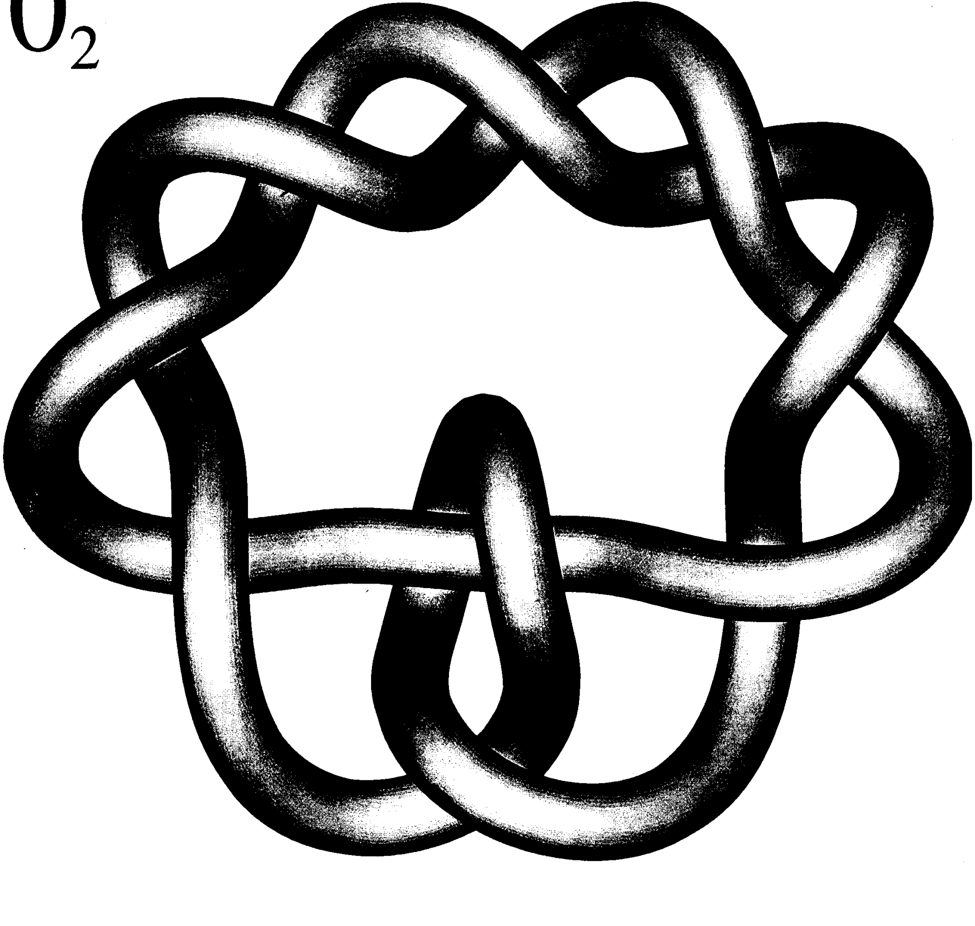
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik
13. årgang, nr. 1, oktober 1999

10_2



FAMØS 13.1; oktober 1999.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)
Rasmus Borup Hansen
Anders Bo Nielsen

Deadline for næste nummer:
Fredag den 26. november 99

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web adresse:
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 700 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder

Velkommen til 13. årgang af FAMØS. Man siger at 13 er et ulykkestal, lad os håbe at det ikke kommer til at betyde at 13. årgang bliver den sidste for FAMØS. Hvis vi ikke får flere redaktører kunne dette imidlertid meget nemt blive tilfældet, vi er sjældent mere end 3 aktive redaktører på hvert nummer, og det er altså lige i underkanten af, hvad der er sjovt. Det er ellers både sjovt og hyggeligt at redigere FAMØS, og det er ikke nogen særlig hård opgave. Den største del af redaktionsarbejdet er de 4 årlige klippe-klistre-møder[1].

Vi kræver ikke andet af dig, for at du kan blive medredaktør, end at du kan afse en lørdag eller søndag 4 gange om året. Selvom du måske ikke selv tror, du er særlig god til matematik, så er du med garanti god nok til at blive FAMØS-redaktør. Hvis det i stedet er LaTeX der skræmmer, har du heller ikke noget at frygte, vi skal hurtigt få lært dig den smule LaTeX, du får brug for, og hvis du alligevel får problemer, kan vi sandsynligvis hurtigt løse dem.

Udover almindelige redaktionsmedlemmer, har vi også hårdt brug for en kreativ person, der kan producere nogle illustrationer, der kan gøre bladet sjovere at læse.

Hvis nogle af jer, inspireret af sidste nummer af FAMØS, har eksperimenteret med slipseknuder, vil vi gerne høre om jeres erfaringer. Hvilke knuder er nemme at binde? Hvilke er gode, når man skal i byen for at score? Tager liberale mennesker afstand fra dig når du bruger kommunistknuden? Billeder er meget velkomne!

Til sidst skal der lyde et ekstra velkommen til alle de nye studerende, vi håber, at I nyder at læse det fag, I nu er gået igang med, og ønsker jer held og lykke med studierne.

[1] Navnet stammer fra en svunden tid, hvor der var både saks og klister involveret i fremstillingen af FAMØS, i dag klarer vi stort set alt på computere.

Semesterstartsfest på Matematisk afdeling

Henrik Chr. Grove

Efter et års pause holdt matematisk afdeling igen i år semesterstartsfest for alle ansatte, andendels- og tredjeårsstuderende.

Arrangementet startede med at Jesper Michael Møller holdt en festforelæsning om knudeteori. Jesper fortalte om begreber som krydsningstal, Rademeistertræk, chirale knuder, Jones- og bracketpolynomier[1]. Undervejs illustrede Jesper et par gange teorien med en plastikslange, som han kunne skille ad og danne forskellige knuder med.

I løbet af forelæsning nævnte Jesper et par uløste problemer som han foreslog tilhørerne at gå hjem og arbejde med; hvis nogen af jer skulle løse et af disse problemer, bringer FAMØS gerne en artikel!

Efter forelæsningen var der fællesspisning i sydenden af vandrehallen. Det havde nok været en god idé hvis arrangørerne havde sørget for en „bordplan“ eller på anden vis sørget for at fordele folk noget bedre, end de selv kunne, faktum er i hvert fald at bortset fra Søren Eilers så havnede samtlige tilstedeværende af de fastansatte ved det samme bord.

Maden var en kinesisk buffet, med et passende antal forskellige retter, og smagte udemærket, og der var nok af den. Desværre var der ikke taget hensyn til vegetarer, så det var lidt trist at sidde overfor Kirsten, der måtte nøjes med at spise de peberfrugter, der var tilbehør til nogle af retterne.

Efter maden var det tid til lidt underholdning, og i år havde arrangørerne fundet på at der skulle være sækkevæddeløb underdørs, så folk fik 5–10 minutter til at danne fem-personers hold. Da der var blevet dannet 7 af disse (hvilket betød at næsten alle tilstedeværende deltog) gik vi alle ud i mørket. Efter en enkelt tyvstart, som blev straffet med en forlængelse af det pågældende holds bane, gik løbet i gang. Da det nogle minutter senere var overstået, var der ingen tvivl om, hvem der var kommer sidst (men vi hænger ikke nogen ud her), hvem der havde fundet var der derimod delte meninger om. Da præmien skulle uddeles måtte dommeren da også indrømme at det havde været så mørkt, at han ikke havde været i stand til at se, hvem der vandt, men var blevet truet til at udnævne „Gorensteins tykke drenge“ til vindere. Nogle af de andre hold protesterede noget, men da der ikke var nogen, der kunne fremvise et matematisk stringent bevis for, at de skulle have vundet, blev det som dommeren sagde.[2]

Alt i alt var det en ganske hyggelig aften, som dog godt kunne have tålt større opbakning fra de ansattes side. En tak til Anders Frankild og Rasmus H. Nielsen som stod for det praktiske i arrangementet.

[1] Efter visse tilhøreres mening, et studium i uheldig notation

[2] Det er på den anden side set ikke værre end for to år siden, hvor underholdningen bestod af en quiz mellem studerende og ansatte, hvor en del spørgsmål var lavet speielt til den ene gruppe (og det var ikke de ansatte), som følgelig vandt en overbevisende sejr.

Opgaver

Henrik Chr. Grove

Opgave 1

Vi kender alle tallene fra 1 til 10, men kender I dem godt nok til at kunne gennemskue systemet i følgende opskrivning?

$$1, 4, 5, 9, 8, 6, 7, 10, 2, 3$$

Opgave 2

Vis, at der ikke findes noget naturligt tal n så $n!$ ender på *præcis* 11 nuller.

Opgave 3

100 studerende får tildelt et skab, nummeret fra 1 til 100. Den første studerende åbner alle 100 skabe, derefter kommer den anden studerende og lukker alle de skabe hvis nummer er et multiplum af 2. Bagefter kommer studerende nummer 3 og skifter status på alle skabe hvis nummer er deleligt med 3, dvs. han lukker skab nummer 3 (som stod åbent9 og åbner skab nummer 6 (som var lukket). Studerende nummer 4 ændrer status for de skabe hvis nummer er deleligt med 4, osv. Spørgsmålene er nu:

1. Hvilke skabe vil være åbne når alle 100 studerende har været forbi?
2. Hvor mange skabe, og hvilke, er blevet rørt præcis 2 gange?
3. Hvilke(t) skab(e) blev rørt flest gange?

Opgave 4

Lad n og $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ være hele tal. Vis, at man altid kan vælge n af x_i'erne sådan at deres sum er delelig med n.

Hukommelse og hovedregning

Rasmus Borup Hansen og Henrik Chr. Grove

I denne artikel skal vi se på matematikere, der har vist ekstraordinære evner til at huske og regne. Vi skal også se på nogle mennesker, der ikke havde matematiske evner, oftest ingen uddannelse, men alligevel var i stand til at fremvise evner indenfor hjernegymnastik, der kunne chokere deres samtidige og stadig i dag kan forbløffe os.

Lad os først nævne John Wallis, hvis regneevner er beskrevet i [2]:

> [Wallis] beskæftigede sig selv med (i hovedet) at udregne heltalsdelen af $\sqrt{3 \cdot 10^{40}}$; og adskillige timer senere skrev han resultatet ned fra hukommelsen. Dette tiltrak en del opmærksomhed, og to måneder senere blev han udfordret til at udregne kvadratroden af et tal med 53 cifre; han gjorde dette i hovedet, og en måned senere dikterede han svaret, uden i mellemtiden at have skrevet det ned.

Selvom dette lyder forbløffende er det ret typisk for de evner, vi skal beskrive i denne artikel. Det er kombinationen af en utrolig hukommelse og regneevner, som ser ud til at forekomme hos mange af dem, vi beskriver. Der er dog et punkt der adskiller Wallis fra de andre, vi beskriver. Han var 53 år gammel, da han udførte de ovenstående handlinger. De fleste af de andre, vi beskriver, var på toppen som børn, ofte omkring 10 år gamle.

Lad os som den næste betragte von Neumann, hvis evner er beskrevet i [5] af Herman Goldstine:

> Så vidt jeg kan sige, var von Neumann i stand til efter at have læst en bog, at gengive den nøjagtigt; han kunne endda gøre det år senere uden at tøve. Han kunne også oversætte den uden hastighedstab fra dens originalsprog til engelsk. Ved en lejlighed afprøvede jeg hans evner, ved at spørge ham, hvordan „Tale of Two Cities" starter. Herpå begyndte han umiddelbart at recitere det første kapitel og fortsatte, indtil han blev bedt om at stoppe efter 10–15 minutter.

Von Neumanns evne til hovedregning er kilden til et stort antal historier, som uden tvivl er blevet bedre med tiden. Det er svært at skelne mellem fup og fakta. Det er imidlertid sikkert, at multiplikation af to 8-cifrede tal i hovedet, var en opgave, han klarede uden at anstrenge sig. Igen lader det til, at von Neumanns næste perfekte hukommelse spillede en stor rolle for hans regneevner.

Andre matematikere, der har vist store evner i hjernegymnastik, er Ampère, Hamilton og Gauss. Kun en matematiker har nogensinde beskrevet i detaljer hvordan han var i stand til at udføre utrolige ting med hukommelse og hovedregning. Det drejer sig om A. C. Aitken, se [6], [1] og [4], hvis metoder vi vil se på senere i artiklen. Lad os imidlertid først beskrive nogle ikke-matematikere.

Zerah Colburns evner er beskrevet i [2], [7] og [8]. Han blev født i Vermont, U.S.A. i 1804 og besøgte i 1812 Europa, hvor han demonstrerede sine evner:

> Han kunne øjeblikkelig finde produktet af to 4-cifrede tal, men han tøvede, hvis begge tal oversteg 10000. Bland de opgaver, han blev stillet, var at opløfte 8 til 16. potens; på få sekunder gav han svaret 281 474 976 710 656, hvilket er korrekt. ... han arbejde langsommere, når han blev bedt om at opløfte 2-cifrede tal som 37 eller 59 til høje potenser. ... Spurgt om faktorerne i 247483, svarede han 941 og 263; spurgt om faktorerne i 171395, sagde han 5, 7, 59 og 83, spurgt om faktorerne i 36083, sagde han, at der ingen var. Han fandt det imidlertid svært at besvare spørgsmål om tal større end 10000.

Colburn er interessant af flere grund. For det første påvirkede han Hamilton til at beskæftige sig med matematik, for det andet udviste han et typisk træk for uuddannede, hurtigregnere, nemlig at hans evner blev mindre, efterhånden som han uddannede sig. Dette er formentlig på grund af, at sådanne evner kræver meget daglig træning, og at uddannelse tager for meget tid.

George Parker Bidder blev født i 1806 i Moreton Hampsted, Devonshire i England. Han mistede ikke sine evne efterhånden som han blev uddannet, og han skrev en interessant beretning om hans evner [3]. Det er værd at nævne, at andre medlemmer af hans familie også havde en ekseptionelle regneevner og hukommelse. En af hans brødre kunne biblen udenad, en anden bror, der var aktuar, var så uheldig at miste alle sine bøger i en ildebrand, men det var ikke et stort problem for ham, idet han i løbet af 6 måneder skrev det hele ned igen efter hukommelsen. En af Bidders sønner var i stand til at gange to 15-cifrede tal sammen, men han var langsommere og mindre nøjagtig end hans far. Bidder beskrev, hvordan lyden af tallene var vigtigere for ham end deres visuelle repræsentation [3]:

> ... hvis jeg bestræber mig på at fiksere tal, der er repræsenteret på papir, i min hukommelse, tager det mig meget længere tid, og det udmatter mig betydeligt mere, end hvis de bliver udtrykt verbalt. ... hvis jeg skal finde produktet af to 9-cifrede tal, som bliver læst til mig, behøver jeg kun høre dem én gang; men hvis de repræsenteres på sædvanlig vis, og jeg får dem i hånden, skal jeg formentlig gennemlæse dem fire gange, før jeg kan gentage dem, og jeg vil ikke forestille dem mig helt så livligt.

I det 19. århundrede var det meget populær underholdning at se ekstraordinært begavede børn udføre udregninger. Og da der derfor var et marked for sådanne opvisninger, blev børn, der så ud til at have de rette evner, opfordret til at træne hårdt, så de kunne tjene penge.

En person, der ikke lavede opvisninger, skønt han sagtens kunne måle sig med dem, der gjorde, var Trueman Henry Stafford fra Vermont i U.S.A. H.W. Adams skriver om Stafford:

> Udregn i hovedet produktet af 365 365 365 365 365 365 og 365 365 365 365 365 365. Han fór omkring i rummet, trak sine bukser op af støvlerne, bed i sine hænder, rullede med øjnene, smilede og talte undertiden og så

> ud til at lide, indtil han inden der var gået et minut sagde 133 491 850 208 566 925 016 658 299 941 583 225!

Stafford tog senere en grad ved Princeton og blev astronom. Hans evner til hovedregning forsvandt langsomt med tiden.

På mange måder er den mest interessante af alle disse folk A.C. Aitken. Grunden er, at han ikke udviste sit talent som ung ligesom de fleste andre. Derimod udviklede han sine evner, som han beskriver [4]:

> Først da jeg var 15 år følte jeg, at jeg kunne udvikle særlige evner, og i nogle år derefter øvede jeg mig uden at fortælle det til nogen på hovedregning som en anden brahman yogi, lidt mere her, lidt mere der, indtil hvad der først var svært stille og roligt blev lettere og lettere ...

Aitken blev en fremragende matematiker og anvendte sin hukommelse på mange nyttige måder i sit job:

> Når han studerede et nyt nummer af et matematisk tidsskrift, behøvede han kun at kigge i dit side for side, idet han bladrede med en hastighed, hvor en almindelig læser kun ville opfatte omtrent et halvt dusin linjer. Efterfølgende diskussioner slog fast, at han havde opfattet alt, hvad der var. Og, som han sagde, han glemte aldrig noget, når først han havde set det.

Litteraturliste

[1] A.C. Aitken: *The art of mental calculation: with demonstrations*, Trans. Royal society for Engineers, London **44** (1954), 295–309.

[2] W.W. Rouse Ball: *Mathematical recreations and essays* (London, 1940).

[3] G.P. Bidder: *On mental calculation*, Minutes of Proceedings, Institution of Civil Engineers, **15** (1856), 251–280.

[4] P.C.Fenton, *To catch the spirit: The memoir of A.C.Aitken* (otage, 1995)

[5] H. Goldstine, *The computer from Pascal to von Neumann* (Princeton, 1972).

[6] I.M.L.Hunter, An exceptional talent for calculative thinking, *British Journal of Psychology* **53**(3)(1962), 243–258.

[7] F.D. Mitchell: *Mathematical prodigies*, American Journal of Psychology, **18** (1907), 61–143.

[8] E.W. Scripture: *Mathematical prodigies*, American Journal of Psychology, **4** (1891), 1–59.

Denne artikel bygger på „Memory, mental arithmetic and mathematics“ fra Internet: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/References/

Summernes Harmo9
9 Formler for Summer

E. Sparre Andersen og Mogens Esrom Larsen

I matematik har vi ofte fornemmelsen at det betaler sig at generalisere. Det fremhæver det væsentlige og gør problemerne mere overskuelige og lettere at løse. I denne artikel giver vi en række eksempler på generalisationens forbløffende beviskraft – i mange tilfælde gør den rigtige generalisation beviset fuldstændig trivielt.

Eksemplerne er hentet blandt formler for summer af produkter som indeholder harmoniske faktorer. Vi skal derfor minde om differensregningens teori.

Differensregning minder meget om differentialregning. Ligesom det er nemt at finde et integral af en funktion, der har en stamfunktion, er det nemt at summere differenser:

$$\sum_{k=0}^{n} f(k+1) - f(k) = f(n+1) - f(0) \tag{1}$$

Og ligesom vi har integraler, der kan bestemmes for visse heldigt valgte grænser, men ellers ikke, er der sumformler der kun er pæne for det rigtige valg af grænser:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Og ligesom vi har fundet ved differentiation af potenserne at vi kan integrere alle potenser på nær x^{-1} så finder vi ved at tage differenser af faktoriellerne,

$$[x]_n := \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1}(x-j) & n \in \mathbb{N} \\ 1 & n = 0 \\ \prod_{j=1}^{-n} \frac{1}{x+j} & -n \in \mathbb{N}, x \notin \{1, 2, \cdots, -n\} \end{cases}$$

der er velvalgte analogier til potenserne, at med differensoperatoren

$$\Delta_k f(k) := f(k+1) - f(k)\,.$$

gælder den analoge formel til $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

$$\Delta_k [k]_n = n[k]_{n-1}$$

som tillader os at summere alle faktorieller undtagen

$$[k]_{-1} = \frac{1}{k+1}$$

Og ganske som vi snyder os til en løsning ved at definere logaritmen som denne nye stamfunktion indfører vi i differensregningen de *harmoniske* tal

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} [k]_{-1}$$

Og ligesom man kan udregne mange integraler af udtryk med logaritmer findes der sumformler hvori harmoniske tal indgår som faktorer. Nogle tillader endog generalisation til de *generaliserede harmoniske* tal som defineres for $m, n \in \mathbb{Z}$ og $c \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$

$$H_{c,n}^{(m)} := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(c+k)^m}$$

I tilfælde af at

$$g(k) = \Delta_k f(k) = f(k+1) - f(k)$$

reformulerer vi (1) som

$$\sum\nolimits_0^{n+1} g(k)\delta k = \sum_{k=0}^{n} g(k) = f(n+1) - f(0)$$

eller uden grænser som

$$\sum g(k)\delta k = f(k)$$

funktionen f som den ubestemte sum af funktionen g.

Der findes en hel del sumformler i litteraturen med forbløffende komplicerede beviser som ikke skal gentages her. De fleste af disse formler er i virkeligheden trivielle i følgende forstand: Der findes en generalisation til en ubestemt sum hvis bevis blot består i udregning af differensen af resultatet.

De simpleste sumformler der blot har en enkelt faktoriel faktor eller divisor ser i generalisationen sådan ud:

$$\sum [c+k]_m H_{c,k}^{(1)} \delta k = \begin{cases} \frac{[c+k]_{m+1}}{m+1} \left(H_{c,k}^{(1)} - \frac{1}{m+1} \right) & m \neq -1 \\ \frac{1}{2} \left(\left(H_{c,k}^{(1)} \right)^2 - H_{c,k}^{(2)} \right) & m = -1 \end{cases} \tag{I}$$

for $c \in \mathbb{C}$, og $m \in \mathbb{Z}$.

Specialtilfældene hvor $m \geq 0$ og $c = 0$ findes i [5], formel 1.45 og i [4], formel 6.70, mens formlen for $m = -1$ og $c = 0$ findes i [4], formel 6.71.

Disse formler generaliseres til generaliserede harmoniske faktorer af anden orden til den knap så kønne men lige så trivielle formel:

$$\begin{aligned} &\sum [c+k]_m H_{c,k}^{(2)} \delta k \\ &\quad = \frac{1}{m+1} \left([c+k]_{m+1} H_{c,k}^{(2)} - (-1)^m m! H_{c,k}^{(1)} - \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j [m]_{m-j} [c+k]_j}{j} \right) \end{aligned} \tag{II}$$

for $c \in \mathbb{C}$ og $m \geq 0$.

I [7] finder man som formel 6.7.1

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}H_k = \frac{1}{n} \tag{2}$$

med ikke mindre end 5 forskellige komplicerede beviser.

Den nærliggende generalisation er at erstatte grænsen n i binomialkoefficienten med et vilkårligt komplekst tal, x, idet vi definerer binomialkoefficienten som

$$\binom{x}{k} := \begin{cases} \frac{[x]_k}{[k]_k} & \text{for } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{for } -k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Denne definition giver den trivielle generalisation af (2):

$$\sum(-1)^{k-1}\binom{x}{k}H_k\delta k = (-1)^k\left(\binom{x-1}{k-1}H_k - \frac{1}{x}\binom{x-1}{k}\right)$$

Der findes også formler med binomialkoefficienten som divisor. I [7] finder man som formlerne 6.7.6 og 6.7.7

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\binom{2n}{k}^{-1}H_k = \frac{n}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2n+2}H_{2n}$$
$$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\binom{2n-1}{k}^{-1}H_k = \frac{2n}{2n+1}H_{2n}$$

begge med lange beviser. Igen giver den nærliggende generalisation at erstatte $2n$ eller $2n-1$ i binomialkoefficienten med et vilkårligt komplekst tal, x, den trivielle formel:

$$\sum(-1)^k\binom{x}{k}^{-1}H_k\delta k = \frac{(-1)^k k}{x+2}\binom{x}{k-1}^{-1}\left(\frac{1}{x+2} - H_k\right) \tag{III}$$

Denne formel kan i øvrigt generaliseres yderligere til den stadig trivielle formel:

$$\sum\frac{[x]_k}{[y]_k}H^{(1)}_{-x-1,k}\delta k = \frac{1}{x-y-1}\frac{[x]_k}{[y]_{k-1}}\left(H^{(1)}_{-x-1,k} + \frac{1}{x-y-1}\right) \tag{IV}$$

forudsat $x-y-1 \neq 0$ og $x \notin \mathbb{N}$.

Da binomialformlen er defineret for vilkårlige komplekse værdier af n kan vi specielt vælge $-n \in \mathbb{N}$ og ved at skifte fortegnene på faktorerne i faktoriellen $[-n]_k$ skrive den som $[-n]_k = (-1)^k[n+k-1]_k$. Når vi derfor i [7] finder som formel 6.7.2

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+k-1}{k}H_k = \frac{(-1)^n}{n}$$

synes vi den bliver kønnere ved omskrivningen til

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{-n}{k} H_k = \frac{(-1)^n}{n} \tag{3}$$

Også denne formel lader sig generalisere men ikke til den rene trivialitet.

I dette tilfælde bevises formlen let men dog med brug af Chu–Vandermondes identitet, som først blev fundet af Shih–Chieh Chu i 1303 i Kina [1, 6], siden genopdaget af Alexandre–Théophile Vandermonde (1735–1796) i 1772, [10]. Den skrives oftest

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n} \tag{4}$$

Chu–Vandermondes formel siger at hvis vi skal udtage n kugler af en urne med x blå og y røde kugler så er det jo summen af de måder hvorpå vi kan udtage k blå og $n-k$ røde når k antager alle værdier fra 0 til n. Men på den anden side er det også netop $\binom{x+y}{n}$ når man ignorerer farverne. (Et eksempel på abstraktion!)

Formlen gælder selvfølgelig mere generelt også for vilkårlige $x, y \in \mathbb{C}$. Det følger af identitetssætningen for polynomier idet identiteten har uendelig mange heltalsløsninger.

Ved at gange (4) igennem med $n!$ fås formen:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_k [y]_{n-k} = [x+y]_n$$

der ligner binomialformlen.

Et andet hjælpemiddel er abelsk summation eller partiel summation der er en analogi til partiel integration. Den analoge formel skrives simplest som

$$\sum f(k)\Delta_k g(k)\delta k = f(k)g(k) - \sum g(k+1)\Delta_k f(k)\delta k \tag{5}$$

$$\sum\nolimits_a^b f(k)\Delta_k g(k)\delta k = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum\nolimits_a^b g(k+1)\Delta_k f(k)\delta k \tag{6}$$

Formlen (5) er stadig triviel ved anvendelse af differensoperatoren på produktet mens (6) fås af (5) ved indsættelse af grænser.

Formlen (3) lader sig delvis generalisere til komplekse værdier af n til

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} [-x]_k [x]_{n-k} H_k = (-1)^n (n-1)! - \frac{1}{n}[x-1]_n \tag{V}$$

Bevis. I (V) skrives produktet på nær den harmoniske faktor bekvemt som

$$\binom{n}{k}[-x]_k[x]_{n-k} = \Delta_k \binom{n-1}{k-1}[-x-1]_{k-1}[x]_{n-k+1}$$

Anvendes nu (6) på summen i (V) fås

$$
-[x]_n - \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} [-x-1]_k [x]_{n-k} \frac{1}{k+1}
$$

$$
= -[x]_n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k+1} [-x]_{k+1} [x-1]_{n-k-1}
$$

Den sidste sum er en Chu–Vandermonde sum hvor der mangler de to led svarende til $k = 0$ og $k = -1$. Derfor ender regnestykket med

$$
-[x]_n + \frac{1}{n} \left([-1]_n - n(-x)[x-1]_{n-1} - [x-1]_n \right) = (-1)^n (n-1)! - \frac{1}{n}[x-1]_n \qquad \square
$$

Derimod er den analoge formel for anden ordens harmoniske tal triviel:

$$
\sum \binom{x}{k} \binom{-x}{k} H^{(2)}_{0,k} \delta k = \binom{x-1}{k-1} \binom{-x-1}{k-1} H^{(2)}_{0,k} + \frac{1}{x^2} \binom{x-1}{k} \binom{-x-1}{k} \tag{VI}
$$

Denne har det kønne specialtilfælde

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{-n}{k} H^{(2)}_{0,k} = -\frac{1}{n^2}
$$

Der findes dog i [3], formel 7.15, en ikke triviel lignende formel,

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_k [y+n]_{n-k} H^{(1)}_{y,k} = [x+y+n]_n \left(H^{(1)}_{y,n} - H^{(1)}_{x+y,n} \right) \tag{VII}
$$

Bevis. Ved induktion efter n. For $n = 1$ er resultatet klart:

$$
\frac{x}{y+1} = (x+y+1) \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{x+y+1} \right)
$$

Lad os betegne venstre side af (VII) med S,

$$
S(n,x,y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_k [y+n]_{n-k} H^{(1)}_{y,k}
$$

Vi deler nu binomialkoefficienten i to og derefter summen i to summer:

$$
(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [x]_k [y+n]_{n-k} H^{(1)}_{y,k}
$$

$$
(2) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} [x]_k [y+n]_{n-k} H^{(1)}_{y,k}
$$

Den første er med brug af (VII)

$$
(1) = (y+n) S(n-1,x,y) = (y+n)[x+y+n-1]_{n-1} \left(H^{(1)}_{y,n-1} - H^{(1)}_{x+y,n-1} \right)
$$

I den anden forskyder vi indekset 1 og får

$$(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [x]_{k+1} [y+n]_{n-1-k} H^{(1)}_{y,k+1}$$

Vi bemærker at $H^{(1)}_{y,k+1} = \frac{1}{y+1} + H^{(1)}_{y+1,k}$, så vi kan skrive

$$\begin{aligned}
(2) &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [x-1]_k [y+1+n-1]_{n-1-k} H^{(1)}_{y+1,k} + \\
&\quad x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [x-1]_k [y+n]_{n-1-k} \frac{1}{y+1} \\
&= xS(n-1, x-1, y+1) + \frac{x}{y+1} [x+y+n-1]_{n-1} \\
&= x[x+y+n-1]_{n-1} \left(H^{(1)}_{y+1,n-1} - H^{(1)}_{x+y,n-1} + \frac{1}{y+1} \right) \\
&= x[x+y+n-1]_{n-1} \left(H^{(1)}_{y,n-1} - H^{(1)}_{x+y,n-1} + \frac{1}{y+n} \right)
\end{aligned}$$

Idet vi har brugt (VII) på den første sum og Chu–Vandermondes formel på den anden sum i (2).

Addering af (1) og (2) giver

$$\begin{aligned}
&(x+y+n)[x+y+n-1]_{n-1} \left(H^{(1)}_{y,n-1} - H^{(1)}_{x+y,n-1} \right) + \frac{x}{y+n} [x+y+n-1]_{n-1} \\
&= [x+y+n]_n \left(H^{(1)}_{y,n-1} - H^{(1)}_{x+y,n-1} \right) + [x+y+n]_n \left(\frac{1}{y+n} - \frac{1}{x+y+n} \right) \\
&= [x+y+n]_n \left(H^{(1)}_{y,n} - H^{(1)}_{x+y,n} \right)
\end{aligned}$$

$\square$

Der findes også en triviel formel for summer af kvadrater af harmoniske tal, nemlig:

$$\sum \left(H^{(1)}_{c,k} \right)^2 \delta k = (c+k) \left(H^{(1)}_{c,k} \right)^2 - (2(c+k)+1) H^{(1)}_{c,k} + 2(c+k) \qquad \text{(VIII)}$$

for $c \in \mathbb{C}$.

I 1947 stillede Wilhelm Ljunggren [9] den opgave i Norsk Mat. Tidss. at vise formlen

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 H_k = \binom{2n}{n} \left(H_n - H^{(1)}_{n,n} \right) = \binom{2n}{n} (2H_n - H_{2n})$$

Opgaven blev løst i 1948 med komplicerede beviser der brugte analytiske funktioner af Jonas Ekman Fjeldstad [2] og Johannes Kvamsdal [8]. Vi har ikke fundet en triviel generalisation men dog en generalisation der er mere ligetil at bevise. Der gælder:

Sætning. *For ethvert komplekst tal, $x \in \mathbb{C}$, og alle hele tal, $n \in \mathbb{N}$ og $p \in \mathbb{N}_0$, har vi summerne*

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{n-p}{k-p} \binom{x+p}{k} H_k = \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} \binom{x+p}{k+p} H_{k+p}$$
$$= \binom{x+n}{n} \left(H_n + H_{x,p}^{(1)} - H_{x,n}^{(1)}\right) = \binom{x+n}{n} \left(H_n - H_{x+p,n-p}^{(1)}\right) \tag{IX}$$

Ljunggrens formel fås ved valgene $x = n$ og $p = 0$.

Bevis for sætningen. Vi betragter funktionen

$$f(n,x,p) = \sum_{k=p}^{n} \binom{n-p}{k-p} \binom{x+p}{k} H_k \tag{7}$$

som vi skal udregne. Vi bemærker nu at

$$\Delta_k (-1)^k \binom{x}{k} H_k = (-1)^{k+1} \binom{x+1}{k+1} \left(H_{k+1} - \frac{1}{x+1}\right) \tag{8}$$

Partiel summation af (7) med anvendelse af (8) og den oplagte formel $\Delta_k (-1)^k \binom{x}{k} = (-1)^{k+1} \binom{x+1}{k+1}$ giver

$$f(n,x,p) = -\sum_{k=p}^{n-1} (-1)^k \binom{n-p-1}{k-p} (-1)^{k+1} \binom{x+p+1}{k+1} \left(H_{k+1} - \frac{1}{x+p+1}\right)$$
$$= \sum_{k=p+1}^{n} \binom{n-p-1}{k-p-1} \binom{x+p+1}{k} H_k \frac{1}{x+p+1} \sum_{k=p}^{n-1} \binom{n-p-1}{n-1-k} \binom{x+p+1}{k+1}$$

Den første sum er netop $f(n,x,p+1)$ som defineret i (7) mens den anden sum er en Chu–Vandermonde sum så den bliver til

$$\frac{1}{x+p+1} \binom{x+n}{n}$$

Vi har derfor udledt en differensformel i den variable p

$$\Delta_p f(n,x,p) = \frac{1}{x+p+1} \binom{x+n}{n}$$

Summation giver os

$$f(n,x,p) = f(n,x,n) - \binom{x+n}{n} \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{x+k+1}$$
$$= \binom{x+n}{n} H_n - \binom{x+n}{n} H_{x+p,n-p}^{(1)} = \binom{x+n}{n} \left(H_n + H_{x,p}^{(1)} - H_{x,n}^{(1)}\right)$$

hvilket beviser formlen (IX). $\square$

Moralen af hele historien er at generalisation betaler sig.

Litteraturliste

[1] Shih–Chieh Chu: *Ssu Yuan Yü Chien (Precious Mirror of the Four Elements)*, China, 1303.
[2] Jonas Ekman Fjeldstad: *Løste Oppgaver 4*, Norsk Mat. Tisds., **30**, 1948, pp. 94–95.
[3] Henry W. Gould: *Combinatorial Identities*, Gould Publications, Morgantown, W. Va., 1972.
[4] Ronald Lewis Graham, Donald Knuth, Oren Patashnik: *Concrete Mathematics*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1994.
[5] Daniel H. Greene, Donald E. Knuth: *Mathematics for the Analysis of Algorithms*, Second Edition, Birkhäuser, Boston, 1982.
[6] John Hoe: *Les Systèmes d'Équation Polynômes dans le Siyuan Yujian (1303)*, Collège de France, Institut des hautes Études Chinoises, Paris 1977, pp. 307–320.
[7] Josef Kaucký: *Kombinatorické identity*, Veda, Vydavatel'stvo Slovenskej Akadémie Vied, Bratislava, 1975.
[8] Johannes Kvamsdal: *Løste Oppgaver 4*, Norsk Mat. Tidss., **30**, 1948, pp. 113–114.
[9] Wilhelm Ljunggren: *Oppgave 4*, Norsk Mat. Tidss., **29**, 2947, p. 122.
[10] Alexandre-Théophile Vandermonde: *Mémoire sur des irrationnelles de différens ordres avec une application au cercle*, Mém. Acad. Roy. Sci. Paris, 1772, p. 489–498.

Ikke-additive mål og Choquet-integralet i multikriteriebeslutningsteori

Kim B. Larsen
Studerende ved handelshøjskolen i København

Formålet med denne artikel er at beskrive og demonstrere brugen af Choquet-intergralet og ikke-additive mål i multikriteriebeslutningsteori. Et eksempel vil blive givet på, hvordan Choquet-intergralet, i samspil med super- og subadditive vægte, kan give en mere præcis beskrivelse af beslutningstageres præferencer end et traditionelt additivt usikkerhedsmål.

Introduktion

Gennem de sidste årtier har ikke-additive mål og integraler været et område, som har været genstand for stigende interesse indenfor beslutningsteori. Forskere har blandt andet fundet, at ved at erstatte den traditionelle antagelse om præferenceuafhængighed med den svagere antagelse monotonicitet, betragtes et langt mere fleksibelt landskab for modellering af præferencer. Specielt de såkaldte sub-additive og super-additive mål, som tillader modellering af præferenceafhængighed mellem alternativer, har vist sig at være fordelagtige egenskaber ved ikke-additive mål. En af de mest centrale grunde til, hvorfor dette kan være gunstigt, er, at præferenceafhængighed ikke kan modelleres i et traditionelt additivt set-up, idet eksistensen af ethvert additivt usikkerhedsmål hænger stærkt sammen med antagelsen om præferenceuafhængighed.

I denne tekst vil jeg give en kort beskrivelse af de grundlæggende træk og problemstillinger i multikriteriebeslutningsteori samt en kort diskussion af additive aggregeringsoperatorer, og hvordan disse relaterer til præferenceuafhængighed. Efterfølgende vil jeg komme ind på Choquet-intergralet og ikke-additive mål, og deres anvendelse i multikriteriebeslutningsteori. Afsluttende vil jeg give et (tænkt) eksempel på, hvordan Choquet-intergralet i samspil med super- og sub-additive vægte, kan give en mere præcis beskrivelse af en beslutningstagers præferencer, end et traditionelt additivt usikkerhedsmål.

Multikriteriebeslutningsteori

Lad $i = 1, \dots, I$ indeksere alternativer og $j = 1, \dots, n$ kriterier. Et multikriteriebeslutningsproblem kan således beskrives som en 4-tuppel $(\mathcal{A}, X, \succsim, \mathcal{F}_i)$, hvor

- $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_I\}$ er en endelig mængde af alternativer, som beslutningstageren kan vælge imellem.
- $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ er en endelig mængde af udfald som genereres af det valgte alternativ x_j, hvor hvert x_j er en variabel, som repræsenterer de forskellige kriterier. Således er hvert alternativ, A_i, en n-tuppel $A_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$.
- $\succsim$ er en total, transitiv ordningsrelation. *Total*: for alle $A_i, A_{i'} \in A$, gælder at $A_i \succsim A_{i'}$ eller $A_{i'} \succsim A_i$, eller begge dele. *Transitiv*: for alle $A_i, A_{i'}, A_{i''} \in \mathcal{A}$, hvis $A_i \succsim A_{i'}$ og $A_{i'} \succsim A_{i''}$, så $A_i \succsim A_{i''}$.
- $\mathcal{F}_i = \{f_1, \dots, f_n\}$, hvor $f_j \colon A_i \to \mathbb{R}$, for alle i, j, er en mænge af kriteriefunktioner, som repræsenterer $\succsim$. Det vil sige, at hver funktion, f_j, måler hvor meget den pågældende beslutningstager ønsker hvert alternativ A_i med hensyn til det j'te kriterie (mere er foretrukket fremfor mindre), således at $A_i \succsim_j A_{i'} \iff f_j(A_i) \geq f_j(A_{i'})$, hvor notationen $A_i \succsim_j A_{i'}$ betyder, at A_i er mindst lige så god som $A_{i'}$ med hensyn til det j'te kriterie.

Et multikriteriebeslutningsproblem kunne f.eks. være at skulle købe en brugt bil. Her vil $\mathcal{A}$ være et endeligt antal forskellige biler. Mængden $X = \{x_{1j}, \dots, x_{nj}\}$ kunne bestå af følgende kriterier: hvor en bil har kørt, farve, om bilen har manuelt eller automatgear, pris osv., og $f_1, \dots, f_n$ ville være et antal kriteriefunktioner, som evaluerer alternativerne med hensyn til de forskellige kriterier. Hvis ét kriterie er hvor meget en bil har kørt, så, givet at man ikke ønsker at købe en bil som har kørt mere end 100.000,00 km, kunne en mulig kriteriefunktion være $f_j(A_i) = 100.000{,}00 - x_{ij}$. Bemærk, at siden antal km, normalt er noget man ønsker at minimere, er funktionen defineret som $100.000{,}00 - x_{ij}$, således at mere f_j er foretrukket fremfor mindre. Man kunne også forestile sig en kriteriefunktion af formen

$$f_j(A_i) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } 100.000{,}00 \leq x_{ij} < 75.000{,}00 \\ 2 & \text{hvis } 75.000{,}00 \leq x_{ij} < 50.000{,}00 \\ 3 & \text{hvis } 50.000{,}00 \leq x_{ij} < 25.000{,}004 \\ 4 & \text{hvis } 25.000{,}00 \leq x_{ij} < 0 \end{cases}$$

eller en situation, hvor f_j er selve kriteriet. Sidstnævnte er dog kun tilfældet, hvis et kriterie fra naturens side kan måles på en naturlig *ordinal* skala. Vi kan også bruge kriteriefunktioner til at tildele „scorer“ til x_{ij}'er som af natur ikke kan måles. F.eks.: hvis farve er et kriterie når man skal vælge en brugt bil, så kunne man forestille sig scorerne: rød=1, blå=2, grøn=3 og sort=4, hvis vel at mærke sort er foretrukket fremfor grøn, og grøn er foretrukket fremfor blå, og blå er foretrukket fremfor rød.

Aggregeringsoperatorer

En beslutningstagers generelle problem består i at finde det alternativ som maksimerer de forskellige kriterier. I langt de fleste tilfælde er det urealistisk at forvente, at et enkelt kriterie vil maksimere samtlige kriterier. Derfor ønsker vi at finde et alternativ som maksimerer den aggregerede værdi af kriteriefunktionerne. Det vil sige, at hvis vi antager, at de forskellige f_j'er er givet, så ønsker vi at løse problemet

$$\max_{A_i} \mathcal{H}\left(f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i)\right),$$

hvor $\mathcal{H}$ er en aggregeringsoperator som afbilder $(f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i))$ fra $\mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$. Den mest fundementale egenskab, som en aggregerings operator skal besidde, er givet i den følgende sætning.

Sætning 1. *Lad $\mathcal{H}(f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i))$ være en aggregeringsoperator. Der gælder således at $\mathcal{H}$ må opfylde det følgende krav:*

$$A_i \succsim A_{i'} \iff \mathcal{H}\left(f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i)\right) \geq \mathcal{H}\left(f_1(A_{i'}), \ldots, f_n(A_{i'})\right).$$

Dette virker som et meget fornuftigt krav. Det er klart, at hvis dette krav ikke er opfyldt, er der noget, der tyder på at den valgte aggregeringsoperator ikke beskriver ordningsrelationen korrekt.

Der er mange former for aggregeringsoperatorer, som kan benyttes i multikriteriebeslutningsteori. De velkendte „gennemsnitsoperatorer“ såsom det harmoniske gennemsnit, det geometriske gennemsnit eller for eksempel det aritmetiske gennemsnit er alle traditionelle aggregeringsoperatorer indenfor multikriteriebeslutningsteori. Imidlertid er den mest populære aggregeringsoperator nok den vægtede sum. Dette skyldes, at de fleste multikriteriebeslutningsproblemer kræver, at der tildeles vægte (skyggepriser) til kriterierne. Dvs., hvis vi lader $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ være en mængde af vægte hvor $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, $\lambda_j \in [0,1]$, så kan vi afbilde $f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i)$ ind i $\mathbb{R}$ ved at bruge den vægtede sum, defineret som

$$\mathcal{H}\left(f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i)\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(A_i\right) \cdot \lambda_j.$$

Additive mål og præferenceuafhængighed

Den vægtede sum såvel som gennemsnitsoperatorerne er alle såkaldte additive operatorer. Det er meget vigtigt at pointere, at eksistensen af disse operatorer er stærkt knyttet til antagelsen om *præferenceuafhængighed*. Det betyder, at rangeringen mellem to kriterier er uafhængig af andre kriterier. I mere tekniske termer: hvis vi lader $T \subset X$, så siger vi at mængden af kriterier er indbyrdes præferenceuafhængige, når der for ethvert par $(x_{ij}, x_{ij'}) \in T$ og $x_{ij''} \in \Theta = \{X \setminus T\}$ gælder: $(x_{ij}, x_{ij''}) \succsim (x_{ij'}, x_{ij''})$ for nogle $x_{ij''} \in \Theta \Longrightarrow (x_i, x_{ij''}) \succsim (x_{i'}, x_{ij''})$ for alle $x_{ij''} \subset \Theta$. Eller sagt med andre ord: rangeringen mellem x_{ij} and $x_{ij'}$ er uafhængig af de resterende kriterier i delmængden Θ. Siden eksistensen af additive aggregeringsoperatorer såsom den vægtede sum er stærkt knyttet til præferenceuafhænigighed, tillader sådanne operatorer *ikke*, at de valgte vægte beskriver nogen form for afhængighed mellem kriterier. Det vil sige, at hvis vi vælger den vægtede sum som aggregeringsoperator, kan vi ikke modellere situationen hvor (blå bil) $\succsim$ (rød bil) men (blå bil, manuelt gear) $\precsim$ (rød bil, manuelt gear). Dette skyldes, at uafhængighed medfører, at vægte er additive, hvilket medfører at: λ(blå bil, manuelt gear) $=$ λ (blå bil) $+$ λ (manuelt gear) og λ (blå bil, manuelt gear) $=$ λ (rød bil) $+$ λ (manuelt gear) og dermed λ (blå bil, manuelt gear) $\geq$ λ (rød bil, manuelt gear). Med andre ord: vi kan ikke modellere en situation, hvor f.eks. rangeringen mellem røde og blå biler er afhængig af hvilken type gear bilen har.

Ikke-additive mål og Choquet-integralet

Definition 1. *Lad Ω være en mængde og $p(\Omega) = 2^{\Omega}$ være mængden af alle delmængder af Ω. Et ikke-additivt mål μ defineret på rummet $(\Omega, p(\Omega))$, er en funktion $\mu\colon p(\Omega) \to [0,1]$, som opfylder*

1. $\mu(\emptyset) = 0$ *og* $\mu(\Omega) = 1$.
2. $\Theta \subseteq \Omega \Longrightarrow \mu(\Theta) \leq \mu(\Omega)$ *(monotonicitet).*

$(\Omega, p(\Omega), \mu)$ siges at være et fuzzy eller ikke-additivt rum. Det vil sige, at hvis vi lader $\Theta \subseteq \Omega$ og $\Theta^c = \{\Omega \setminus \Theta\}$, hvor $\mu\left(\{\Theta^c \cap \Omega\}\right) = \emptyset$, så medfører restriktionerne i definition 2 at $\mu\left(\{\Theta\}\right) \leq \mu\left(\{\Omega\}\right) = 1$ og $\mu\left(\{\Theta^c\}\right) \leq \mu\left(\{\Omega\}\right) = 1$, men ikke at $\mu(\{\Theta\}) + \mu\left(\{\Theta^c\}\right) = \mu\left(\{\Omega\}\right) = 1$. Et ikke-additivt rum er således mindre restriktivt end et additivt rum[1].

[1]Bemærk, at det er meget oplagt at anvende ikke addtive mål som vægte i stedet for de addtive vægte, λ_j, som vi nævnte tidligere. Dvs., hvis vi skriver $\mu\left(\{x_{ij}\}\right) = 0,8$ betyder det, at vægten tildelt kriterie j er 0,8. Ligeledes hvis vi skriver $\mu\left(\{x_{ij''}, x_{ij'}\}\right) = 0,9$, tolkes det som at vægten tildelt $x_{ij'} \cup x_{ij''}$ er 0,9.

Choquet-integralet

Choquet-integralet er et af de mest populære ikke-addtive integraler i multikriteriebeslutningsteori. I resten af denne tekst vil der blive fokuseret på brugen af Choquet-integralet, $\mathcal{C}_\mu$, som aggregeringsoperator netop i multikriteriebeslutningsteori. Det vil sige, vi vil se på situationer, hvor

$$\mathcal{H}\left(f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i)\right) = \mathcal{C}_\mu\left(f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i)\right).$$

I multikriteriebeslutningsteori defineres $\mathcal{C}_\mu$ som følger.

Definition 2. *Lad $(A_i, p(A_i), \mu)$ være et ikke-additivt rum hvor $A_i = \{x_{i1}, \ldots, x_{in}\}$ og $p(A_i) = 2^{A_i}$. Lad endvidere $\mathcal{F}_i = \{f_1, \ldots, f_n\}$ være en mængde af kriteriefunktioner, hvor $f_j \colon A_i \to \mathbb{R}$, for alle i, j. Vi har således at $\mathcal{C}_\mu \colon \mathcal{F}_i \to \mathbb{R}$ defineres som*

$$\mathcal{C}_\mu\left(f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i)\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(f_{(j)}\left(A_i\right) - f_{(j-1)}\left(A_i\right)\right) \mu\left(\left\{\mathbf{x}_{i(j)}\right\}\right),$$

eller alternativt

$$\mathcal{C}_\mu\left(f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i)\right) = \sum_{j=1}^{n} f_{(j)}\left(A_i\right)\left(\mu\left(\left\{\mathbf{x}_{i(j)}\right\}\right) - \mu\left(\left\{\mathbf{x}_{i(j+1)}\right\}\right)\right).$$

Notationen $_{(j)}$ indikerer, at indeksene er blevet transformeret ved en permutation[2], således at

$$0 \leq f_{(1)}\left(A_i\right) \leq \cdots \leq f_{(n)}\left(A_i\right) \leq \infty, \quad f_{(0)}(A_i) = 0,$$

og

$$\mathbf{x}_{i(j)} = \left\{x_{i(j)}, \ldots, x_{i(n)}\right\}, \ \mu\left(\left\{x_{i(n+1)}\right\}\right) = 0.$$

Sætning 2. *Når vægte er additive reduceres Choquet-integral til den vægtede sum. Mere teknisk: Hvis $\mu\left(\{x_{i1}\}\right) + \cdots + \mu\left(\{x_{in}\}\right) = \mu(\{X\})$, så*

$$\mathcal{C}_\mu\left(f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i)\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(A_i\right) \mu\left(\{x_{ij}\}\right).$$

Dette betyder, at vi altid kan anvende Choquet-integralet. Eller sagt med andre ord: Choquet-integralet er ikke begrænset til situatoner, hvor de valgte vægte er ikke-additive. Endvidere har vi følgende sammenhæng mellem målet μ og præferenceuafhængighed.

Sætning 3. *Lad*

$$\mathcal{H}\left(f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i)\right) = \mathcal{C}_\mu\left(f_1(A_i), \ldots, f_n(A_i)\right).$$

Hvis vægte er additive, det vil sige hvis $\mu\left(\{x_{i1}\}\right) + \cdots + \mu\left(\{x_{in}\}\right) = \mu(\{X\})$, så er kriterier indbyrdes præferenceuafhængige.

[2] Et eksempel på en sådan permutation kunne være som følger: Antag, at for et givent alternativ A og en given kriterie funktion f gælder at $f_1(A) = 3$, $f_2(A) = 1$ og $f_3(A) = 4$. Det vil sige, at vi har, at $f_2(A) < f_1(A) < f_3(A)$. Hvis vi permuterer indeksene får vi, at $f_{(1)}(A) < f_{(2)}(A) < f_{(3)}(A)$, hvor $f_{(1)}(A) = f_2(A)$, $f_{(2)}(A) = f_1(A)$ og $f_{(3)}(A) = f_3(A)$. Kort sagt: Vi ønsker at transformere indeksene, således at de bliver i numerisk rækkefølge.

Sub-additive og super-additive mål

Idet Choquet-integralet er defineret på ikke-additive rum, kan vi modellere præferenceafhængighed ved at bruge Choquet-integralet som aggregeringsoperator i sammenspil med såkaldte *sub-additive* og *super-additive* mål. Et sub-additivt mål beskriver en negativ afhængighed mellem to kriterier j and j'. Det vil sige, at hvis x_{ij} og $x_{ij'}$ bliver mindre eftertragtede i beslutningstagerens øjne når de opnåes sammen end når de opnåes hver for sig. Mere teknisk: Et mål er sub-additivt når vægten tildelt $\{x_{ij}, x_{ij'}\}$ er mindre end summen af de individuelle vægte. Omvendt siges et mål at være super-additivt, hvis det udtrykker en positive afhængighed mellem to kriterier j og j'. Det vil sige, at hvis vægten tildelt $\{x_{ij}, x_{ij'}\}$ er større end summen af de individuelle vægte. Dette leder til den næste definition.

Definition 3. *Lad $(A_i, p(A_i), \mu)$ være et ikke-additivt rum og lad j, j' være to kriterier. Endvidere lad $x_{ij}, x_{ij'} \in p(A_i)$ med $j \cup j' \in p(A_i)$ og $j \cap j' = \varnothing$. Et mål siges at være sub-additivt hvis $\mu(\{x_{ij}, x_{ij'}\}) \leq \mu(\{x_{ij}\}) + \mu(\{x_{ij'}\})$. Omvendt siges et mål at være super-additivt hvis $\mu(\{x_{ij}, x_{ij'}\}) \geq \mu(\{x_{ij}\}) + \mu(\{x_{ij'}\})$.*

Basketballtræneren

Betragt det følgende multikriteriebeslutningsproblem. En basketballtræner på et universitet i USA mangler en spiller for at gøre holdet komplet. Der er tre spillere som han kan vælge mellem: spiller A_1, A_2 og A_3. Træneren er specielt interesseret i en god rebounder[3], men ønsker dog også at den pågældende spiller kan bidrage i den offensive ende. Derfor er der tre kriterier ud fra hvilke han vil tage sin belslutning. Lad i indeksere spillere og j indeksere kriterier.

1. Offensive rebounds pr. kamp (x_{i1}) i den foregående sæson, $i = 1, 2, 3$.
2. Defensive rebounds pr. kamp (x_{i2}) i den foregående sæson, $i = 1, 2, 3$.
3. Point scoret pr. game (x_{i3}) i den foregående sæson, $i = 1, 2, 3$.

Træneren mener, at disse kriterier giver en god tilnærmelse af hans præferencer. Offensive rebounds og defensive rebounds er naturligvis gode til at vurdere spillernes evne til at tage rebounds, mens point pr. kamp er en god indikator for en spillers offensive evner. Træneren har imidlertid valgt de følgende kriteriefunktioner.

$$f_1(A_i) = \begin{cases} 1 & x_{i1} \in]0, 0.75] \\ 2 & x_{i1} \in]0.75, 1.5] \\ 3 & x_{i1} \in]1.5, 2.25] \\ 4 & x_{i1} \in]2.25, 3] \\ 5 & x_{i1} \in]3, 3.75] \\ 6 & x_{i1} \in]3.75, 4.5] \\ 7 & x_{i1} \in]4.5, 5.25] \\ 8 & x_{i1} \in]5.25, \infty[\end{cases} \quad f_2(A_i) = \begin{cases} 1 & x_{i2} \in]0, 1] \\ 2 & x_{i2} \in]1, 2] \\ 3 & x_{i2} \in]2, 3] \\ 4 & x_{i2} \in]3, 4] \\ 5 & x_{i2} \in]4, 5] \\ 6 & x_{i2} \in]5, 6] \\ 7 & x_{i2} \in]6, 7] \\ 8 & x_{i2} \in]7, \infty[\end{cases} \quad f_3(A_i) = \begin{cases} 1 & x_{i3} \in]0, 2.5] \\ 2 & x_{i3} \in]2.5, 5] \\ 3 & x_{i3} \in]5, 7.5] \\ 4 & x_{i3} \in]7.5, 10] \\ 5 & x_{i3} \in]10, 12.5] \\ 6 & x_{i3} \in]12.5, 15] \\ 7 & x_{i3} \in]15, 17.5] \\ 8 & x_{i3} \in]17.5, \infty[\end{cases}$$

[3] At tage en rebound i basketball betyder at gribe en bold, som har ramt enten ringen eller backboardet. En offensiv (defensiv) rebound er således, når bolden er grebet af en spiller i offensiv (defensiv). Normalt vil en spiller have flere offensive rebounds end defensive rebounds.

hvor $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} \in X,\ i = 1,2,3$. Efter at have diskuteret problemet med en de studerende ved skolens center for operationsanalyse, beslutter han sig for at tildele vægte til hvert kriterium, samt at bruge den vægtede sum som aggregeringsoperator. Det vil sige, at træneren ønsker at finde et A_i som maksimerer $\sum_j f_j(A_i) \cdot \lambda_j$. Dette skrives som:

$$\max_{A_i} \mathcal{H}\left(f_1(A_i), \ldots, f_3(A_i)\right) = \max_{A_i} \sum_{j=1}^{3} f_j(A_i) \cdot \lambda_j, \quad \lambda_j \in [0,1]\,, \quad \sum_{j=1}^{3} \lambda_j = 1.$$

Træneren mener, at $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,4$ er passende vægte til kriterie 1 og 2, og at $\lambda_3 = 0,2$ er en passende vægt til kriterie 3, siden offensiv og defensiv rebounding er de vigtigste af de tre kriterier.

Spillerne har følgende statistikker fra den foregående sæson.

Spiller (A_i) / Kriterie	(x_{i1})	(x_{i2})	(x_{i3})
1	5,5	5,9	2,3
2	0,5	2,1	17,1
3	2,23	4,9	12,2

Som det fremgår, er spiller A_1 en dygtig offensiv og defensiv rebounder, men hans evner til at score point er begrænsede. Spiller A_2 derimod er en eminent offensiv spiller, men er ikke særlig dygtig til at rebounde. Endelig er der A_3, som er en all-round spiller.

Ifølge kriteriefunktionerne får vi:

Spiller/Kriterie	$f_1(A_i)$	$f_2(A_i)$	$f_3(A_i)$	Vægtede sum
A_1	8	6	1	5,7
A_2	1	3	7	3,7
A_3	3	5	5	3,7

Det ses, at den vægtede sum med vægtene $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,4$ og $\lambda_3 = 0,2$ giver, at

$$A_1 \succ A_2,\ A_1 \succ A_3,\ A_2 \sim A_3.$$

Træneren er dog langt fra tilfreds med dette resultat. Han mener at spiller 1's offensive evner er for ringe til at komme på holdet. Derfor prøver han med vægtene $\{\lambda_1 = \lambda_2 = 0,45,\ \lambda_3 = 0,1\}$ og $\{\lambda_1 = \lambda_2 = 0,35,\ \lambda_3 = 0,3\}$, men resultatet bliver stadig at spiller 1 er den bedste løsning.

Derfor vender han tilbage til den studerende, som hjalp ham tidligere. Den studerende foreslår nu, at træneren prøver at tildele ikke-additive vægte til kriterierne i stedet for additive vægte, og bruge Choquet-integralet som aggregeringsoperator i stedet for den vægtede sum. Der vil sige, at træneren nu ønsker at løse følgende problem:

$$\max_{A_i} \mathcal{H}\left(f_1(A_i), \ldots, f_3(A_i)\right) = \max_{A_i} \mathcal{C}_\mu\left(f_1(A_i), \ldots, f_3(A_i)\right).$$

Det første trin for træneren er, at han skal transformere sine præferencer til ikke-additive vægte. Træneren synes at:

1. Offensive og defensive rebounds er de vigtigste kriterier.

2. Spillerere som er gode til at tage defensive rebounds er normalt også gode til at tage offensive rebounds. Derfor skal spillere som er gode til at tage offensive rebounds ikke favoriseres (vægtes) ekstra meget bare fordi de også er gode til at tage defensive rebounds og vice versa. Dette kan udtrykkes ved et sub-additivt mål: μ ({off, reb}) + μ ({def, reb}) $\geq$ μ ({off, reb,def, reb}).
3. Spillere som er gode til at tage defensive rebounds og gode til at score point (gode offensive evner), samt spillere som er gode til at tage offensive rebounds og samtidig også er gode til at score, er sjældne og bør derfor favoriseres (vægtes) ekstra meget. Dette kan udtrykkes ved hjælp af superadditive vægte: μ ({off, reb}) + μ ({point}) $\leq$ μ ({off, reb,point}) og μ ({def, reb}) + μ ({point}) $\leq$ μ ({def, reb,point}).

Træneren mener, at de følgende vægte er passende.

1. $\mu(\{x_{i1}\}) = \mu(\{x_{i2}\}) = 0,45$ og $\mu(\{x_{i3}\}) = 0,3,\ i = 1,2,3,$
2. $\mu(\{x_{i1}, x_{i2}\}) = 0,5,\ i = 1,2,3,$
3. $\mu(\{x_{i1}, x_{i3}\}) = \mu(\{x_{i2}, x_{i3}\}) = 0,9,\ i = 1,2,3,$

Bemærk, at ifølge definitionen på ikke-additive vægte, gælder at $\mu(\{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}) = 1$ og $\mu(\emptyset) = 0$.

Ved at anvende Choquet-integralet finder vi følgende:

Spiller/Kriterie	$f_1(A_i)$	$f_2(A_i)$	$f_3(A_i)$	$\mathcal{C}_\mu(f_1(A_i), \ldots, f_3(A_i))$
A_1	8	6	1	4,4
A_2	1	3	7	4,0
A_3	3	5	5	4,8

Dvs. ved at anvende Choquet-integralet i samspil med de tidligere beskrevne ikke-additive vægte, finder vi, at $A_3 \succ A_1 \succ A_2$. Ifølge Choquet-integralet er all-around spilleren, A_3, altså den den bedste løsning efterfulgt af rebounding specialisten A_1 og tilsidst den offensive maskine A_2. Træneren er langt mere tilfreds med dette resultat, siden spiller 3 vil kunne bidrage på rebound-siden såvel som på den offensive side. For at være helt sikker på sin beslutning, prøver han dog for en sikkerheds skyld at anvende Choquet-integralet på nye ikke-addtive vægte $\mu(\{x_{i1}\}) = \mu(\{x_{i2}\}) = 0,35$, $\mu(\{x_{i3}\}) = 0,2$, $\mu(\{x_{i1}, x_{i2}\}) = 0,4$, og $\mu(\{x_{i1}, x_{i3}\}) = \mu(\{x_{i2}, x_{i3}\}) = 0,7$, og får det samme resultat.

For at få et eksempel på, hvordan Choquet-integralet bruges i pr aksis, betragt da den første række i tabellen ovenfor. Ved at permutere indeksene finder vi at

$$f_{(1)}(A_1) \leq f_{(2)}(A_1) \leq f_{(3)}(A_1) \ ,$$

hvor $f_{(1)}(A_1) = f_3(A_1) = 1$, $f_{(2)}(A_1) = f_2(A_1) = 6$ og $f_{(3)}(A_1) = f_1(A_1) = 8$. Endvidere har vi at:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{1(1)} &= \left\{x_{1(1)}, x_{1(2)}, x_{1(3)}\right\} = \{x_{13}, x_{12}, x_{11}\}\,,\ \mu(\{x_{13}, x_{12}, x_{11}\}) = 1 \\
\mathbf{x}_{1(2)} &= \left\{x_{1(2)}, x_{1(3)}\right\} = \{x_{12}, x_{11}\}\,,\ \mu(\{x_{12}, x_{11}\}) = 0,5 \\
\mathbf{x}_{1(3)} &= \left\{x_{1(3)}\right\} = \{x_{11}\}\,,\ \mu(\{x_{11}\}) = 0,45 \\
\mathbf{x}_{1(4)} &= \{\emptyset\}\,,\ \mu(\{\emptyset\}) = 0
\end{aligned}$$

Altså har vi ifølge defintion 2 at:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}_\mu \left(f_1(A_1), f_2(A_2), f_3(A_1)\right) \\
&\quad = f_{(1)}(A_1) \cdot \left[\mu\left(\{\mathbf{x}_{1(1)}\}\right) - \mu\left(\{\mathbf{x}_{1(2)}\}\right)\right] + f_{(2)}(A_1) \cdot \left[\mu\left(\{\mathbf{x}_{1(2)}\}\right) - \mu\left(\{\mathbf{x}_{1(3)}\}\right)\right] \\
&\qquad + f_{(3)}(A_1) \cdot \left[\mu\left(\{\mathbf{x}_{1(3)}\}\right) - \mu\left(\{\mathbf{x}_{1(4)}\}\right)\right] \\
&\quad = 1 \cdot (1 - 0,5) + 6 \cdot (0,5 - 0,45) + 8 \cdot (0,45 - 0) = 4,4
\end{aligned}
$$

Konklusion

I denne tekst har jeg beskrevet og demonstreret brugen af ikke-additive mål og Choquet-integralet i forbindelse med multikriteriebeslutningsteori. Som en sidste bemærkning, og som antydet igenem teksten, argumenterer jeg kraftigt til fordel for brugen af Choquet-integralet i samspil med sub-additive og super-additive mål. Grunden til dette er, at grundlaget for additive mål, nemlig præferenceuafhængighed, ofte er en urealistisk antagelse. Dette, mener jeg, medfører, at additive aggregeringsoperatorer ikke altid kan give en tilstrækkelig beskrivelse af beslutningstageres præferencer. Imidlertid, som det fremgik i eksempelet, kan man ved at erstatte uafhængigheds antagelsen med monotonicitet, modellere afhængighed mellem kriterier i et ikke-additivt rum, og dermed opnå en mere detaljeret og korrekt beskrivelse af præferencer.

Litteraturliste

[1] Hougaard, Jens Leth: *On rational choice in Rawls' original position*, Copenhagen Business School, 1996.

[2] Grabisch, Michel: *Fuzzy integral in multi criteria decision making*, Thomson – CFS, Central research laboratory.

[3] Grabisch, Michel: *Characterization of fuzzy integral as aggregation operators*, Thomson – CFS, Central research laboratory.

[4] Bogetoft and Pruzan: *Planning with Multiple Criteria*, Copenhagen Business School Press, 1997.