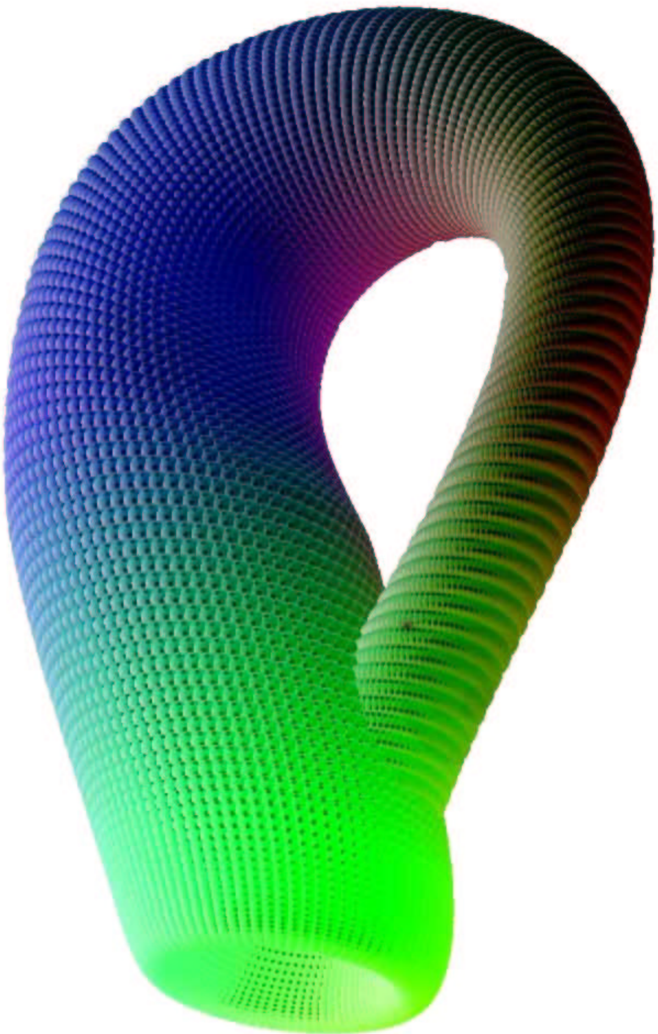
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

13. årgang, nr. 2, december 1999



FAMØS 13.2; december 1999.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)
Peter Lund
Rasmus Resen Amossen

Deadline for næste nummer:
Fredag den 18. februar 2000

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web adresse:
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 700 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder

Velkommen til det nummer af FAMØS, som *ikke* er det sidste i dette årtusind. Her på redaktionen ved vi nemlig godt at der aldrig har været noget år 0, og at det andet årtusind, derfor først ender ved *udgangen* af år 2000! Når der er sagt, er det vel ingen grund til ikke at deltage i den kæmpe nytårsfest, dine mindre indsigstfulde venner har inviteret til i den tro at det bliver årtusindets sidste.

Inden da skal vi lige gennem julen først, forhåbentligvis med masser af gaver og god mad. Men sørg nu for at der også bliver tid til at læse, for i januar kommer eksamen, og hvis det skal være den tredje (eller måske nærmere n'te?) fest, så ved I godt hvad man siger.

Her i lederen er det også nærliggende at harcelere lidt over MF Aase D. Madsens (Dansk Folkeparti) evner ud i den „højere" procentregning, men det har universitetsavisen klaret så ganske glimrende på bagsiden af nummer 19 (fra 2. december). Vi kan dog ikke dy os for at vende en lille tanke. Hvis det nu havde været omvendt, så 61% af mændende og 70% af kvinderne aldrig kom på biblioteket ville Aase D. Madsen, så have sluttet sig til at 131% af den danske befolkning aldrig kom på biblioterne, og forklaret de sidste 31% med alle de fremmede, der helst skulle blive væk, og derfor ikke skal medregnes til befolkningen? Måske skulle man (fra instituttets side) tilbyde Aase D. Madsen et gratis statistikursus, det kan næppe være en uoverkommelig opgave, desværre foregår al kommunikation jo på modtagernes betingelser …

I stedet kan vi så tage tråden op fra en anden af artiklerne på bagsiden af universitetsavisen nemlig den om „Firkantede tanker". Her på redaktionen har vi set mange mærkelige ringe, vi kan dog ikke umiddelbart huske at have set en firkantet, derimod ved enhver der har været til første forelæsning i Mat 2AN, at kugler sagtens kan være firkantede, og det må vel være lige så godt, så man kan da håbe på at drengen fra historien siden hen i livet valgte at læse matematik.

Er matematikere virkelig så kedelige?

Henrik Chr. Grove

Ja, det virker i hvert fald sådan set her fra redaktionen! Okay, vi kan ikke udtale os om *alle* matematikere, men så alle matematikere på Københavns Universitet da.

Hvis man tager sidste nummer af FAMØS, så finder man massevis af opfordringer til at gøre *noget*, men hvad er der så sket i praksis? Vi kan jo begynde fra en ende af.

Størstedelen af lederen blev brugt på at opfordre nye redaktører til at melde sig, så bladet har en chance for at overleve. Én ny redaktør har meldt sig og en stor tak til ham. Rasmus „Rus“ Resen Amossen hedder han, det navn bør lyde bekendt for mange af vores læsere, for Rasmus er en af de studerende der i forvejen gør en masse for os alle, f.eks. har han været rusvejleder et par år. Det er typisk at det skal være de samme få mennesker der laver det hele, heldigvis er FAMØS-redaktionen i forvejen ikke overfyldt med folk der laver en masse andet, men det er primært fordi redaktionen er så lille som den er.

Vi behøver ikke engang bladre før vi finder den næste opfordring (som godt nok primært henvender sig til de mandlige matematikere), faktisk kommer den i det følgende afsnit. Er der ingen matematikere der går i byen for at score?[1] Eller går I aldrig med slips, eller er I bare så kedeligt traditionelle at I holder jer til den klassiske? For forklaringen er vel ikke, at I synes det er så svært at binde en almindelig slipseknude, at I er bange for at kaste jer ud i en ny?

Den næste opfordring finder vi bare to sider længere hen i bladet, hvor vi stillede 4 små opgaver, og selvom det fremgår af løsningerne at der var en fejl i den ene, var der stadig ganske nemme spørgsmål imellem. Hvorfor er der ingen der indsender en løsning? Det kan vel ikke skyldes, at vi ikke eksplicit skriver at løsninger er velkomne?

Vi må desværre indrømme at redaktionen ikke er meget bedre, for vi har ikke skaffet noget indslag med tilknytning til julen. Vi har haft flere ideer, men vi er ikke kommet videre (og det skyldes måske redaktionens begrænsede størrelse), derfor må I nøjes med et ønske om en

Glædelig jul

[1] Her behøver kvinderne ikke holde sig tilbage.

Nyt fra fagrådet

Den 13. oktober holdt fagrådet sin årlige generalforsamling, hvor der som sædvanlig blev valgt nogle personer.

Formand Jeres ærede redaktør[1] Henrik Chr. Grove (andendelsstuderende), blev genvalgt.

Næstformand Som ny næstformand valgtes førsteårsstuderende Esben M. Flachs.

Kasserer Mikkel Øbro blev valgt til ny kasserer. Mikkel er andendelsstuderende, og har tidligere været „storesøster", og er også aktiv i matematikernes fodboldklub (som måske er ved at udvikle sig til noget større) ZFC.

Vi takker Stefan for hans år som næstformand, og Malene Kaul for hendes halve år som kasserer. Fagrådet er de matematikstuderendes[2] studenterorganisation og bl.a. bagland for studenterrepræsentanterne i studienævnet, hvorigennem vi har indflydelse på hvordan studiet skal se ud. Det eneste der kræves for at få indflydelse i fagrådet, er et årskort og en mening. Hvis du har problem der vedrører studiet (i bred forstand), så kontakt fagrådet, f.eks. via e-post `fagraad@math.ku.dk`, vi tager det gerne op. Fagrådsmøderne annonceres ved opslag i E-bygningen og der er sædvanligvis kage til møderne!

[1] Et eksempel på det fænomen der blev nævnt i artiklen „Er matematikere virkelig så kedelige?": Det er de samme få personer der laver det hele.

[2] men også statistikernes, aktuarernes og mat-øk'ernes.

Ikke uden mening

Rasmus Lerchedahl Petersen & Rasmus Resen Amossen

Dette er ikke en helt almindelig artikel, idet der f.eks. forekommer én eneste sætning uden en negation. Dette er ikke en tilfældighed, da artiklens emne netop er intet ringere end negationer.

Negationer, og ikke mindst dobbeltnegationer, har altid været kilde til misforståelser, ofte fordi de benyttes uden omtanke. Her følger et par ikke ualmindelige eksempler.

- „Det skorter ikke på manglende vilje“
- „Gør nu ikke noget jeg ikke ville have gjort“
- „Det er ikke fordi, jeg ikke kan lide dig“
- „Det er ikke sådan, at det ikke kan lade sig gøre“

Da Rasmus Rus gik i gymnasiet, stod der et stort skilt foran gymnasiets cykelstativer med påskriften „Det er ikke tilladt at henstille sin cykel på vejen, cykelstien og fortovet“. Godt nok, var vi elever vokset siden folkeskolen, men vi var ikke blevet så lange at vores cykler[1] kunne strække sig fra vejen, over cykelstien og helt op på fortovet.

I det følgende vil vi diskutere og ikke mindst udføre begrebet „at reducere en sætning“. Hermed menes, at man finder en ækvivalent sætning, der ikke indeholder negationer. Lad os betragte et reelt eksempel, som næppe er en fremmed situation for mange (menes hermed, at det er en ukendt situation for få?). „Det er ufedt ikke at kunne komme hjem uden at skulle tage en natbus“. Ret ufedt med alle de ikke'er, ikke?! Lad os prøve at reducere denne sætning og se om vi ikke får noget mere let tilgængeligt ud af det. Vi starter slavisk fra venstre med „det er ufedt“. Hvis vi i stedet skriver „det er skidt“ undgår vi negationer og får „det er skidt, ikke at kunne komme hjem, uden at tage en natbus“.

Dernæst kigger vi på „ikke at kunne komme hjem“, hvis omskrivning kunne være „at måtte tage et vilkårligt andet sted hen end hjem“. Selvom denne sætning ikke umiddelbart synes at indeholde nogle negationer, vil vi senere (næste sætning) argumentere for, at det gør den faktisk. Vi ser, at der er en reference til „hjem“, som er stedet vi vil undgå at tage til. Den øvrige omskrivning, der jo netop betyder negationen til „hjem“, må således betragtes som netop en negation, og omskrivningen kan derfor ikke accepteres. Det gik altså ikke. Såvidt vi kan se, er der ikke andre muligheder end rent faktisk, at benævne alle de steder man så kan tage hen, hvis man i det hele taget agter at tage nogle steder hen.

Ligeså forholder det sig med vor sætnings sidste led: „uden at tage en natbus“. Øh, hvis man nu sagde „jeg går lige op og børster tænder uden at tage en natbus“,

[1] Kommutativ ringteori er ikke-kommutativ ringteori, men ikke-kommutativ ringteori er ikke kommutativ ringteori.

vil det oftest være tilfældet, at man bare børster sine tænder på ganske normal vis og altså bare kunne have sagt „jeg går lige op og børster tænder“. Vi kan dog ikke se bort fra bussen i dette tilfælde, da den refererer til hjemturen, for hvilken den er essentiel. Som med komplementet til „hjem“ må vi for at beskrive, hvad der ikke er en natbus, uden at skrive „alt *på nær* natbussen“ el. lign., opremse samtlige andre ting i hele verden. Vores „reducerede“ sætning bliver derfor til: „Det er skidt at måtte tage til naboen, Paris, blive stående, synge en sang, lave surdejstærte på Gråbrødre torv i regnvejr, mens Jørgen Hjorting tegner gæs på en brosten, tygge elastikker, lægge sig til at sove, . . . , ved kun at benytte en græsslåmaskine eller en ubåd eller et knækbrød eller et rivejern eller en uzi-saxofon eller to hejrer eller et badekar eller Afrika eller et gyngestativ eller et dejbækken eller en endelig sætning eller bindeord eller de Matematikstuderendes Uofficielle Hjemmeside eller et vækkeur eller en 2AN-forelæsning eller en banan eller to bananer eller tre bananer eller . . . eller en elektrisk Nef eller en æggedeler og en skohylde, der netop er blevet enige om at lefle for en flaske lunken mælk eller et snotmolekyle eller en ratlås på en Mazda 626, der bliver stjålet om et kort øjeblik eller et modem eller fem stykker flæsk iført skjorte og sjakbajs eller fødselsproportionerne for 28 kvinder, fødende børn efter strategi b, beskrevet i første 2SS-projekt 1999 eller tyggegummitropeten eller selvrefererende historier eller en fiskekutter eller en damptromle eller en dagsbus eller...“. Ikke særlig reduceret, må man sige!

Måske er vort sprog konstrueret, så man slet ikke kan undgå negationer. Negationer kan med andre ord udtrykke meninger, der ikke kan udtrykkes foruden. Derfor: Hvis du ikke tror du har forstået det, håber vi blot du heller ikke tror, at du ikke har forstået det.

Faktisk forholder det sig sådan, at en negation til en negation til et udtryk, ikke nødvendigvis er det oprindelige udtryk. Begreber som ikke er binære, vil i almindelighed opfylde ovenstående. Hvis et begreb har flere grader, end bare f.eks. at være eller ikke være, hvoraf nogle meningsfyldt kan negeres, som f.eks uheldigt - tilfældigt - heldigt, hvor uheldigt er negationen til heldigt, betyder „det er ikke uheldigt“ ikke „det er heldigt“, da det måske er tilfældigt.

Et andet eksempel (orv, her var vi lige ved ikke at snige den obligatoriske negation ind i sætningen): „Det er ikke fordi, jeg ikke har noget godt at sige...“. Som så mange gange før, betyder det ikke at personen kun har noget skidt at sige. Det er muligt, at vedkommende ikke har noget at sige overhovedet. Vi vil senere prøve at finde en utvetydig tolkning af denne sætning – dog ikke meget senere, faktisk nu. Først: *Hvad* er ikke fordi? Det man på uundgåelig vis udbryder umiddelbart efter? I så fald betyder sætningen „Nu siger jeg noget skrald om dig, men det er ikke fordi jeg ikke har noget godt at sige“. Hvis ikke derfor, hvorfor er det da? Det må vel være fordi personen foretrækker at sige noget skrald. Altså: „Nu tildeler jeg dig lige en diskret sviner, men det er ikke fordi jeg ikke kan finde på noget mere flatterende, jeg har bare ikke lyst“. Vi håber så, at tildeleren har en nogenlunde sympatisk grund til ikke at have lyst, f.eks. at vedkommende mener, at mudderkastning er på sin plads, måske ligefrem gavligt og personlighedsudviklende.

Man kan nu spørge sig selv, om man kan finde en negation helt uden mening, og svaret er overraskende, at det faktisk ikke er helt umuligt...

Betragt følgende sætning, hvor ordet ‘ikke’ er udefineret, og vi ønsker at definere det, så sætningen bliver sand. „Denne sætning indeholder 'ikke' en negation". Det må betyde, at 'ikke' ikke skal opfattes som negation. Det betyder igen, at sætningen ikke siger, at den ikke indeholder en negation. Da prædikatet „at indeholde en negation" er binært, er der ikke andre muligheder, end at sætningen siger, at den indeholder en negation. Da 'ikke' er det eneste ord, der ikke er defineret, og ingen af de andre ord er negationer, må netop 'ikke' være omtalte negation. Da prædikatet „at være en negation" er binært, kan dette ikke forenes, og vi har et paradoks. Der er altså ingen specifikationer af 'ikke', der gør sætningen sand. Altså er sætningen falsk uanset, hvad 'ikke' betyder, og altså er dette 'ikke' uden mening.

Nu spørger du, kære læser, sikkert dig selv om ikke der er en morale gemt et sted i denne artikkel. Nej, næh nej, det er der ingenlunde. Artiklen havde blot til hensigt, at komme med eksempler på negationernes nødvendighed, hvor let det er at misbruge dem og generelt, at komme tættere på deres natur og betydning for vort sprog. Hvis man tænker over det, kommer man nok frem til, at negationsraten i vort sprog ikke er særlig lav. Er dette tegn på et ufuldstændigt sprog? Er det overhovedet muligt, at have et sprog, der er „pænt" i den forstand, at alle sætninger kan siges uden negationer? Ville det ikke kræve mindst to ord for alting? Det vil føre for vidt, at besvare dette spørgsmål her, delvist fordi, vi ikke er sikre på vi kender svaret. Et tegn på en ufuldstændig indsigt i emnet? Under alle omstændigheder er der ikke mere at læse efter denne sætnings punktum.

En hovedsætning i finansieringsteorien - og lidt om realkreditobligationer

David Lando, Afdeling for Operationsanalyse

Introduktion

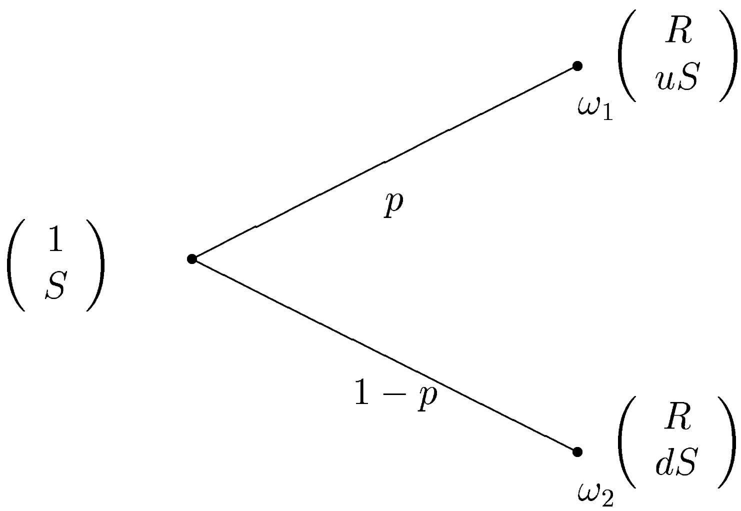
Når der skal skrives noget om matematisk finansieringsteori er det et ritual at nævne Black-Scholes modellen for optionsprisfastsættelse. Men som så ofte ved nyttige matematiske resultater er det egentlig ikke selve formlen der er vigtig, men snarere det ræsonnement som ligger bag udledningen. Formlen bygger på et princip, som er så simpelt, at det er overraskende, at det overhovedet kan producere interessante konklusioner. Princippet er i sin enkelthed at finansielle aktiver, som har identiske fremtidige betalinger, uanset hvordan verden udvikler sig, må koste det samme idag. Hvis man ved hjælp af dette princip ønsker at beregne en 'fair' pris på et finansielt aktiv med komplicerede fremtidige betalinger, er problemet at finde en mængde 'basisaktiver', hvis priser man allerede kender, og heraf udregne prisen på det mere komplicerede aktiv ved simpelthen at skrive det mere komplicerede aktiv som en 'linearkombination' af basisaktiverne. 'Linearitet' af markeder er vigtig her: Hvis et aktiv handles til en bestemt pris, antager vi, at man kan købe og sælge en vilkårlig mængde af dette aktiv til samme pris pr. enhed. Når økonomer skal gøre grin med finansieringsteoretikere påstår de, at mens en økonom forsøger at finde prisen på en flaske ketchup ud fra udbud og efterspørgsel på tomater, forbrugeres nyttefunktioner, udbud af nære substitutter for ketchup etc., så beskæftiger finansieringsteoretikere sig med at finde prisen på to flasker ketchup ud fra prisen på een flaske ketchup, hvilket med en antagelse om lineær prisfastsættelse jo er til at overskue. Det som alligevel gør teorien interessant er en udvidelse af muligheden for at lave 'linearkombinationer' af 'basisaktiver' til dynamiske modeller, dvs. modeller som forløber over flere tidsperioden. Essentielt viser Black-Scholes ræsonnementet, at man ved hjælp af simple 'basis-aktiver' og mulighed for at løbende at handle disse aktiver over tid, kan udspænde en forbløffende rig mængde af 'afledte aktiver'. Formålet med denne artikel er at forklare denne pointe. Da indlægget er en side 9 sætning har jeg også indlagt en slags 'hovedsætning', som antyder, hvordan teorien hører sammen med begreber indenfor stokastiske processer. Faktisk viste teorien for stokastiske processer i kontinuert tid sig at være som skabt til problemer i stil med dem vi skal se på her - selvom denne teori var udviklet som selvstændig disciplin med andre problemer for øje. Denne pointe vil vi dog ikke have plads til at uddybe her. Vi vil også antyde hvordan denne teori kan bruges til at modellere priser på realkreditlån (herunder hvornår man skal indfri sådanne lån).

En-periode modellen

Vi betragter først en model for et finansielt marked over to tidspunkter $t = 0, 1)$ og med to tilstande, ω_1 og ω_2. Ved periodens start $t = 0$ vides intet om hvilken tilstand verden er i, men til tid $t = 1$ afsløres dette. Tilstandene ω_1, ω_2 antages at have sandsynlighederne henholdsvis p og $1 - p$. I modellen er givet to finansielle aktiver:

- En *aktie* som koster $S > 0$ til tid 0 og som er uS værd til tid 1 i tilstanden ω_1 og dS i tilstanden ω_2. Her er d, u ikke-negative konstanter.
- Et *pengemarkedsinstrument* som koster 1 til tid 0 og som er R værd til tid 1 uanset tilstanden.

Vi antager at $0 < d < R < u$. Hvis $R \leq 0$ ville ingen fornuftig person købe pengemarkedsinstrumentet for en strengt positiv pris, og faktisk ville grådige investorer have lyst til at sælge (vilkårligt) store mængder af aktivet. Det ville give en stor indtægt til tid 0 uden fremtidige forpligtelser. Det er også vigtigt, at R ligger klemt inde mellem d og u. (Det er naturligvis ligemeget om d eller u er størst.) Hvis for eksempel R lå under både d og u, ville det altid være at foretrække at holde aktien istedet for pengemarkedsinstrumentet, og man kunne med fordel finansiere et vilkårligt stort køb af aktier ved at låne i pengemarkedet. Det ville være som at have sin egen seddelpresse!



Antag nu, at der indføres et nyt aktiv, en *europæisk call option* på aktien med aftale pris K og *1*. Til tid 1 er værdien af denne call option lig med

$$C_1(\omega) = \begin{cases} [uS - K]^+ & \text{if } \omega = \omega_1 \\ [dS - K]^+ & \text{if } \omega = \omega_2 \end{cases}$$

hvor vi bruger notationen $[X]^+ = max(0, X)$. Tænk på optionen som en kontrakt der giver ret, men ikke pligt, til at købe en aktie for en fast pris K til tid 1. Denne options værdi er præcis den 'rabat' som optionen giver på aktien i forhold til markedsprisen.

Lad $C_u = C_1(\omega_1)$ og $C_d = C_1(\omega_2)$. Spørgsmålet er nu, hvad prisen på denne call option skal være til tid 0. Vi finder svaret ved at skabe optionen kunstigt: Lad (a, b)

betegne henholdsvis antallet af aktier og enheder af pengemarkedsinstrumentet som købes til tid 0. For at porteføljens betaling skal matche optionens uanset tilstand forlanges altså at følgende ligninger er opfyldt:

$$\begin{aligned} a(uS) + bR &= C_u \\ a(dS) + bR &= C_d \end{aligned}$$

dvs.

$$\begin{aligned} a &= \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} \\ b &= \frac{1}{R}\frac{uC_d - dC_u}{(u-d)} \end{aligned}$$

Prisen for at lave porteføljen (a, b) til tid 0 er $aS + b$. Dette må - ifølge vort fundamentale princip om, at ting der giver det samme, koster det samme - være optionens pris og efter lidt regneri ses dette at være

$$C_0 = \frac{1}{R}\left[\frac{R-d}{u-d}C_u + \frac{u-R}{u-d}C_d\right]$$

Hvis vi sætter

$$q = \frac{R-d}{u-d}$$

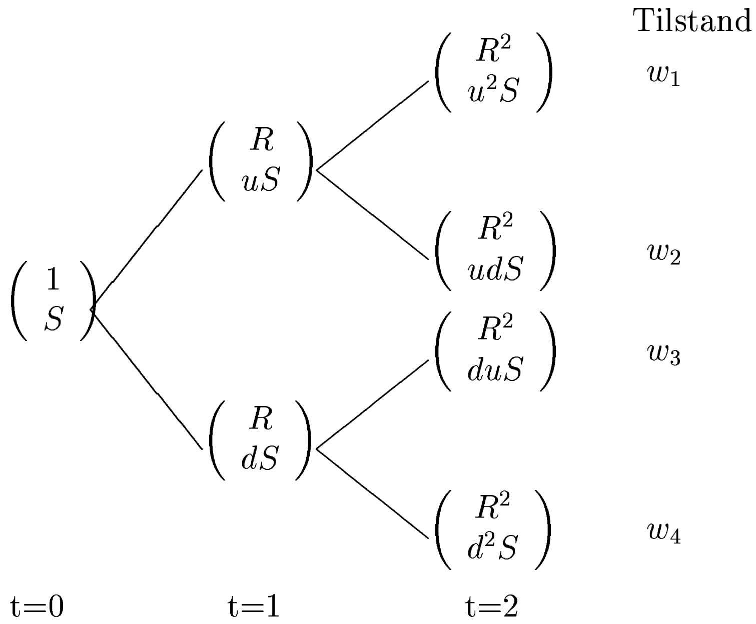
kan vi skrive prisen som

$$C_0 = q\frac{C_u}{R} + (1-q)\frac{C_d}{R}.$$

Læg mærke til at sandsynligheden p ingen rolle spiller for prisfastsættelsen - den er erstattet af en parameter q, som netop på grund af antagelserne om u, d og R kan fortolkes som en sandsynlighed. Vi bemærker også, at der intet specielt er ved optionen - vi kunne have valgt en hvilken som helst anden betalingsprofil til tid 1 og fundet den pris til tid 0, som er konsistent med de i forvejen givne priser.

Flere perioder

Det er naturligvis ikke en realistisk antagelse, at vores usikkerhed om aktiens bevægelser begrænser sig til to mulige værdier. På den anden side taber vi muligheden for kunstigt at skabe optionen, hvis vi indfører flere tilstande. Med for eksempel tre tilstande bliver ligningssystemet ovenfor til et system med tre ligninger med to ubekendte - og så er det kun i uinteressante tilfælde, at vi kan finde løsninger. Man kunne så indføre flere aktiver, men vi vil hellere gå en anden vej. Følgende eksempel viser princippet: Antag at $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ og at der er tre tidspunkter: $t \in \{0, 1, 2\}$. Lad stadigvæk $0 < d < R < u$. Vi specificerer nu aktiens og pengemarkedsinstrumentets opførsel som følger:



Som grafen viser tænker vi os samme mulige udvikling af aktiepris og pengemarkedsinstrumentet som før over den første periode, men for at kunne rumme endnu en periode i modellen har vi måttet anvende fire tilstande. Så for eksempel til tid 1, hvis tilstanden er ω_1 eller ω_2 (og vi tænker os at man ikke kan skelne mellem disse to til tid 1), da er prisen på aktien uS og pengemarkedsinstrumentet er steget til R. Herfra kan aktien så vokse yderligere til u^2S eller falde til duS. Bemærk, at $\omega \in \Omega$ beskriver en hel 'udfaldsfunktion' af aktien og pengemarkedet, dvs ω rummer hele historien til og med tidspunkt 2. Lad os igen som eksempel tage en europæisk call option med udløbsdato T=2 og aftalepris K. Vi vil nu bestemme hvad en fair pris er for denne option til tid 0. Til tid 2 er optionens værdi

$$C_2(\omega) = [S_2(\omega) - K]^+$$

hvor $S_2(\omega)$ er aktiens værdi til tid 2 hvis tilstanden er ω.

Det er håbløst generelt at finde en portefølje i aktien og pengemarkedet til tid 0, som kan holdes til tid 2, og som uanset hvad der sker giver samme værdi som optionen. Men vi tillader nu, at porteføljen kan omdannes på det mellemliggende tidspunkt $t = 1$. Og vi kan godt regne ud hvilken portefølje vi ønsker at holde til tid 1: Hvis for eksempel aktien til tid 1 er steget til uS, dvs. den sande tilstand er ω_1 eller ω_2, da ved vi, at der kun er to mulige værdier for aktien til det følgende tidspunkt. Så vi kan til tid 1 bruge argumentet fra en-periode modellen og finde en portefølje som genererer samme cash flow som call optionen til tid 2: Find løsningerne for (a, b) i systemet

$$\begin{aligned} au^2S + bR^2 &= \left[u^2S - K\right]^+ \equiv C_{uu} \\ aduS + bR^2 &= [duS - K]^+ \equiv C_{du} \end{aligned}$$

og beregn prisen på at lave denne portefølje til tid 1 når prisen på aktien er uS. Efter lidt regneri finder man at prisen på porteføljen - og dermed optionens værdi -

i denne situation er

$$C_u \equiv auS + bR = \frac{1}{R}\left[\frac{(R-d)}{(u-d)}C_{uu} + \frac{(u-R)}{(u-d)}C_{ud}\right]$$

Tilsvarende finder vi, at værdien i 'ned-tilstanden', dvs. til tid 1 med en aktiepris på dS, er givet ved

$$C_d = \frac{1}{R}\left[\frac{(R-d)}{(u-d)}C_{ud} + \frac{(u-R)}{(u-d)}C_{dd}\right].$$

hvor $C_{dd} = [d^2S - K]^+$. For nu at have en strategi for dynamisk at skabe call optionen, ser vi, at vi til tidspunkt 0 blot skal sørge for at lave en portefølje, hvis værdi er C_u, når aktien bliver uS værd og C_d, når aktien bliver dS værd. Prisen for at gøre dette er - igen ved anvendelse af en-periode strategien -

$$C_0 := \frac{1}{R}\left[\frac{(R-d)}{(u-d)}C_u + \frac{(u-R)}{(u-d)}C_d\right].$$

hvilket vi med samme definition af q som ovenfor kan skrive som

$$C_0 = \frac{1}{R^2}\left[q^2C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2C_{dd}\right].$$

En investor, som har beløbet C_0, kan altså til tid 0 lave en portefølje bestående af aktien og pengemarkedsinstrumentet, som er enten C_u eller C_d værd til tid 1 afhængigt af aktiens udvikling. Ved derefter at omforme porteføljen til tid 1, dvs. ved (uden brug af ekstra kapital) at flytte penge fra det ene aktiv til det andet, kan investoren lave en portefølje til tid 1 som sikrer at porteføljens værdi matcher optionens til tid 2. Prisen på optionen må så ifølge vort fundamentale princip være C_0. Selvom optionen altså blev mere kompliceret og kunne antage op til fire forskellige værdier (i eksemplet er der dog to af de mulige værdier til tid 2 der er ens), kunne vi stadigvæk nøjes med to aktiver, sålænge vi havde mulighed for at rebalancere porteføljen. Denne indsigt kan virke enkel, men den er ikke desto mindre særdeles produktiv.

Prisprocesser, handelsstrategier og ingen arbitrage

Lad os nu se lidt på matematikken bag disse eksempler. Givet et sandsynlighedsfelt (dvs. mængde, sigma-algebra og sandsynlighedsmål) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med Ω endelig[1]. Lad $\mathcal{F} := 2^\Omega$ (dvs. mængden af alle delmængder af Ω) og antag at $P(\omega) > 0$ for alle $\omega \in \Omega$. Antag endvidere, at der er $T+1$ tidspunkter, startende med tidspunkt 0 og sluttende med tidspunkt T. Et særkende ved teorien for stokastiske processer er en såkaldt *filtrering* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T$ defineret som en voksende følge af σ-algebraer indeholdt i $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_T$. Man kan tænke på filtreringer som en model for hvordan information om den sande tilstand øges over tid. At en mængde A

[1] Egentlig er det lidt krukket at snakke om sigma-algebra, men vi kan ligeså godt antyde hvordan billedet ser ud i modeller med uendeligt tilstandsrum.

tilhører $\mathcal{F}_t$ betyder simpelthen at det uanset hvilket ω der er det 'sande' ω er muligt at afgøre til tid t om hændelsen A er indtruffet eller ej. Vi vil som regel antage, at $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Eftersom Ω er endelig er det måske nemmest at tænke på en $\sigma-$algebra $\mathcal{F}_t$ som frembragt af en klassedeling $\mathcal{P}_t$ af Ω, Elementerne i $\mathcal{P}_t$ er blot *atomerne* i $\mathcal{F}_t$. Bemærk at en stokastisk variabel (dvs. en målelig funktion defineret på Ω) er målelig med hensyn til sigma-algebraen $\mathcal{F}_t$, netop når den er konstant på hvert element i $\mathcal{P}_t$.

Vi definerer nu en stokastisk proces X som en følge af stokastiske variable[2] $(X_0, X_1, \ldots, X_T)$ og siger at X er tilpasset hvis X_t er $\mathcal{F}_t-$målelig for alle $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$. Hermed er maskineriet klar til at modellere finansielle markeder i flere perioder. Et sådant marked består af en vektor af tilpassede *dividende processer*

$$\delta = (\delta^1, \ldots, \delta^N)$$

og en vektor af tilpassede *aktiv processer*

$$S = (S^1, \ldots, S^N).$$

Fortolkningen er som følger: $S_t^i(\omega)$ er prisen på aktiv i til tid t hvis tilstanden er ω. Købes det *i'te* aktiv til tid t giver det køberen retten til de resterende dividender $\delta_{t+1}^i, \delta_{t+2}^i, \ldots, \delta_T^i$.[3] Vi vil også antage, at der i markedet er et pengemarkedsinstrument, som giver lokalt risikofri låne-og udlånsmulighed: Givet en tilpasset proces for *den korte rente*

$$\rho = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{T-1}),$$

som vi er nødt til at antage større end -1 i alle tilstande, og som fordi det er en rente med fordel endda kan tænke på som større end 0. Fra denne defineres pengemarkedsinstrumentet som et aktiv med prisproces

$$\begin{aligned} S_t^0 &= 1, \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1 \\ S_T^0 &= 0. \end{aligned}$$

og tilhørende dividendeproces

$$\begin{aligned} \delta_t^0(\omega) &= \rho_{t-1}(\omega) \text{ for alle } \omega \text{ og } t = 1, \ldots, T-1, \\ \delta_T^0(\omega) &= 1 + \rho_{T-1}(\omega). \end{aligned}$$

Bemærk, at man ved at placere 1 i pengemarkedsinstrumentet til tid t og efterfølgende sælge det til tid $t+1$ får en betaling på $1+\rho_t$, som er kendt allerede til tid t. Derfor kalder vi aktivet for lokalt risikofrit. Den korte rente minder om rentesatser i en bank, der kendes over korte perioder, men som kan ændres med kort varsel[4]. Investeres 1 i pengemarkedsinstrumentet til tid s og reinvesteres dividenderne i samme instrument får man 'renters rente', og beløbet vil til tid t være vokset til

$$R_{s,t} \equiv (1+\rho_s) \cdots (1+\rho_{t-1}).$$

[2]Indeksmængden er her $0, 1, \ldots, T$, men vi vil også se processer som starter til tid 1 eller slutter til tid $T-1$.

[3]Allerede her begynder vi at undertrykke ω i notationen - en gammel tradition i sandsynlighedsregningen ...

[4]Vi er straks noget længere væk fra den barske virkelighed med vores antagelse om, at ind- og udlån har samme rente.

En handelsstrategi er en tilpasset (vektor-)proces

$$\phi = (\phi_t^0, \dots, \phi_t^N)_{t=0,\dots,T-1}.$$

Fortolkningen er, at $\phi_t^i(\omega)$ er antallet af det i'te aktiv som indgår i porteføljen som vælges til tid t hvis tilstanden er ω. Kravet om tilpassethed er meget vigtigt, da det svarer til en antagelse om at investor ikke kan se frem i tiden og udnytte anden viden end den som allerede er afsløret i markedet.

Dividende-processen genereret af strategien ϕ skrives δ^ϕ, og den er defineret ved

$$\begin{aligned}\delta_0^\phi &= -\phi_0 \cdot S_0 \\ \delta_t^\phi &= \phi_{t-1} \cdot (S_t + \delta_t) - \phi_t \cdot S_t \text{ for } t = 1, \dots, T.\end{aligned}$$

Fortolkningen af nederste ligning er simpelthen, at den mængde penge vi får i hånden (eller må hoste op med) til tid t er forskellen mellem værdien af den portefølje, vi bringer med os fra sidste periode og den portefølje vi ønsker at investere i til tid t. Og nu til den definition som skal bruges til at formulere kravet svarende til $d < R < u$ i eksemplerne ovenfor: En *arbitragemulighed* er en handelsstrategi for hvilken δ_t^ϕ er en positiv proces, dvs. en proces som aldrig er negativ, og for hvilken $\delta_t^\phi(\omega) > 0$ for mindst et par (t, ω). En model er *arbitrage-fri,* hvis den ikke indeholder arbitragemuligheder.

En arbitragemulighed er altså en handelsstrategi som uden nogensinde at kræve kapitaltilførsel giver positiv sandsynlighed for at modtage penge på et eller andet tidspunkt.

Hovedsætningen om eksistens af ækvivalent martingalmål

Vi er nu nået til en version af det som på engelsk kaldes 'the fundamental theorem of asset pricing.' Sætningen forklarer det mystiske q som indfandt sig i de simple eksempler ovenfor. Først skal vi have nogle flere begreber på plads: Antag $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_u$. Den betingede middelværdi af en $\mathcal{F}_u-$målelig stokastisk variabel X_u givet $\mathcal{F}_t$ er en stokastisk variabel $E(X_u \,|\mathcal{F}_t)$ som er $\mathcal{F}_t-$målelig og opfylder

$$\int_{A_t} E(X_u \,|\mathcal{F}_t) dP = \int_{A_t} X_u dP$$

for alle $A_t \in \mathcal{F}_t$. [5] I vores simple model med sigma-algebraer frembragt af atomerne, kan vi skrive den betingede middelværdi ovenfor op helt eksplicit som

$$E(X_u \,|\mathcal{F}_t)(\omega) = \sum_{A_v \in \mathcal{P}_u : A_v \subset A_t} X_u(A_v) P(A_v | A_t) \text{ for } \omega \in A_t$$

hvor vi har skrevet $X_u(A_v)$ for værdien af $X_u(\omega)$ på mængden A_v og hvor $A_t \in \mathcal{P}_t$. En stokastisk proces X er en *martingal* med hensyn til filtreringen $\mathbb{F}$, hvis den

[5] Egentlig skal vi i det generelle tilfælde også sige, at X antages integrabel, men i vores endelige tilstandsrum er dette automatisk opfyldt.

opfylder

$$E(X_t \,|\mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1} \quad \text{alle } t = 1, \dots, T.$$

Når det er klart hvilken filtrering der betragtes, vil vi bruge notationen $E_s X(t) := E(X(t)|\mathcal{F}_s)$. Endelig defineres følgende versioner af pris- og dividendeprocesser, hvor alle størrelser er tilbagediskonterede:

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^i_t &= \frac{S^i_t}{R_{0,t}} \qquad t = 0, \dots, T, \\ \widetilde{\delta}^i_t &= \frac{\delta^i_t}{R_{0,t}} \qquad t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

Et sandsynlighedsmål Q på $\mathcal{F}$ er et ækvivalent martingalmål (ÆMM) hvis $Q(\omega) > 0$ alle ω og for alle $i = 1, \dots, N$ gælder

$$\widetilde{S}^i_t = E^Q_t \left(\sum_{j=t+1}^{T} \widetilde{\delta}^i_j \right) \qquad t = 1, \dots, T. \tag{1}$$

Navnet martingalmål har følgende forklaring: Givet en (en-dimensional) prisproces S, hvis tilhørende dividendeproces kun betaler dividende δ_T til tid T. Da giver eksistensen af et ÆMM

$$\widetilde{S}_t = E^Q_t \left(\widetilde{\delta}_T \right) \qquad i = 1, \dots, T-1,$$

En proces, der fremkommer ved at tage en betinget middelværdi af en fast stokastisk variabel med hensyn til en finere og finere sigma-algebra, er en martingal, så processen $(\widetilde{S}_0, \widetilde{S}_1, \dots, \widetilde{S}_{T-1}, \widetilde{\delta}_T)$ er en martingal. Vi kan nu formulere hovedsætningen i tilfældet med endeligt tilstandsrum:

Sætning
For markedet defineret ovenfor er følgende to udsagn ækvivalente:

1. Markedet er arbitragefrit
2. Der eksisterer et ækvivalent martingalmål

Vi vil ikke se på beviset her[6]. Hovedarbejdet i beviset for sætningen ligger i at vise, at ingen arbitrage er ensbetydende med eksistensen af en strengt positiv, lineær prisfunktional F, som er defineret på rummet $\mathbb{L}$ af stokastiske processer på vort filtrerede sandsynlighedsfelt, og som opfylder $F(\delta^\phi) = 0$ for enhver dividendeproces i $\mathbb{L}$, som kan opnås ved en handelsstrategi ϕ. Dette arbejde bygger på en separationssætning ($\mathbb{L}$ er jo bare et endelig-dimensionalt vektorrum). Når funktionalen så er defineret, kan den repræsenteres ved et mål. Det kræver så en passende normering at få et sandsynlighedsmål, og noget arbejde med sindrige handelsstrategier at vise, at målet har martingalmål-egenskaben (1).

[6]Et detaljeret bevis findes i noterne til Investerings-og finasieringsteori på 3. år, og det relevante kapitel fra disse kan findes på `http://www.math.ku.dk/ dlando/frl.htm`.

Om anvendelser i rentestruktur-teori

Lad os til sidst se på et par anvendelser af hovedresultatet. En meget populær anvendelse af teorien er i såkaldt rentestrukturteori, dvs. den teori som forsøger samlet at beskrive udviklingen af priser for obligationer med forskellige løbetider og betalingsprofiler.

Som grundlæggende byggeklods er det naturligt her at bruge *nulkuponobligationer* med forskellige løbetider. En nulkuponobligation (NKO) er en obligation, som kun udbetaler et beløb ved udløbsdatoen. Sådanne obligationer er en slags 'kanoniske enhedsvektorer' i obligations-verdenen.

Lad $P(t, T_i)$, $0 \leq t \leq T_i \leq T$, være prisen til tid t på en NKO med udløbstidspunkt T_i. Hvis vi skulle være helt konsistente med vores notation fra sidste afsnit, burde vi egentlig kun skrive $P(t, T_i)$ for NKO-prisen for $t < T_i$ og så lade en tilhørende dividendeproces klare udbetalingen til tid T_i ved at sætte $\delta(T_i) = 1$. Men for obligationer skriver vi dividenden ind i prisen og vedtager at $P(t, t) = 1$ for alle $t \leq T$. Fra hovedsætningen om arbitragefri markeder følger nu, at en model bestående af pengemarkedsinstrumentet (defineret ud fra den stokastiske kort-rente proces) og NKO'er er arbitrage-fri, hvis og kun hvis

$$\left(\frac{P(t, T_i)}{R_{0,t}}\right)_{0 \leq t \leq T_i}$$

er en martingal for hvert T_i under et ÆMM Q. Det er imidlertid ikke så let lige at skrive en fornuftig model op for den simultane udvikling af NKO'er med alle løbetider (men det ville være let nok at checke, om en model havde et ÆMM). Det faktum, at obligationerne er bundet til at ende i værdien 1, gør dette en smule vanskeligere end blot at modellere en aktie. Når man i virkelighedens verden skal prisfastsætte optioner på obligationer (og i Danmark er alle optioners moder jo realkreditobligationens mulighed for førtidsindfrielse til kurs 100,) så kan man nøjes med at have en fornuftig model under et passende valgt mål Q. Hvis man har en fornuftig proces for den korte rente $\rho = (\rho_t)_{t=0,\dots,T-1}$, definerer

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_t).$$

og ydermere har et mål Q, kan man simpelthen definere obligationspriserne som følger:

$$P(t, T_i) = E_t^Q \left[\frac{1}{R_{t,T_i}}\right] \text{ for } 0 \leq t \leq T_i \leq T, \tag{2}$$

Da er systemet bestående af pengemarkedsinstrumentet og obligationspriserne $(P(t, T_i))_{t=0,\dots,T_i \leq T}$ arbitrage-frit. Dette følger af, at for $t \leq T_i$ er

$$\frac{P(t, T_i)}{R_{0,t}} = \frac{1}{R_{0,t}} E_t^Q \left[\frac{1}{R_{t,T_i}}\right] = E_t^Q \left[\frac{1}{R_{0,T_i}}\right].$$

Hvordan vælger man Q og processen for den korte rente? Dette er en øvelse i det man kalder kalibrering af rentestrukturen, og det er svært at gå i detaljer her. Men ofte foregår det helt simpelt ved, at man arbitrært fastsætter værdien af Q således, at den korte rente går op med sandsynlighed 0.5 eller ned med sandsynligheden 0.5. Ved så at lade størrelsen af springene afhænge af parametre som kan varieres, kan man jo fastsætte disse parametre således, at priserne i modellen svarer til de priser på statsobligationer (der er linearkombinationer af NKOer), som man ser i markedet. Håbet er så, at en model der rammer statsobligationerne ikke tager helt fejl med hensyn til optioner på disse. Lad os til sidst illustrere, hvordan man efter sådan en kalibrering kan begynde at diskutere prisfastsættelse (og dermed førtidsindfrielse) af realkreditobligationer. Vi laver her et simpelt eksempel baseret på et stående lån [7]. I regnerarket[8] nedenfor er angivet parametre u, d, q som specificerer udviklingen af den korte rente: Givet at renten til tid t er ρ_t antager vi, at den springer til $u\rho_t$ med sandsynlighed q og til $d\rho_t$ med sandsynlighed $1-q$. Renten antages at starte på niveauet 5%. Man kan nu ved at benytte (2) beregne priser på nulkuponobligationer. I praksis vil man sætte sine parametre således, at de beregnede priser matcher priser, man kan observere i virkeligheden. Ofte vil dette kræve at u og d kan variere over tid, men samtidig vil man så i praksis også søge at ramme variansen af priser rigtigt - de såkaldte volatiliteter. Nu tænker vi os, at parametrene u, d er valgt så alle beregnede priser på nulkuponobligationer (ikke vist) i fire-periode modellen nedenfor passer med virkeligheden. Vi forestiller os - noget urealistisk - at vi kan klare os med tidsuafhængige u, d. Betragt herefter et 5% stående lån med udløbstid $T = 4$, som vi vil kalde en statsobligation, da dette lån ikke kan indfries før udløb. Til tid $T = 4$ betaler dette lån altså hovedstolen 100 tilbage og en kupon på 5. På tidspunkterne 1,2 og 3 betaler lånet 5 i dividende. For hver periode og hvert muligt niveau af den korte rente er angivet prisen på dette stående lån (99,77 til tid 0, 98,25 i optilstanden til tid 1 etc.). Denne pris er beregnet ved at kombinere passende mængder af nulkuponobligationer. Hvorledes adskiller et lån med førtidsindfrielse sig fra statslånet? Låntager har her mulighed for i hver periode at slippe ud af lånet ved at betale hovedstolen på 100 tilbage (sammen med kuponen hørende til perioden). Herved modtager långiveren (obligationsejeren) hovedstolen 'før tid'. Når renten er faldet er dette ikke så godt for obligationsejeren, som det ville have været at modtage kuponerne på 5% i resten af lånets løbetid. Hvor meget mindre skal obligationen med mulighed for førtidsindfrielse så koste? Dette problem løses 'baglæns'. Hvis lånet med førtidsindfrielse (som vi kalder RKO for at det skal lugte af realkreditobligationer) ikke er blevet indfriet til tidpunkt 4, er dets værdi den samme som statsobligationens, da de jo begge udløber her. Hvis RKOen ikke er indfriet til tid 3, har låntageren mulighed for at slippe ud af lånet ved at betale 100, men kan også vente en periode med at betale 100 og skal så også betale 5 i kupon til tidspunkt 4. Værdien af RKO'en beregnes så i alle mulige tilstande for den korte rente til tid 3 ved at sammenligne værdien af 100 med $105/(1+\rho_3)$, som er værdien af obligationen til tid 3, hvis den ikke indfries. Vi ser, at ved et lavt renteniveau kan det bedste betale sig for låntager at indfri lånet, og da vi antager at låntager handler rationelt, bliver værdien af

[7] De fleste realkreditlån er set fra låntagers side en annuitet, mens køberen af en realkreditobligation har et stående lån, når der ikke tages hensyn til konvertering. De løbende afdrag, som låntager leverer fordeles ved 'udtrækning' mellem långivere. Men tænk ikke på det her.

[8] En Excel fil med dette regneark (Ark 2 i filen) kan hentes fra `http://www.math.ku.dk/~dlando/frl.htm`.

RKOen derfor 100. (Værdien af statsobligationen ved et renteniveau på 3,65% til tid 3 er 101,31). Ved samme procedure arbejder man sig nu tilbage i træet og finder værdien af RKO til tid $t-1$ som

$$RKO_{t-1} = \min\left(100, E_{t-1}\frac{RKO_t + 5}{1+\rho_{t-1}}\right)$$

hvilket netop afvejer værdien af den førtidsindfriede obligation (100) mod værdien af i næste periode t at modtage kuponen 5% og sidde med RKOen på hånden. Som vi ser, får realkreditobligationen mindre værdi end statsobligationen. Da man i beregning af effektiv rente for obligationer ikke tager højde for førtidsindfrielse, får realkreditobligationen herved en højere effektiv rente end statsobligationen. De effektive renter er beregnet til 5,07% for statsobligationen og 5,25% for RKOen. Endelig er som et kuriosum indlagt prisen på en obligation med førtidsindfrielse, hvor der (meget realistisk) er omkostninger ved at indfri. Dette vil sige, at låntager reelt skal betale 100 + omkostningerne for at slippe ud af lånet før tiden. Sættes denne omkostning, som angivet i arket, til 1 vil det i nogle tilfælde forsinke eller helt eliminere førtidsindfrielse, da renten skal falde mere, for at det kan betale sig at indfri. Herved kommer den effektive rente på RKOen tættere på statsobligationens. Og vi ser at omkostningerne ved at indfri kan forklare, at man observerer kurser på RKOer, som er over 100.

I praksis er beregning af priser på RKOer et vanskeligt problem, fordi den adfærd husejere rent faktisk udviser ikke lader sig forklare som løsningen til et simpelt optimeringsproblem. Dels har alle jo ikke samme modeller for renten, og dels (og nok mere rammende) har folk varierende grad af interesse i problemet og sidder derfor slet ikke og regner på problemet. Men princippet bag de beregninger, som pengeinstitutterne baserer deres anbefalinger på, er ganske godt illustreret i nedenstående model:

u	1,12		Kort rente		Effektiv				Hovedstol
d	0,9		RKO med	omk.	5,11%				
q	0,5		RKO		5,25%				
Kort rente, T=0	5,00%		Stat		5,07%				
Kupon i %	5						98,11	7,87%	100,00
Omkostning	1						98,11		
					97,63	7,02%	98,11		
					97,63				
			98,25	6,27%	97,63		99,39	6,32%	100,00
			98,15				99,39		
	99,60	5,60%	98,25		99,88	5,64%	99,39		
	99,12				99,67				
5,00%	99,77		100,90	5,04%	99,88		100,44	5,08%	100,00
			100,00				100,00		
		4,50%	101,26		101,00	4,54%	100,44		
					100,00				
				4,05%	101,75		101,00	4,08%	100,00
							100,00		
						3,65%	101,31		
								3,28%	100,00
T=0		T=1		T=2		T=3		T=4	

Hyggehjørnet

Rasmus Resen Amossen

For det tilfældes skyld at julen falder dig lang, er her et par opgaver at more dig med. Selvom det ikke burde være nødvendigt, så lad os pointere, at vi meget gerne modtager løsninger fra de ærede læsere.

Opgave 1

Et tal $h \in]0,1]$ kaldes (i denne opgave) for en vandret afstand, hvis der for alle kontinuerte funktioner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, med $f(0) = f(1)$, findes et $x \in [0, 1-h]$ så $f(x) = f(x+h)$. Vis at hvis h er en vandret afstand, så er $h = \frac{1}{n}$ for et naturligt tal n.

Opgave 2

Tegn en trekant. Tegn et kvadrat på hver af siderne (så det vender væk fra trekanten og har siden som side, ja). Marker hvert af kvadraternes midtpunkter. Tegn streger fra hvert af de netop markerede punkter til trekantens modstående hjørnepunkt. Vis at de tre streger, du lige har tegnet, skærer hinanden i samme punkt.

Opgaveløsninger

Henrik Chr. Grove

Opgave 1

Opgaven var at gætte systemet i følgende opskrivning af de naturlige tal fra 1 til 10:

$$1, 4, 5, 9, 8, 6, 7, 10, 2, 3$$

Det er måske forståeligt at ingen har kunnet løse denne opgave, for der havde indsneget sig en lille fejl, den rigtige rækkefølge er:

$$1, 5, 4, 9, 8, 6, 7, 10, 2, 3$$

Enhver der har haft en idé om den rigtige løsning, burde dog have fundet denne fejl, så måske skal vi give et lille vink: Hvis 11 blev tilføjet, ville det stå først.

Opgave 2

Opgaven lød: Vis, at der ikke findes noget naturligt tal n så $n!$ ender på *præcis* 11 nuller.

Eftersom $(n-1)!$ pr. definition går op i $n!$, er det klart at antallet af nuller i $n!$ er ikke-aftagende. Der kommer et nyt nul til sidst hver gang vi har ganget med $10 = 2 \cdot 5$, og da $2 \ll 5$ er det nok at se på hvornår vi tilføjer en faktor 5. Den første faktor 5, kommer i 5!, den næste i 10!, den tredje og fjerde i henholdsvis 15! og 20!. Eftersom $25 = 5 \cdot 5$, kommer der to nye 5-taller som faktor i 25!, der derfor ender på ikke 5, men 6 nuller. Hvis vi fortsætter, finder vi at det 10'ende nul kommer i 45!, og det næste kommer når vi når til 50, men 25 går op i 50, og derfor får vi endnu engang 2 ekstra nuller på engang, og vi når derfor op på 12 nuller.

Opgave 3

Opgaven handlede om at åbne og lukke skabe, efter et sindrigt system.

Lad os først bemærke at et skab bliver rørt (og dermed skifter status) af præcis de studerende hvis nummer er divisor i skabets nummer.

Det første spørgsmål var hvilke skabe der ville være åbne til sidst, det vil være de skabe der er blevet rørt et ulige antal gange. Hvis d er divisor i n er n/d også en divisor, og divisorerne kommer således normalt i par, sådan at de fleste skabe bliver rørt et lige antal gange (og derfor ender med at være lukkede). Undtagelsen er de skabe, for hvilke $d = n/d$ for en af divisorerne d. Hvis vi skriver lidt om på betingelsen, får vi $n = d^2$, de skabe der er åbne til sidst vil altså være de skabe hvis nummer er et kvadrat, eller helst præcist skabene med numrene 1,4,9,16,25,36,49,64,81 og 100.

Det næste spørgsmål var hvilke skabe der bliver rørt præcis to gange. Eftersom ethvert tal har mindst to trivielle divisorer 1 og tallet selv, bliver alle skabe rørt mindst to gange, og svaret er derfor alle de tal der kun har de to trivielle divisorer, altså de tal vi normalt kalder primtal. Konkret er det de 25 skabe med numrene $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89$ og 97.

Det tredje spørgsmål var hvilke skabe der blev rørt flest gange. Omsat til ren talteori er det spørgsmålet om hvilke tal der har fleste divisorer. Lad os kalde antallet af divisorer i N for $t(N)$. Hvis vi primfaktoropløser N som $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$, er $t(N) = \prod_{i=1}^{k}(1 + r_i)$, for vi kan tage primtallet p_i med fra 0 til r_i gange.

Hvis en af primfaktorerne er større end 10, må produktet af de resterende være mindre end 10. Man kan hurtigt tælle sig frem til at vi maksimalt når 4 divisorer i et tal mindre end 10, og $t(N)_{\max}$ derfor er 8, hvis en af primfaktorerne er større end 10.

Hvis den største primfaktor i N er 7, går enten 7 eller 49 op i N. Man indser hurtigt, at hvis 49 går op så kan en resterende faktor højst være 2, og $t(N)_{\max} = 6$. Så lad os skrive $N = 7k$, så er $k \leqslant 14$, og ved at forsøge sig frem, finder man at vi får flest divisorer for $k = 12$, og dermed $N = 84$ og $t(84) = 12$.

Hvis den største primfaktor i N er 5, må enten 5 eller 25 gå op i N, hvis 25 går op kan en resterende faktor højst være 4, og man finder hurtigt $t(N)_{\max} = 9$. Så lad os skrive $N = 5k$, så er $k \leqslant 20$, og ved endnu en gang at forsøge sig frem fås at vi får flest divisorer for $k = 12$ og $k = 18$, med $t(60) = t(90) = 12$.

Det sidste tilfælde er $N = 2^m 3^n$, og her kan vi stille muligheder op som følger:

n	$m_{\max}$	N	$t(N)$
0	6	64	7
1	5	96	12
2	3	72	12
3	1	54	8
4	0	81	5

Svaret er altså skabene med numrene 60, 72, 84, 90 og 96.

Opgave 4

Opgaven var at vise, at man blandt $2n - 1$ heltal altid kan finde n, hvis sum er delelig med n.

Lad os bemærke at hvis opgaven kan løses for a og b så kan den også løses for ab. Hvis vi har $2ab - 1$ heltal, kan vi tilfældigt udvælge $2a - 1$ og blandt dem vælge a hvis sum er delelig med a. Bliv ved med at gøre dette indtil du har mindre end $2a - 1$ tal tilbage, så har du $2b - 1$ mængder af a tal. Lad nu a_i betegne summen af tallen i den i'te mængde, divideret med a. Blandt disse $2b - 1$ tal, kan vi finde b hvis sum er delelig med b, hvis vi så tager de tal der lå i hver af de b tilsvarende mængder, har vi ab tal hvis sum er delelig med ab.

Vi kan derfor antage at $n = p$ er et primtal. Lad vores heltal hedde $x_1, \ldots, x_{2p-1}$ og være reduceret mod p og ordnet efter størrelse (ingen af delene påvirker opgaven). Sæt $y_i = x_{i+p} - x_i$, for $0 < i < p$, og sæt $a = \sum_{i=1}^{p} x_i$. Hvis vi i denne sum udskifter x_i med x_{i+p} svarer det til at addere y_i, vi skal derfor bare vise at der findes en delmængder af y'erne hvis sum er kongruent med $-a \mod p$, så ved vi nemlig hvilke x_i vi skal udskifte.

Der er nu to muligheder, enten er alle $y_i \neq 0$ for alle i, eller der findes et i så $y_i = 0$. I det sidste tilfælde er $x_i = x_{i+1} = \ldots = x_{i+p}$ (husk at vi sorterede x_i'erne), og så er summen af de p tal $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1}$ delelig med p. Så lad os nu antage at alle y_i'erne er forskellige fra 0.

Lad $A_0 = 0$, og $A_k = A_{k-1} \cup \{q \in \mathbb{Z}_p | \exists a \in A_{k-1} : q = a + y_k\}$. Det er klart at $A_{k-1} \subseteq A_k$, men faktisk gælder der at antallet af elementer i A_k, så vi betegner $|A_k|$ vokser med mindst en indtil $A_k = \mathbb{Z}_p$. Antag nemlig det modsatte, altså at vi ikke får nogle nye elementer ud af at addere y_k til de elementer der allerede er i A_{k-1}. Eftersom 0 er i A_{k-1} må y_k være A_{k-1}, men så $y_k + y_k = 2y_k$ være i A_{k-1} osv. I alt finder vi at alle produkter af y_k (mod p) er i A_{k-1}, men da p er et primtal må $A_{k-1} = A_k$ så være lig $\mathbb{Z}_p$. Vi har derfor at $|A_0| < |A_1| < \ldots < |A_k| = p$, for et $k < p$.

Mængden $\mathbb{Z}_p = A_k$ indeholder elementet $-a \mod p$, og dette betyder at $-a$ kan skrives som y_k plus noget fra A_{k-1}, altså kan $-a$ skrives som en sum af y_i'erne.

Beregning af en sandsynlighed

Bo Markussen

I november tikkede følgende spørgsmål fra en 3.g klasse i Kolding ind på KUATS: „Hvad er sandsynligheden for at der findes en dag i året, hvor ingen ud af 400 elever på en gymnasium har fødselsdag?“ Underforstået er den sædvanlige antagelse om at fødselsdagene er indbyrdes stokastisk uafhængige og ligefordelte på året. Jeg tror spørgsmålet er opstået som et slags omvendt spørgsmål på det klassiske fødselsdags problem: „Hvor mange personer skal der være i en forsamling for at sandsynligheden for, at mindst to af dem har fødselsdag på samme dag, er over 50 procent?“ Under den sædvanlige antagelse er det overraskende svar 23. Når allerede 23 personers fødselsdage klumper sammen med stor sandsynlighed, så er sandsynligheden for at 400 fødselsdage kan nå at dække hele året nok lille. Beregningen af små sandsynligheder kan være meget drilsk, og undertiden er det nødvendigt at tage sofistikerede teknikker i brug. Det nærværende fødselsdags problem kan dog løses med „almindelige“ sandsynlighedsberegninger. Nedenfor bliver sandsynligheden for ditto med 1000 elever også beregnet. Jeg var meget overrasket over svaret jeg fandt.

Jeg selv er for tiden i gang med et ph.d. studium. Et af idealerne vedrørende et ph.d. studium er, at stipendiaten skal formidle sin viden og kunnen til det omgivende samfund. Vi har nok alle prøvet at forklare lægfolk, hvad det er vi går og bruger vores tid på som studerende i et matematisk fag. „Formidling“ er en svær ting, og jeg plejer at kede mine tilhøre med tågede forklaringer. Derfor lod jeg ikke denne chance for at formidle lidt sandsynlighedsregning til nogle interesserede tilhørerer udenfor universitetsverdenen gå min næse forbi. Nedenfor følger brevet jeg skrev som svar på deres spørgsmål.

Kære gymnasieklasse,

dette brev er et svar på jeres spørgsmål angående sandsynligheden for at der på et gymnasium med 400 elever findes en dag i året, hvor ikke mindst en elev har fødselsdag. En af mine forpligtigelser som ph.d. studerende er at „formidle min viden“, og jeg har nedskrevet en udførlig besvarelse af jeres spørgsmål. Jeg starter med at indføre lidt matematisk formalisme. Lad

$$I = \{1.\text{ januar}, 2.\text{ januar}, \ldots, 31.\text{ december}\}$$

være mængden af alle 365 dage i året (vi ser bort fra skudår). Lad A_i, $i \in I$, være den hændelse, at ingen ud af de 400 elever har fødselsdag på datoen i. Lad

$$\begin{aligned} p &= P(\text{der findes en dag i året, hvor ingen ud af de 400 elever har fødselsdag}) \\ &= P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \end{aligned}$$

være den søgte sandsynlighed. Så gælder

$$\begin{aligned} p &= P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\ &= \sum_{J\subseteq I: J\neq\emptyset} (-1)^{|J|-1} P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) \qquad (1) \\ &= \sum_{j=1}^{|I|} \left(\sum_{J\subseteq I: |J|=j} (-1)^{|J|-1} P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{365} \binom{365}{j} (-1)^{j-1} \left(\frac{365-j}{365}\right)^{400}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Ligning (1) følger af det såkaldte *inklusion-eksklusion princip*, som bruges ved beregning af sandsynligheden for foreningen af ikke-disjunkte hændelser. For foreningen af hhv. 2 og 3 hændelser består inklusion-eksklusion princippet i følgende velkendte (!?) formler

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B),$$

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) \\ - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C). \end{aligned}$$

Endelig følger ligning (2) af, at der findes

$$\binom{365}{j} = \frac{365!}{j!(365-j)!}$$

delmængder af I med nøjagtig j elementer. Videre har vi brugt den underforstået antagelse, at de 400 fødselsdage er indbyrdes stokastisk uafhængige og ligefordelt på året, ved hjælp af hvilken vi får

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) &= P(\text{ingen af de 400 elever har fødselsdag på datoerne } J) \\ &= \left(\frac{365-j}{365}\right)^{400}. \end{aligned}$$

Vi har nu fundet en formel med hjælp af hvilken den søgte sandsynlighed kan beregnes, og det er umiddelbart muligt at indsætte andre parametre svarende til et andet antal elever, eller et andet antal dage i året. Her ville det altså være et passende sted at slutte dette brev. Men lad os lige prøve at bruge formelen til at udregne den søgte sandsynlighed. Et computerprogram der gjorde dette kunne have følgende udseende

```
p=0;
for j=1 to 364 do
  p=p+binomial(365,j)*(-1)^(j-1)*exp(400*log((365-j)/365));
```

Jeg har afprøvet dette, og min computer fortæller mig at sandsynligheden p for at der findes mindst en dag i året, hvor man ikke kan fejre mindst en elevs fødselsdag er

$$p = 5.4912 * 10^{25},$$

et overraskende svar på beregningen af en sandsynlighed. Hvordan opstår denne regnefejl i computeren? Hvis vi ser nærmere på formelen (2) så ser vi, at sandsynligheden beregnes som en sum af led med alternerende fortegn. Lad os ændre computerprogrammet lidt således, at det først beregner summen p^+ af leddene med positivt fortegn, derefter summen p^- af leddene med negativt fortegn, og endelig beregner p ved $p = p^+ - p^-$. Så giver min computer følgende svar

$$\begin{aligned} p^+ &= 1.6105 * 10^{40}, \\ p^- &= 1.6105 * 10^{40}, \\ p &= 5.0775 * 10^{25}. \end{aligned}$$

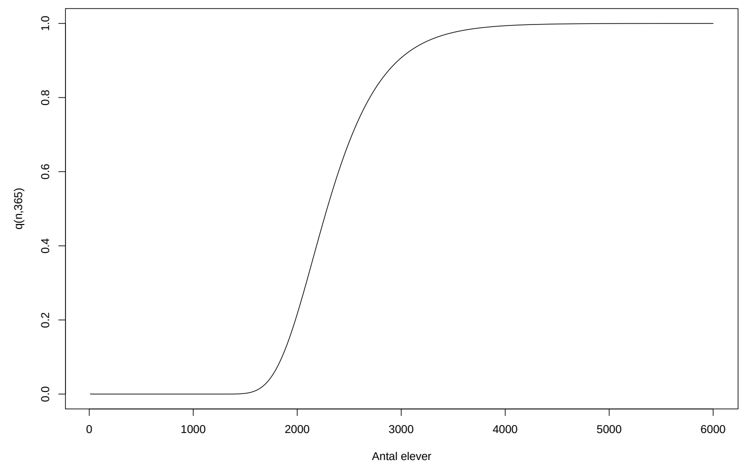
Hvad fortæller dette os? For det første ser vi, at vi får en lidt anden beregning af p ved at ændre rækkefølgen vi lægger leddene sammen i. Mere interessant er det dog at se, at summen af leddene med positivt fortegn, og dermed også af summen af leddene med negativt fortegn, er af størrelsesordenen 10^{40}. Dette er matematisk set helt i orden, idet vi i beregningen af sandsynligheden p jo trækker disse to led fra hinanden, men det giver vores computere, som kun repræsentere reelle tal med et endeligt antal betydende cifre, store problemer. For at vi kan begynde at tro på det svar computeren giver må vi således lade computeren repræsentere reelle tal med, lad os sige, 50 betydende cifre. Ovenstående illustrerer en af faldgrubberne i computerberegninger; man skal passe på beregninger, hvor man trækker to „næsten ens“ tal fra hinanden.

Vi vil derfor lede efter en anden formel til beregning af sandsynligheden. Idet computeren ikke kan kende forskel på sandsynligheder som næsten er 1, vil vi lede efter en formel til beregning af den komplementære sandsynlighed, dvs. sandsynligheden for at der hver dag i året er mindst en elev der har fødselsdag. Lad som før I være mængden af dage, og lad eleverne tage opstilling i en lang række, således at vi kan tale om de første n elever. For en delmængde af dage $J \subseteq I$ og for et antal elever $n \leq 400$, indføres følgende to hændelser

$$\begin{aligned} A_{n,J} &= (\text{de første } n \text{ elevers fødselsdage dækker præcis mængden } J), \\ B_{n,J} &= (\text{de første } n \text{ elevers fødselsdage ligger i mængden } J). \end{aligned}$$

Det ses at $A_{n,J} \subseteq B_{n,J}$. Lad sandsynligheden $q(n,m)$, hvor n er antallet af elever og m er antallet af dage i året, være givet ved

$$\begin{aligned} q(n,|I|) &= P(\text{de første } n \text{ elevers fødselsdage dækker alle dage}) \\ &= P(A_{n,I}). \end{aligned}$$



Figur 1: Sandsynligheden $q(n,365)$ som funktion af antal elever

Idéen er nu følgende: Sandsynlighederne $q(1,m)$, $m \geq 1$, og $q(n,1)$, $n \geq 1$, er lette at finde, og hvis vi kender sandsynlighederne $q(n,m)$, $m \geq 1$, så kan vi finde sandsynlighederne $q(n+1,m)$, $m \geq 1$. Vi har nemlig

$$\begin{aligned} q(1,m) &= \begin{cases} 1 & \text{hvis } m = 1, \text{ dvs. hvis der kun er én dag i året} \\ 0 & \text{hvis } m \geq 2, \text{ dvs. hvis året har mere end en dag,} \end{cases} \\ q(n,1) &= 1, \end{aligned}$$

og via regnereglerne fra sandsynlighedsregningen fås

$$\begin{aligned} q(n+1,|I|) &= P(A_{n+1,I}) \\ &= \sum_{J \subseteq I} P(A_{n+1,I} \cap A_{n,J}) \\ &= P(A_{n,I}) + \sum_{i \in I} P(A_{n+1,I} \cap A_{n,I\setminus\{i\}}) \\ &= P(A_{n,I}) + \sum_{i \in I} P(B_{n,I\setminus\{i\}}) P(A_{n+1,I} \cap A_{n,I\setminus\{i\}} | B_{n,I\setminus\{i\}}) \\ &= q(n,|I|) + \left(\frac{|I|-1}{|I|}\right)^n q(n,|I|-1). \end{aligned}$$

Vi har således vist *rekursionsformlen*

$$q(n+1,m) = q(n,m) + \left(\frac{m-1}{m}\right)^n q(n,m-1).$$

Sandsynligheden $q(400,365)$ kan nu beregnes ved hjælp af følgende computerprogram

```
q(1,1)=1; for m=2 to 365 do q(1,m)=0;
for n=1 to 399 do {
  q(n+1,1)=1;
  for m=2 to 365 do q(n+1,m)=q(n,m)+exp(n*log((m-1)/m))*q(n,m-1);
}
```

Min computer giver da følgende svar

$$\log_{10}(q(400,365)) = -116.7517,$$

dvs. sandsynligheden for at der hver dag i året findes mindst én elev der har fødselsdag, er totalt forsvindende. Men kan vi nu tro på dette svar, eller laver computeren stadigvæk regnefejl? Lad os prøve at lade computeren beregne sandsynligheden $q(365,365)$. Min computer giver

$$\log_{10}(q(365,365)) = -156.8372.$$

Computerprogrammet er formodentlig lige så god til at beregne $q(400,365)$ som det er til at beregne $q(365,365)$. Vi er dog i stand til at beregne sandsynligheden $q(365,365)$ uden brug af computerprogrammet ovenfor. Der gælder nemlig

$$q(n,n) = \frac{n!}{n^n},$$

og vi får

$$\log_{10}(q(365,365)) = -156.8372.$$

Der er altså god grund til at tror på mit computerprograms evne til at beregne sandsynlighederne $q(n,m)$ korrekt. Sandsynligheden $q(400,365)$ er meget lille. Mere overraskende synes beregningen

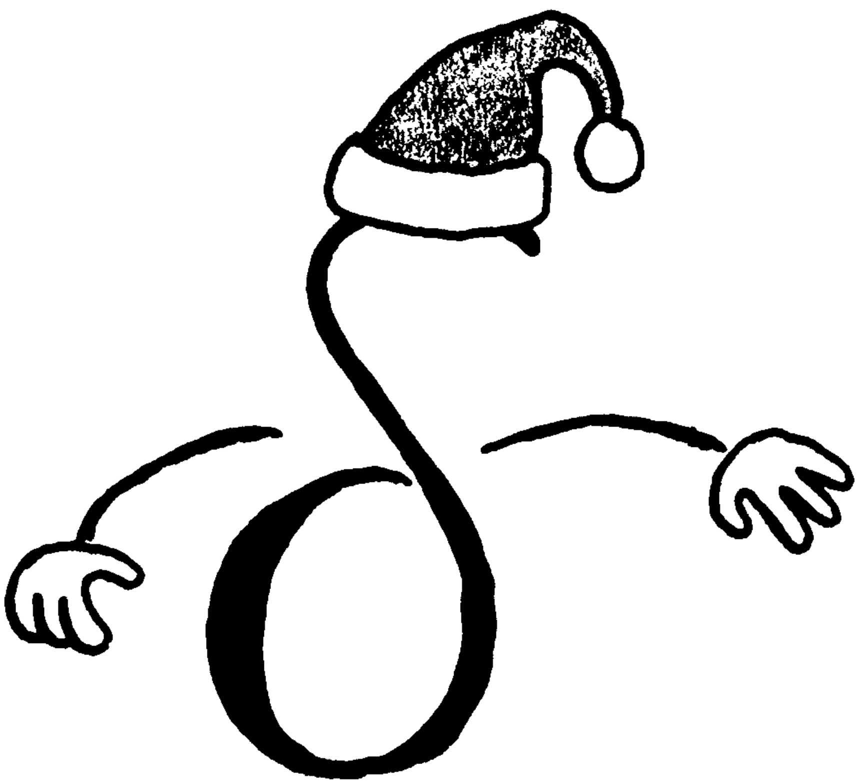
$$\log_{10}(q(1000,365)) = -11.7664$$

at være. Herefter begynder det at hjælpe lidt,

$$q(1460,365) = 0.00093252,$$
$$q(1500,365) = 0.00197828.$$

Hvor mange elever skal der egentlig være på et gymnasium for at man hver dag kan fejre en fødselsdag? På figur 1 har jeg indtegnet $q(n,365)$ som funktion af antal elever n. Ifølge mine beregninger skal der være $n = 2287$ elever på gymnasiet for at synligheden $q(n,365)$ er over 50%.


ε


δ