyder dette ingenting).

[2] Bohr ([1]) kalder disse for egentlige Dirichletrækker og Hardy ([3]) kalder dem for ‘ordinary’. Her anvender vi (tilfældigt) Jessens ([4]) terminologi.

Bevis. Vi starter med at vurdere de enkelte led i summen. Lad $z = x + iy$ være et komplekst tal med $x \geq x_0$, så er $|a_k e^{-\lambda_k z}| = |a_k||e^{-\lambda_k x} e^{-i\lambda_k y}| = |a_k| e^{-\lambda_k x} \leq |a_k| e^{-\lambda_k x_0} = |a_k e^{-\lambda_k (x_0 + iy_0)}|$. Da vi således kan vurdere hvert led i summen for z opad med det tilsvarende led i summen for z_0, følger det ønskede. □

Denne sætning giver os, at der findes en absolut konvergensabcisse for Dirichletrækker, som vi vil kalde α. Der er således tre muligheder for Dirichletrækkers absolutte konvergensområde:

1. Rækken kan være overalt divergent, i dette tilfælde vil vi sige at $\alpha = \infty$.
2. Rækken er absolut konvergent i en halvplan til højre for linien $x = \alpha$.
3. Rækken kan være absolut konvergent overalt, i dette tilfælde vil vi sige at $\alpha = -\infty$.

Dette passer jo fint med vores konstatering omkring specialtilfældet potensrækker, for disse gælder der dog lidt mere, nemlig at rækken udenfor konvergensradius er divergent, og at betinget konvergens kun kan forekomme på konvergenscirklen. Der gælder ikke noget helt tilsvarende for Dirichletrækker, men derimod følgende:

Sætning 3. *Enhver Dirichletrække har en konvergensabcisse, som vi vil kalde γ, og der er altså, som med absolut konvergens, tre muligheder*

1. *Rækken er overalt divergent, i dette tilfælde vil vi sige at $\gamma = \infty$.*
2. *Rækken er konvergent i halvplanen $\{x + iy | x > \gamma\}$.*
3. *Rækken kan være konvergent i hele den komplekse plan, og vi vil sige at $\gamma = -\infty$.*

Vi vil ikke bevise denne sætning, men derimod følgende stærkere resultat:

Sætning 4. *Hvis Dirichletrækken $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$ er konvergent i z_0 så er den uniformt konvergent i ethvert vinkelrum $V(z_0, \theta) = \{z \in \mathbb{C} | Arg(z - z_0) \leq \theta\}$ for $|\theta| < \frac{\pi}{2}$.*

Inden vi beviser denne sætning, vil vi definere $A(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} a_n$, dette kan vi også skrive som:

$$A(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{for } \lambda < \lambda_1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_k & \text{for } \lambda_n \leq \lambda < \lambda_{n+1} \end{cases}$$

Med denne definition kan vi skrive $a_1 = A(\lambda_1)$, $a_2 = A(\lambda_2) - A(\lambda_1)$ og generelt $a_n = A(\lambda_n) - A(\lambda_{n-1})$.

Lad ξ være givet, og vælg så q, så $\lambda_q \leq \xi < \lambda_{q+1}$. Lad os regne lidt på summen $\sum_{k=1}^{q} a_k e^{-\lambda_k z} = a_1 e^{-\lambda_1 z} + \ldots + a_q e^{-\lambda_q z}$ Hvis vi skriver a_k'erne vha. vores A får vi:

$$A(\lambda_1) e^{-\lambda_1 z} + \big(A(\lambda_2) - A(\lambda_1)\big) e^{-\lambda_2 z} + \ldots + \big(A(\lambda_q) - A(\lambda_{q-1})\big) e^{-\lambda_q z}$$

Som vi har valgt q, er $A(\xi) = A(\lambda_q)$, så vi kan lægge $0 = \big(A(\xi) - A(\lambda_q)\big) e^{-\xi z}$ til, ved derudover at samle A'erne får vi:

$$\begin{aligned} A(\lambda_1)\left(e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}\right) + A(\lambda_2)\left(e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_3 z}\right) + \ldots \\ + A(\lambda_q)\left(e^{-\lambda_q z} - e^{-\xi z}\right) + A(\xi) e^{-\xi z} \end{aligned}$$

Hvert parentes kan skrives som et bestemt integral på et interval af formen $[\lambda_k, \lambda_{k+1}[$, og da $A(\lambda) \equiv A(\lambda_k)$ på dette interval, kan A'erne flyttes ind, og integralet samles, så vi alt i alt får:

$$\sum_{\lambda_k<\xi} a_k w^{-\lambda_k z} = z\int_{-\infty}^{\xi} A(\lambda)e^{-\lambda z}d\lambda + A(\xi)e^{-\xi z} \tag{1}$$

Nu kan vi så give os i kast med beviset for sætning 4.

Bevis. Det er klart, at vi kan antage, at $z_0 = 0$, i dette punkt bliver Dirichletrækken til $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, og da vi har forudsat konvergens her, må denne sum være endelig,[3] specielt kan vi antage, den er 0 (ellers trækker vi værdien fra a_1, det ændrer ikke på konvergensforholdene). Der vil hermed gælde, at $\lim_{\lambda\to\infty} A(\lambda) = 0$, for et givet $\epsilon > 0$ kan vi derfor vælge et Λ, så $A(\lambda) < \epsilon$ for $\lambda < \Lambda$. For $\Lambda < \xi < \eta$ og $x + iy = z \in V(z_0, \theta)$ kan vi betragte den absolutte værdi af summen $\sum_{\xi\leq\lambda_n<\eta} a_n e^{-\lambda_n z}$. Ved at bruge (1) to gange fås:

$$\begin{aligned}&\left|-A(\xi)e^{-\xi z} + z\int_{\xi}^{\eta} A(\lambda)e^{-\lambda z}d\lambda + A(\eta)e^{-\eta z}\right| \\ &\qquad \leq \left|\epsilon e^{-\xi z}\right| + |z|\left|\int_{\xi}^{\eta} \epsilon e^{-\lambda z}d\lambda\right| + \left|\epsilon e^{-\eta z}\right| = \epsilon e^{-\xi x} + |z|\epsilon\int_{\xi}^{\eta} e^{-\lambda x}d\lambda + \epsilon e^{-\eta x}\end{aligned}$$

Hvis vi sætter ϵ udenfor en parentes, og udregner integralet, fås:

$$\epsilon\left(e^{-\xi x} + e^{-\eta x} + |z|\frac{1}{x}\left(e^{-\eta x} - e^{-\xi x}\right)\right) \leqslant \epsilon\left(1 + 1 + \frac{|z|}{x}(1-0)\right) \leqslant \epsilon\left(2 + \frac{1}{\cos\theta}\right)$$

Da denne vurdering også gælder i z_0, har vi hermed fundet en øvre grænse på hele vinkelrummet $V(z_0, \theta)$, og derfor konvergerer rækken uniformt på dette. □

Sætning 3 følger nu som et direkte korrolar af denne sætning.

En anden skærpelse af sætning 3 er følgende resultat:

Sætning 5. *Antag Dirichletrækken $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$ har begrænsede afsnit for z_0, så er rækken konvergent for $\Re z > z_0$.*

Bevis. Ligesom før kan vi antage, at $z_0 = 0$, så degenererer rækken igen til summen af koefficienterne, og vi har derfor for alle λ, at $A(\lambda) \leqslant K$. For $\xi < \eta$ får vi af (1) at

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\xi\leqslant\lambda_k\leqslant\eta} a_k e^{-\lambda_k z}\right| &= \left|-A(\xi)e^{-\xi z} + \int_{\xi}^{\eta} zA(\lambda)e^{-\lambda z}d\lambda + A(\eta)e^{-\eta z}\right| \\ &\leqslant \left|A(\xi)e^{-\xi z}\right| + \left|\int_{\xi}^{\eta} zA(\lambda)e^{-\lambda z}d\lambda\right| + \left|A(\eta)e^{-\eta z}\right| \\ &\leqslant \left|Ke^{-\xi z}\right| + \left|Kz\int_{\xi}^{\eta} e^{-\lambda z}d\lambda\right| + \left|Ke^{-\eta z}\right|\end{aligned}$$

[3] Bemærk at det ikke generelt gælder for Dirichletrækker at summen af koefficienterne er konvergent. I Riemanns ζ-funktion som er et klassisk eksempel på en Dirichletrække, er a_k f.eks. lig 1 for alle k.

Hvis vi nu flytter K'erne ud, udregner den numeriske værdi af eksponentialfunktionerne, og derefter vurderer integralet, fås:

$$\begin{aligned}\left|Ke^{-\xi z}\right| + \left|Kz\int_\xi^\eta e^{-\lambda z}d\lambda\right| + \left|Ke^{-\eta z}\right| &\leqslant Ke^{-\xi x} + K|z|\int_\xi^\eta e^{-\lambda x}d\lambda + Ke^{-\eta x} \\ &= Ke^{-\eta x} + K\frac{|z|}{x}\left(e^{-\eta x} - e^{-\xi x}\right) + Ke^{-\eta x}\end{aligned}$$

Hvis vi sætter K'erne udenfor en parentes, og udnytter at $0 < e^{-\eta x} < e^{-\xi x} \leqslant 1$, fås

$$\begin{aligned}Ke^{-\eta x} + K\frac{|z|}{x}\left(e^{-\eta x} - e^{-\xi x}\right) + Ke^{-\eta x} &\leqslant K\left(e^{-\xi x} + \frac{|z|}{x}e^{-\eta x} + e^{-\xi x}\right) \\ &\leqslant K\left(2 + \frac{|z|}{x}\right)e^{-\xi x}\end{aligned}$$

For alle $\epsilon > 0$ findes et Λ, så denne størrelse er mindre end ϵ for $\Lambda < \xi < \eta$, og rækken er følgelig konvergent. □

Vi bemærker, at vi i modsætning til for absolut konvergens ikke kan udtale os om forholdene på konvergensabcissen. Faktisk kan der ske tre forskellige ting:

1. Rækken er konvergent på hele linien.
2. Rækken er konvergent i nogle punkter, men divergent i andre.
3. Rækken er divergent på hele linien.

Bemærk at vi ikke udfra sætning 4 kan se den tredje mulighed, det kan vi derimod udfra sætning 5.

Vi har altså nu vist, at en Dirichletrække kan have en lodret strimmel, hvor der „kun“ er betinget konvergens. For Dirichletrækker af „potensrækketypen“ ved vi imidlertid at konvergensabcissen og absolut konvergensabcissen må være sammenfaldende. Dette gælder endvidere for alle Dirichletrækker, hvor samtlige a_k'er er positive, idet konvergens og absolut konvergens på den reelle akse i så fald kommer ud på ét.

Entydighed

Et andet lighedspunkt mellem potensrækker og Dirichletrækker er eksistensen af en entydighedssætning. Her gives et bevis, der er en let generalisation af det bevis, Bohr [1] giver for Dirichletrækker af speciel type.

Lad $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$ være en Dirichletrække med konvergensabcisse γ og absolut konvergensabcisse $\alpha < \infty$, og sæt $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$, som er holomorf for $\Re z > \gamma$ og specielt for $\Re z \geqslant \alpha$.

Lemma 6. *For alle naturlige tal N og alle $\tau \geqslant \alpha$ findes en konstant K (afhængig af N og τ) så:*

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}\right| \leqslant K e^{-\lambda_{N+1}\Re z} \quad \textit{for } \Re z \geqslant \tau$$

Bevis. Ved gentagen anvendelse af trekantsuligheden og simple omskrivninger fås:

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}\right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \left|a_k e^{-\lambda_k z}\right| = \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \left|e^{-\lambda_k z}\right| = \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| e^{-\lambda_k \Re z}$$

Nu kan vi skrive $\Re z$ som $\tau + \Re z - \tau$, og hvis vi derefter udnytter at $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, fås:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| e^{-\lambda_k \tau} e^{-\lambda_k (\Re z - \tau)} \leqslant e^{-\lambda_{N+1}(\Re z - \tau)} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| e^{-\lambda_k \tau} = K e^{-\lambda_{N+1} \Re z}$$

Hvor $K = e^{\lambda_{N+1}\tau} \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| e^{-\lambda_k z}$ (summen er konvergent, da $\Re z \geqslant \alpha$), hvorved det ønskede er bevist. □

Lemma 7. *Lad N være det mindste index så $a_N \neq 0$,*[4] *så gælder:*

$$|f(z)| \geqslant |a_N| e^{-\lambda_N \Re z} - K e^{-\lambda_{N+1} \Re z} \quad \textit{for } \Re z \geqslant \alpha$$

Bevis. Vi betragter størrelsen $|f(z) - a_N e^{-\lambda_N z}|$, et par simple omskrivninger og lemma 6 giver følgende vurdering:

$$\begin{aligned}\left|f(z) - a_N e^{-\lambda_N z}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z} - a_N e^{-\lambda_N z}\right| &= \left|\sum_{k=N}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z} - a_N e^{-\lambda_N z}\right| \\ &= \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}\right| \leqslant K e^{-\lambda_{N+1} \Re z}\end{aligned}$$

En variant af trekantsuligheden giver os:

$$\left|a_N e^{-\lambda_N z}\right| - |f(z)| \leqslant \left|f(z) - a_N e^{-\lambda_N z}\right| \leqslant K e^{-\lambda_{N+1} \Re z}$$

Ved at omskrive lidt på $\left|a_N e^{-\lambda_N z}\right|$ og flytte det over på den anden side fås:

$$-|f(z)| \leqslant K e^{-\lambda_{N+1} \Re z} - |a_N| e^{-\lambda_N \Re z}$$

Ved at gange igennem med -1 fås det ønskede. □

Kvotienten mellem de to led på højresiden er

$$\frac{|a_N| e^{-\lambda_n \Re z}}{K e^{-\lambda_{N+1} \Re z}} = \frac{|a_N|}{K} \left(\frac{e^{\lambda}_{N+1}}{e^{\lambda_N}}\right)^{\Re z}$$

Den første brøk er en konstant, og da $\lambda_{N+1} > \lambda_N$ er ${}^{1}\frac{e^{\lambda}_{N+}}{e^{\lambda_N}} > 1$, og for $\Re z \to \infty$ går denne kvotient også mod uendelig, specielt bliver den større end 2, for $\Re z$ tilpas stor. Dermed kan vi slippe af med vores K, og for $\Re z$ tilpas stor vurdere $|f(z)|$ som følger:

$$|f(z)| \geqslant |a_N| e^{-\lambda_N \Re z} - K e^{-\lambda_{N+1} \Re z} \geqslant |a_N| e^{-\lambda_N \Re z} - \frac{1}{2} |a_N| e^{-\lambda_N \Re z} = \frac{1}{2} |a_N| e^{-\lambda_N \Re z} \tag{2}$$

[4] Hvis et sådant ikke findes er Dirichletrækken identisk lig 0, og som sådan uinteressant

Lemma 8. *Hvis $f(z)$ har en følge af nulpunkter z_n, hvis realdele vokser forbi en vilkårlig grænse, dvs.* $\lim_{n\to\infty} \Re z_n = \infty$, *så er alle koefficienterne i Dirichletrækken* 0.

Bevis. Antag der er koefficienter i Dirichletrækken, der ikke er 0, og lad a_N være den første. Ifølge (2) vil $|f(z)|$ så, for $\Re z$ tilpas stor, være nedadtil begrænset af $\frac{1}{2}|a_N|e^{-\lambda_N \Re z} > 0$, men dette er i modstrid med eksistensen af nulpunkter med vilkårlig stor realdel, altså må antagelsen være forkert. □

Sætning 9 (Entydighedssætningen for Dirichletrækker). *Lad der være givet to Dirichletrækker* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$ *og* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\lambda_k z}$ *med absolut konvergensabcisse henholdsvis* $\alpha_1 < \infty$ *og* $\alpha_2 < \infty$, *og kald de tilsvarende holomorfe funktioner f og g. Hvis f og g stemmer overens på en følge z_n af punkter der opfylder* $\lim_{n\to\infty} \Re z_n = \infty$, *så er $a_k = b_k$ for alle k.*

Bevis. Brug lemma 8 på $f(z) - g(z)$. □

Hvis de to Dirichletrækker var af „potensrækketypen" kan vi bemærke, at $w = e^{-z}$ transformationen afbilder følgen af lighedspunkter på en følge med fortætningspunkt i 0 (som også er potensrækkens udviklingspunkt). For at udvide den velkendte sætning for potensrækker til at gælde for Dirichletrækker af enhver type, er vi altså nødt til at skærpe kravene for følgens opførsel.

Det er væsentligt for sætningen, at vi har et område med absolut konvergens, for Bohr [2] har vist, at der findes en Dirichletrække med nulpunkter med vilkårlig stor abcisse, hvilket lemma 8 siger ikke kan forkomme hvis Dirichletrækken har et område med absolut konvergens.

Litteraturliste

[1] Harald Bohr: *Bidrag til de Dirichlet'ske Rækkers Theorie*, 1910.

[2] Harald Bohr: *Beweis der Existenz Dirichletscher Reihen die Nullstellen mit beliebig grosser Abszisse besitzen*, 1911.

[3] G. H. Hardy: *The general theory of Dirichlet's series*, 1915.

[4] Børge Jessen: *Forelæsninger over udvalgte emner fra analysen, forår 1967.*

En Næsten-entydighedssætning for polynomier

Henrik L. Pedersen

1. Vi lader $P(z)$ betegne et polynomium (med komplekse koefficienter) af grad n. Algebraens fundamentalsætning siger, at der er præcis n løsninger til ligningen $P(z) = a$ for hvert givet komplekst tal a. Her er det vigtigt, at vi medregner løsningernes multiplicitet; der er jo ikke sikkert, at der er n forskellige løsninger. Faktisk kan der være alt fra 1 til n forskellige løsninger.

Lad os nu tænke os, at vi løser to ligninger $P(z) = a$ og $P(z) = b$ for to forskellige komplekse tal a of b. Hvor mange *forskellige* løsninger er der i alt til disse ligninger? Der vil faktisk være mindst $n + 1$ forskellige løsninger. Jeg vil endnu ikke afsløre beviset for denne kendsgerning, men blot bemærke, at vi får brug for den under udledningen af artiklens hovedresultat.

I denne artikel skal vi se på et resultat, som man kunne kalde for en næsten-entydighedssætning. Lad os tage to polynomier P og Q af samme ukendte grad og lad os antage, at

$$P^{-1}(\{0,1\}) = Q^{-1}(\{0,1\}). \tag{1}$$

Er der en sammenhæng mellem P og Q?

Hvis $Q = 1 - P$ eller $Q = P$ så kan vi slutte, at relationen (1) gælder. Gælder det omvendte også?

Løsningen på dette problem skyldes Ostrovskii, Pakovitch og Zaidenberg. Jeg hørte Ostrovskii's foredrag ved en konference i Trondheim i Norge i 1996. Løsningen er, synes jeg, meget elegant og ganske indbydende.

Resultatet lyder som følger.

Sætning 1. *Lad P og Q være polynomier af samme grad. Lad A være en kompakt mængde bestående af mindst to punkter. Hvis $P^{-1}(A) = Q^{-1}(A)$ da gælder*

$$P(z) = l(Q(z)),$$

hvor l er en drejning omkring et punkt i den komplekse plan, som fører A over i sig selv.

I mere teknisk terminologi er konklusionen i sætningen altså, at $P(z) = l(Q(z))$, med

$$l(w) = e^{i\phi}(w - a) + a,$$

$\phi \in \mathbb{R}$ og $a \in \mathbb{C}$.

I det tilfælde hvor A består af netop punkterne 0 og 1, er l således en drejning omkring $1/2$ med vinkel π (eller den identiske afbildning).

2. Lad mig starte med at give et par resultater, som omhandler polynomier af samme grad. Resultaterne bevises v.h.a. residueregning og er relativt elementære. Alligevel synes jeg, at man fornemmer et vist *bid* i dem.

Lemma 2. *Lad* $P(z) = p_n z^n + \ldots + p_0$ *og* $Q(z) = q_n z^n + \ldots + q_0$ *være polynomier af samme grad* $n \geq 1$. *Da gælder, for* $a \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{\lambda \in P^{-1}(a)} Q(\lambda) = \frac{nq_n}{p_n} a + b,$$

hvor b ikke *afhænger af* a.

Inden jeg giver beviset, er det godt at sige, at vi i ovenstående sum medregner λ'ernes multiplicitet. Selve **beviset** går på følgende måde. Vi starter med at vælge R så stor, at $|P(z)| \geq |a| + 1$ for alle komplekse tal z, som opfylder $|z| \geq R$. Med dette valg af R er alle nulpunkter for P og for $P - a$ indeholdt i cirkelskiven $|z| < R$. Endvidere vil $|a/P(z)| < 1$, så der gælder også, at

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{(P(z))^{k+1}} = \frac{1}{P(z) - a}.$$

Residuesætningen giver derfor, sammen med ombytning af sum og integral, at

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in P^{-1}(a)} Q(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{Q(z)P'(z)}{P(z) - a}\, dz \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{Q(z)P'(z)}{(P(z))^{k+1}}\, dz.
\end{aligned}$$

Vi ser nu nærmere på hvert enkelt kurveintegral i denne sum. Det første, hvor $k = 0$, er lig med summen af polynomiet Q's værdier i nulpunkterne for P – medregnet multiplicitet. Dette følger igen af Residuesætningen (det er faktisk indholdet i første del af formlen oven over, hvis a er nul). Denne værdi kalder vi for b, og bemærker, at b *ikke* afhænger af a. Om det næste kurveintegral gælder

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{Q(z)P'(z)}{(P(z))^2}\, dz = \frac{nq_n}{p_n}.$$

Igen er Residuesætningen i spil, men det er *lidt* kringlet, så lad mig gå mere i detaljer. Man *kunne* bruge partialbrøksfremstillingen for den rationale funktion inde i integralet, men det er at betegne som værende temmeligt teknisk. Lad mig derfor give følgende argument. Ved Residuesætningen kan man se, at ovenstående integral ikke ændrer værdi, når radius i integrationscirklen vokser. Altså må kurveintegralet have værdien

$$\lim_{S \to \infty} \int_{|z|=S} \frac{Q(z)P'(z)}{(P(z))^2}\, dz.$$

Denne grænseværdi udregnes ved at indsætte parameterfremstillingen $z = Se^{it}$ og så ombytte grænseværdi og integration. Integranden vil nemlig da få udseendet

$$\frac{q_n e^{int} S^n \times np_n e^{i(n-1)t} S^{n-1} + \ldots}{p_n^2 e^{2int} S^{2n} + \ldots} \times iSe^{it},$$

som konvergerer mod inq_n/p_n for S gående mod uendeligt (endda uniformt i variablen t).

Et ganske tilsvarende argument kan anvendes på de øvrige kurveintegraler. Her finder man, at værdierne alle er nul, idet nævnerens grad (i S) er mindst to større end tællerens grad.

Lemma 3. *Lad P og Q være som i Lemma 2. Antag videre, at $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \mathbb{C}$ og $\sum_{j=1}^m \varepsilon_j = 0$. Da gælder*

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \sum_{\lambda \in P^{-1}(a_j)} Q(\lambda) = \frac{nq_n}{p_n} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j a_j.$$

Beviset følger ved at bruge Lemma 2 på hvert af de m led og så udnytte, at $\sum_{j=1}^m \varepsilon_j b = 0$ da b ikke afhænger af j.

3. Nu springer vi over til polynomier af *mindste afvigelse*. Disse polynomier optræder i fundamentet for approksimationsteori. Vi skal bruge to fundamentale (men ikke særligt dybtliggende) resultater om sådanne polynomier. Lad os tage et heltal $n \geq 1$ og en ikke tom kompakt mængde K i den komplekse plan. Vi definerer

$$\mathcal{P}_n = \{P(z) = z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0\},$$

altså er $\mathcal{P}_n$ mængden af *moniske* polynomier af n'te grad. Vi sætter videre

$$||P|| = \max\{|P(z)| \mid z \in K\},$$

for $P \in \mathcal{P}_n$.

Vi skal betragte størrelsen $\inf\{||P|| \mid P \in \mathcal{P}_n\}$. Denne størrelse er et udtryk for, hvor *meget* moniske polynomier af grad n *mindst* må afvige fra nulpolynomiet over K. Et polynomium $P_0 \in \mathcal{P}_n$ kaldes et polynomium af mindste afvigelse hvis

$$||P_0|| = \inf\{||P|| \mid P \in \mathcal{P}_n\}.$$

De første to spørgsmål man bør stille sig selv er naturligvis: Findes et polynomium af mindste afvigelse altid? Og: Hvornår er der kun *et* sådant polynomium? Altså eksistens og entydighed.

Eksistensen følger ved et kompakthedsargument. Generelt er der *ikke* entydighed (og det er vel ikke overraskende). Om entydigheden gælder nedenstående resultat (der iøvrigt går tilbage til Kolmogorov og endda helt til Tonelli). Resultaterne kan findes i f.eks. Lorentz' bog om approksimationsteori, se [1, p.17 og p.26].

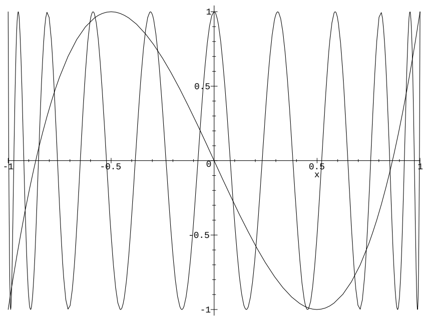
Sætning 4. *Hvis K indeholder mindst $n+1$ punkter så findes et entydigt bestemt polynomium af mindste afvigelse i $\mathcal{P}_n$.*

Polynomier af mindste afvigelse fremkommer, når vi ønsker at beskrive *bedst mulig* approksimation af z^n med polynomier af grad højst $n-1$ over K. Afstanden mellem z^n og $d_{n-1}z^{n-1} + \dots + d_0$ måles som

$$\sup\{|z^n - (d_{n-1}z^{n-1} + \dots + d_0)| \mid z \in K\}.$$

Denne størrelse er imidlertid normen af et monisk n'te grads polynomium. Et polynomium Q af grad højst $n-1$ er dermed en bedst mulig approksimation til z^n hvis og kun hvis $z^n - Q(z)$ er af mindste afvigelse i $\mathcal{P}_n$.

Lad mig bruge lejligheden til at sige lidt mere om tilfældet $K = [-1, 1]$, som vedrører Chebychev polynomier.



Figur 1: To Chebychev polynomier.

I dette tilfælde er polynomiet af mindste afvigelse i $\mathcal{P}_n$ lig med $T_n(x)/2^{n-1}$, hvor T_n er det n'te Chebychev polynomium. Disse Chebychev polynomier opfylder, at

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right).$$

Det vel ikke klart, at det her *er* et polynomium. Men det er det altså. Sædvanligvis defineres følgen $\{T_n\}$ rekursivt eller ved at inddrage cosinus funktionen.

På Figur 1 findes graferne for T_3 og T_{20} (mellem -1 og 1). Følgen $\{T_n\}$ udgør endvidere en ortonormalbasis i Hilbertrummet $L^2(\mu)$, hvor $d\mu(x) = 1/\sqrt{1-x^2}\,dx$ for $x \in]-1, 1[$. Hermed er vi inde i teorien for *ortogonale polynomier.*

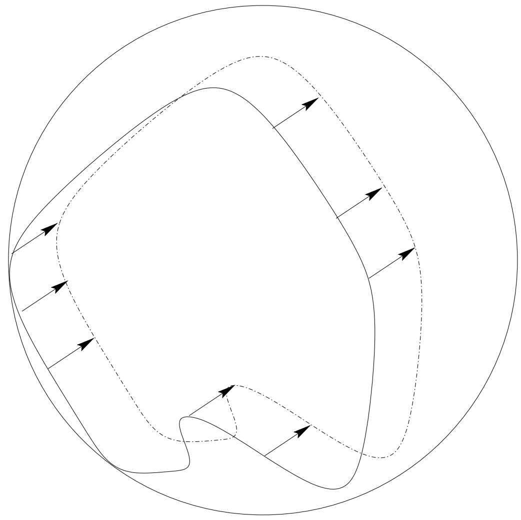
Vi definerer, for et vilkårligt polynomium P,

$$\Delta(P) = P(K) \cap \partial K(0, ||P||).$$

Denne mængde består netop af de punkter i billedmængden $P(K)$, som har størst mulig absolutværdi. I alle tilfælde må $\Delta(P)$ være ikke-tom: hvis den var tom, ville vi kunne gøre radius i cirklen *lidt* mindre. Det strider imidlertid mod definitionen af $||P||$.

En lignende, men vel ikke helt så oplagt, observation er følgende: Hvis P er et polynomium af mindste afvigelse, så kan $\Delta(P)$ *ikke* være indeholdt i en cirkelbue af længde skarpt mindre end halvdelen af omkredsen i $\partial K(0, ||P||)$. Den mest illustrative måde at se det på, er ved at betragte Figur 2. ll ll

Den lidt uformelige fuldt optrukne klat skal forestille værdimængden $P(K)$, medens cirklen har centrum nul og radius $||P||$. Hvis nu værdimængden kun rører ved cirklen i punkter, som er indeholdt i en *lille* cirkelbue, da kan vi – som antydet



Figur 2: Værdimængden $P(K)$ flyttes lidt længere ind i cirklen.

på figuren – flytte værdimængden lidt, så vi får en mængde som ligger helt inde i cirklen. Dermed må denne mængde ligge i en *lidt mindre* cirkelskive med centrum i 0. Med andre ord kan vi altså lægge lidt til konstantleddet i vores polynomium af mindste afvigelse og få et nyt monisk polynomium af samme grad og med mindre norm. Dette strider mod, at vores polynomium var af mindste afvigelse.

Vi får endvidere brug for følgende resultat.

Proposition 5. *Lad os antage, at K er en kompakt mængde, som indeholder mindst $n+1$ punkter. Lad videre $P \in \mathcal{P}_n$ og antag at*

1. $\Delta(P)$ ikke *er indeholdt i en cirkelbue på $\partial K(0, ||P||)$ af længde mindre end $\pi||P||$, og at*
2. $P^{-1}(\Delta(P)) \subseteq K$.

Da er P polynomiet af mindste afvigelse i $\mathcal{P}_n$.

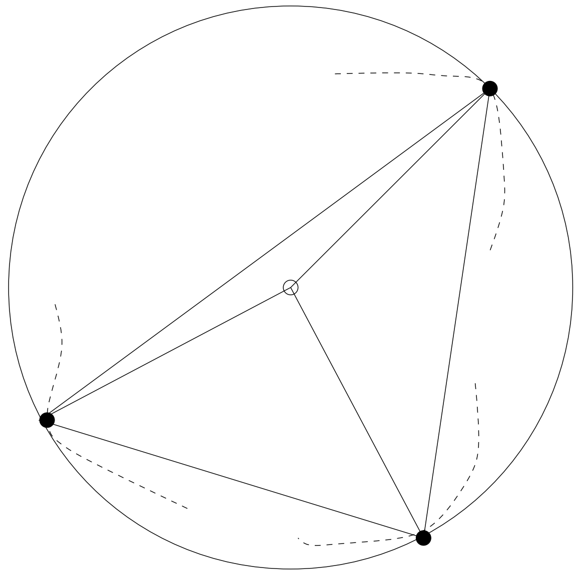
Beviset ser sådan ud. Den første antagelse sikrer, at 0 er en konveks linearkombination af punkter på $\Delta(P)$. Man overbeviser sig om, at det må være tilfældet ved at betragte Figur 3 et stykke tid. Her synes jeg egentligt, at et overbevis er mere velvalgt end et bevis.

Der findes altså $a_1, \ldots, a_m \in \Delta(P)$ og ikke-negative tal $\mu_1, \ldots, \mu_m$ med $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$ sådan, at

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j \overline{a_j} = 0.$$

Vi tager kompleks konjugering her, fordi det viser sig at være smart. Der gælder, idet $|a_j| = ||P||$, at

$$||P||^2 = \sum_{j=1}^{m} \mu_j |a_j|^2.$$



Figur 3: 0 er en konveks kombination af tre sorte punkter i $\Delta(P)$.

Lad nu Q være et vilkårligt monisk n'te grads polynomium. Vi bruger Lemma 3 med $\varepsilon_j = \mu_j \overline{a_j}$ og får da (idet vi husker, at P og Q er moniske polynomier), at

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j \overline{a_j} \sum_{\lambda \in P^{-1}(a_j)} Q(\lambda) = n \sum_{j=1}^{m} \mu_j |a_j|^2.$$

Den *anden* antagelse sikrer os, at hvert λ i sidste sum tilhører K, hvormed $|Q(\lambda)| \leq ||Q||$. Alt i alt har vi således, idet der for hvert j er n λ'er,

$$\begin{aligned} n||P||^2 = n \sum_{j=1}^{m} \mu_j |a_j|^2 &= \sum_{j=1}^{m} \mu_j \overline{a_j} \sum_{\lambda \in P^{-1}(a_j)} Q(\lambda) \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \mu_j ||P||\,||Q|| n. \end{aligned}$$

Dette viser imidlertid, at $||P|| \leq ||Q||$, hvormed P er af mindste afvigelse. Entydigheden følger af Kolmogorov's og Tonelli's sætning.

4. Nu kan vi faktisk give et rimeligt kort bevis for Sætning 1. Lad os defor antage, at $P^{-1}(A) = Q^{-1}(A)$ for to polynomier P og Q af samme grad $n \geq 1$. Vi definerer

$$K = P^{-1}(A) = Q^{-1}(A).$$

Som nævnt i indledningen må K bestå af mindst $n+1$ punkter. Når R er tilstrækkeligt stor, betragter vi mængden

$$M = \left\{ (a, \rho) \middle| |a| \leq R, 0 \leq \rho \leq R, A \subseteq \overline{K(a, \rho)} \right\}.$$

Denne mængde er – ser man – en afsluttet delmængde af den kompakte mængde $\overline{K(0, R)} \times [0, R]$ og er dermed selv kompakt. På grund af dette og – om man vil –

kontinuiteten af funktionen $(a, \rho) \mapsto \rho$ findes der et par $(a, \rho) \in M$ så $A \subseteq \overline{K(a, \rho)}$ og hvor ρ er mindst mulig med denne egenskab. Vi vælger sådant et par og bemærker, ρ må være positiv, idet A består af mindst to punkter.

Vi betragter nu det moniske polynomium $\widetilde{P} = (P - a)/p_n$, som jo afbilder K på mængden $(A - a)/p_n$. Der gælder, at $\Delta(\widetilde{P})$ *ikke* kan være indeholdt i en cirkelbue af længde strengt mindre end $\pi\rho/|p_n|$. For, hvis dette var tilfældet, da kunne vi gøre ρ lidt mindre (som illustreret ved Figur 2) og det strider mod den egenskab ρ har. Videre gælder, pr. definition, at

$$\widetilde{P}^{-1}(\Delta(\widetilde{P})) \subseteq K.$$

Ved at bruge Proposition 5 ovenfor ser vi derfor, at $\widetilde{P}$ må være polynomiet af mindste afvigelse. Et ganske tilsvarende argument giver os, at også $\widetilde{Q} = (Q - a)/q_n$ er polynomiet af mindste afvigelse. På grund af entydigheden må der dermed gælde, at $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$. Da vi også har $||\widetilde{P}|| = \rho/|p_n|$ og $||\widetilde{Q}|| = \rho/|q_n|$ må $|p_n| = |q_n|$ og dermed $p_n/q_n = e^{i\phi}$. Dette giver så

$$P(z) = e^{i\phi}(Q(z) - a) + a = l(Q(z)),$$

med $l(w) = e^{i\phi}(w - a) + a$. Endeligt har vi (som tidligere bemærket), at $P(K) = P(P^{-1}(A)) = A$ (og tilsvarende for Q), så der gælder $A = l(A)$. Med andre ord er A invariant under l.

Hvordan eftervises den kendsgerning, jeg nævnte i indledningen? Man kan tælle nulpunkter for det differentierede polynomium. Jeg vil ikke sige mere om det her; prøv selv at lave argumentet.

Litteraturliste

[1] G. G. Lorentz, Approximation of Functions. Hole, Rinehart and Winston, 1966.

[2] I. V. Ostrovskii, F. B. Pakovitch, M. G. Zaidenberg, *A remark on complex polynomials of least deviation.* Internat. Math. Res. Notices 1996, *no. 14.*

Opgaveløsninger

Kort efter at sidste nummer var kommet på gaden, modtog vi fra Asger Alstrup Nielsen, følgende mulige forklaring på hvorfor ingen havde kunnet løse opgaven om talrækken 1,5,4,9,8,6,7,10,2,3: „Normalt får vi ikke jo opgaverne på dansk, så lad os prøve igen på engelsk: 8 5 4 9 1 7 6 10 3 2, og hvis 11 skal med, skal det ind som nummer 2“. Nu burde alle kunne løse opgaven, og vi vil lade opgaven hvile her. Angående de opgaver vi stillede i sidste nummer, så venter vi spændt på løsninger, vi vil ligefrem overveje at præmiere løsninger.[1]

[1] Bladet har ikke økonomi til at udlode biler eller jordomrejser, men en lille ting kan vi nok finde ud af.

Det politiske liv

Stefan L. Mabit

Er der overhovedet overskud blandt de studerende til studenterpolitik?

Er der plads ved siden af det faglige og sociale engagement? Det er ikke givet på forhånd, og det behøver der ikke nødvendigvis være hos alle studerende. Der kan og bør dog være en interesse hos alle, for det er via politikken på studierne, at vi har inflydelse på vores uddannelser. Derfor dette forsøg på at give stof til eftertanke eller mere præcist at give studenterpolitiske tanker frit løb.

Lokalt står vi i E-bygningen midt i en sammenlægning af studienævnene. En beslutning, der er blevet mødt med lige dele apati og antipati, men ikke desto mindre en realitet. Som studerende kan vi håbe på at det nye studienævn vil være i stand til at se ud over de snævre faggrænser, der skiller vores fag, og sørge for at alle de fire studier varetages på bedst mulig vis. Vi har alle en studerende valgt specifikt for at repræsentere de studerende på vores fag, men man har lov at håbe, at de alle fem vil samarbejde, så de kommer til at fremstå som en samlet repræsentation for de studerende i bygningen.

Over den lokale sammenlægning svæver langt mørkere økonomiske skyer på fakultets- og universitetsniveau. De nærmere omstændigheder for nedskæringerne er grundigt beskrevet i Hovedområdet og den fremtidige betydning for instituttet kan kun de færeste gisne fornuftigt om. En ting, vi som studerende bør gøre os klart, er, at vores studier i krisetider bliver filet, beskåret og opstrammet i et forsøg på at gøre dem økonomisk rentable. Der sker derfor en del ændringer de fleste til det værre, og det er derfor vigtigt, at vi som studerende er med til at vælge det bedste onde. At vi giver vores mening tilkende så studierne ikke skæres ad hoc og at vi støtter vores folk i de forskelllige udvalg ved at komme med input, så de kan manøvrere bedst muligt i det gustne farvand.

Til sidst skal der bemærkes endnu en grund til, at vi bør mere på vagt i den kommende tid. Læs dekanens løse ideer i det seneste nummer af Hovedområdet. Ønsker vi som studerende vores studier beskåret med en femtedel? Ønsker vi, at der kommer kunstige adgangskrav om karakterer? Hvis vi gør det så er den apati som præger den generelle studerende fyldestgørende.