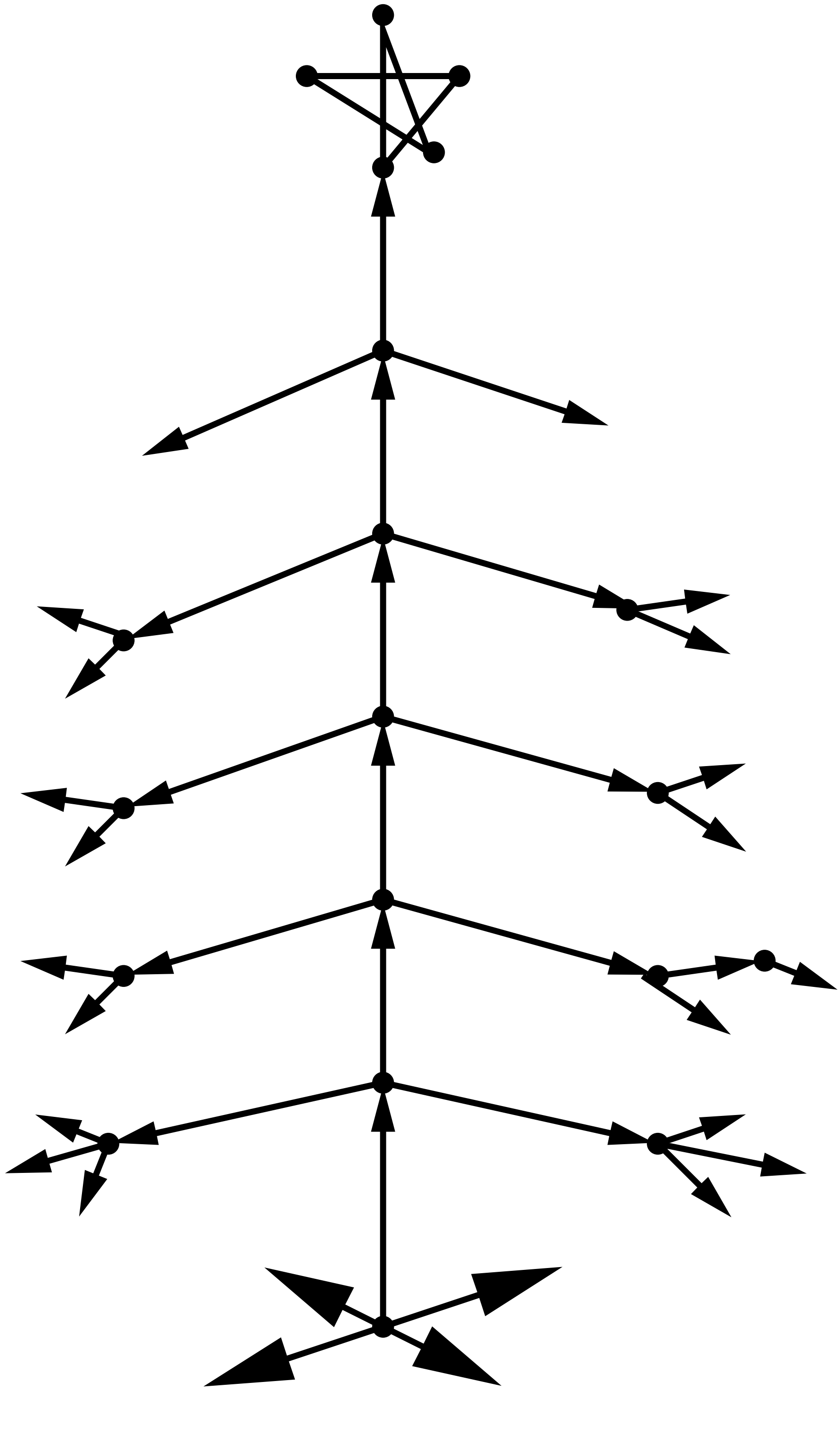
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

12. årgang, nr. 2, december 1998



FAMØS 12.2; december 1998.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)
Peter Lund
Anders Bo Nielsen
Asger Törnquist

Deadline for næste nummer:
Fredag den 19. februar 1999

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX eller LaTeX 2_ε), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web adresse:
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 700 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder

Atter en gang nærmer julen sig i lille Danmark, vi har allerede set den første sne, og den er også forsvundet igen. Nogen vil så overveje om vi får en hvid jul, redaktionen kan ikke besvare spørgsmålet, det er lidt for svært at forudsige. Måske er der også et element af tilfældighed over det. I dette nummer har vi fået Ole Olsen til at give sit bud på hvad tilfældighed er.

På bagsiden af sidste nummer, fik J. P. R. Christensen lejlighed til at filosofere lidt over biblen og værdien af π. Til dette nummer har vi fået fat i en skræmmende historie[1] om netop dette emne. For en sikkerheds skyld skal det lige oplyses, at vi her på redaktionen stadig hælder til en værdi i nærheden af 3,14159265358979323846 for π.

Efter julen kommer nytåret, endnu en lejlighed til at feste, og herefter følger så for de flestes vedkommende endnu en fest: eksamen. Nogle af os har prøvet det mange gange før (med vidt forskellige resultater), men der er også nogen der skal til deres første eksamen på universitetet.

Glædelig jul, godt nytår
og held og lykke til eksamen!

[1] Som vi ikke har undersøgt rigtigheden af, vi synes den er sjov under alle omstændigheder

Hvad er tilfældighed?

Ole Olsen, statistiker
Seniorforsker ved Det Nordiske Cochrane Center (www.cochrane.dk)

Hvad er tilfældighed? Er det ikke lige meget, hvad svaret er - så længe man kan regne sandsynligheden ud? Og kan forståelse af begrebet have nogen som helst betydning for almindelige mennesker, for filosoffer, for matematikere og for naturvidenskabsfolk?

Jeg mener ja. Lad os starte med et helt almindelig menneskes historie (og mod slutningen af artiklen vil det vise sig, hvorfor det netop er her, vi skal starte):

I panelet i din store konferencesal sad en patient: Sue Lockwook. Hun skulle fortælle de mange forsamlede læger og forskere, hvordan det opleves at være den, som får stillet en alvorlig diagnose: brystkræft. Efter at have gennemgået flere undersøgelser og behandlinger, kæmpet med sorgen, og så småt være ved at have fundet sine ben igen, begyndte hun at spekulere over udsagnet: "du har 70% chance for at ville overleve din brystkræft- hvad betød det egentlig? Enten ville hun vel dø af brystkræft, eller også ville hun ikke? Udsagnet refererede til lange serier af andre patienter end lige netop hende. Hvad kom de hende ved? Det var vel snarere sådan, at enten var hun i den kategori, som havde 100% risiko for at dø af brystkræft, eller også var hun i den kategori, som havde 0% risiko? Ja, sådan måtte det være. Og det ulykkelige var, at hun ikke vidste hvilken kategori hun befandt sig i. Og endnu mere ulykkeligt var det, at hun ikke kunne få det at vide. Det var et af den slags spørgsmål som ikke kunne lade sig besvare. Nogen gange vågnede hun op midt om natten, badet i sved, kiggede på sin elskede mand og tænkte: "Er jeg dødsmærket, eller ...?"

I denne historie er der ikke plads til tilfældighed. Sue forestiller sig, at hendes skæbne på forhånd er fastlagt - blot ved hun ikke hvad den er. Universets udvikling er fastlagt af de givne begyndelsesbetingelser, og da hun selv er en del af universet, må det også gælde hendes egen skæbne. Al tale om sandsynlighed er derfor irrelevant - sandsynlighed dækker kun over menneskelig uvidenhed.

Hendes opfattelse af verden er ikke enestående - snarere tværtimod! Hun er i selskab med prominente filosoffer som Spinoza, Hobbes, Hume, Kant, Schopenhauer og Mill, som også mente at verden er deterministisk. Grundlæggerne af sandsynlighedsregning, fra Pascal til Laplace, var også determinister. Og næsten alle fysikere var determinister frem til 1927; Einstein endda næsten helt frem til sin død i 1955 ("Gud spiller ikke med terninger"), selvom det siden har vist sig, at han ændrede synspunkt i sine allersidste år. Det er derfor ikke mærkeligt, at mange almindelige mennesker fortsat tænker i deterministiske baner, selvom det som oftest kun kommer til udtryk indirekte.

Men hvad er determinisme?

Determinisme kan antage forskellige former, men hovedelementerne er følgende: Tilfældighed er kun tilsyneladende; det er kun vor videns ufuldstændighed, som gør, at ting kan se tilfældige ud. Med andre ord "intet sker af blind tilfældighed"; så selvom statistik og sandsynlighedsregning kan være udmærkede værktøjer, når man skal give en grov beskrivelse af verden, så er verden *i virkeligheden* deterministisk. Sand videnskab må være eksakt, og kan derfor ikke omfatte tilfældighed og uforudsigelighed. Det hele kan opsummeres således: Verdens udvikling er som en film, fremtiden er fastlagt, og fortiden, nutiden og fremtiden eksisterer alle på én gang; fremtiden fastlægges af fortiden, og det er i princippet muligt at forudsige fremtiden og at forklare nutiden ved fortiden. Endelig er det et populært synspunkt, at determinismen er videnskabeligt bevist.

Men er alle disse påstande rigtige? Hvis de er, er der ikke megen plads til overs til tilfældighed og sandsynlighed i videnskabelige teorier. Så kan tilfældighedsbegrebet sandt nok kun dække over menneskelig uvidenhed. Men flere videnskabsteoretikere har argumenteret for, at der ikke er nogen speciel grund til at tro på påstandene.

Popper argumenterer for, at de videnskabelige teorier ikke støtter en deterministisk verdensopfattelse. Han anfører, at selv hvis den klassiske fysiks love gjaldt, ville det ikke deraf kunne udledes, at verden er deterministisk. Denne misforståelse er udbredt blandt fysikere. Popper tilbageviser den i sin bog "The Open Universe - An Argument for Indeterminism". Forskellige former for 'videnskabelig' determinisme undersøges (han bruger konsekvent anførselstegn omkring ordet 'videnskabelig' fordi han netop mener opfattelsen ikke er videnskabelig). Idéen om at verden er af en sådan karakter, at "enhver begivenhed kan forudsiges med en på forhånd fastlagt præcision, hvis vi er i besiddelse af en tilstrækkelig præcis beskrivelse af fortiden plus kenskab til alle naturlove"afvises med henvisning til mange-legeme-problemet, og det som senere er blevet kendt under betegnelsen kaosteori (folk som holder af matematisk analyse og epsilon-delta gymnastik vil nyde at læse afsnittet om de forskellige former for forudsigelighed). Konsekvensen er, at selv for Laplaces dæmon, en videnskabsmand, eller en anden form for gud, som sidder *uden for* universet, er det umuligt ved anvendelse af naturlovene at forudsige fremtiden på den krævede måde (det udelukker naturligvis ikke at det er muligt at forudsige den ud fra åbenbaringer - men så hører diskussionen ikke længere hjemme i en videnskabelig sammenhæng). Med udelukkende logiske (datalogi-agtige) argumenter slutter Popper af med at vise at 'videnskabelig' determinisme er en selvmodsigelse: Det er ikke muligt for nogen som sidder *inden for* i et univers - selvom dette måtte være deterministisk i sin struktur - at forudsige fremtiden. Den overordnede konklusion bliver dermed, at hverken metafysisk determinisme eller metafysisk indeterminisme er falsificérbare. Dermed er det altså vist, at spørgsmålet om hvorvidt verden er deterministisk eller ej ikke er et videnskabeligt spørgsmål.

Men hvis det alene er et trosspørgsmål, hvorfor så foretrække indeterminismen?

Den måske mest betydningsfulde amerikanske videnskabsteoretiker, Charles Sanders Peirce, som havde praktiseret inden for flere grene af naturvidenskaberne, mente ikke at empirien understøtter determinismen: Problemet med determinismen er, at den er i modstrid med alle slags erfaringer, både videnskabelige erfaringer og hverdagserfaringer. Den benægter - uden nogen evidens eller begrundelse - at der sker noget som helst nyt: Al spontanitet og kreativitet henvises til tidernes morgen, og siden har det hele været helt dødt hvad egentlige nyskabelser angår. Dette på trods af, at hovedindtrykket overalt er vækst og stigende kompleksitet.

Poppers argument er et andet: Kun ved at forkaste en deterministisk verdensopfattelse kan vi åbne op for en tilfredstillende fortolkning af sandsynlighedsbegrebet og for seriøse studier af videnskabelige teorier baseret på sandsynligheder. Og selvom det så, efter grundig diskussion, skulle vise sig, at sådanne teorier ikke dur, så er det kun ved at afvise determinismen som grundantagelse, at vi får den nødvendige frihed til seriøst at studere sådanne teorier.

Men hvad er så tilfældighed?

Svaret ligger i at indse, at spørgsmålet er forkert stillet. Ved at acceptere at tilfældighed skal forklares, er man allerede fanget i determinismens fælde. Man tvinges til at forklare tilfældighed ved hjælp af noget som ikke er tilfældigt, og derved accepteres determinismen som mere fundamental. Hvis man forsøger at forklare tilfældighed (fx ved hjælp af mangelfuld viden), har man indrømmet, at tilfældighed ikke er noget reelt eksisterende fænomen. Hvis man på den anden side betragter tilfældighed som et reelt og fundamentalt fænomen, opnår man at kunne forkare de regulariteter der observeres, hvorimod et forsøg på at forklare tilfældighed i et deterministisk verdensbillede fjerner muligheden for at forstå begge dele.

Ovenstående svar tilskrives Peirce. Det kan synes tyndt, men er måske alligevel det bedste svar, der er givet. Især i betragtning af, at begrebet 'tilfældighed' er blevet beskrevet som "formodentlig det vanskeligste videnskabelige begreb at få hold på".

Min egen begrundelse for at beskæftige mig med tilfældighedsbegrebet var, at jeg som ung statistiker arbejdede inden for lægevidenskab og epidemiologi. Jeg blev til stadighed irriteret og forundret over, at læger tilsyneladende alle tænkte og udtrykte sig deterministisk. På den anden side, var jeg ikke helt sikker på, hvordan min egen verdensopfattelse var. Gennem statistikstudiet havde jeg lært at håndtere sandsynligheder og statistiske modeller. Men fortolkningen af virkeligheden havde vi altid lært at overlade til "kunderne". Så hvad var sandsynligheder egentlig udtryk for? Hvad var tilfældighed? Og hvorfor var der så mange, der syntes at mene, at verden "jo i virkeligheden er deterministisk - hvis bare vi kendte begyndelsesbetingelserne godt nok, så kunne vi forklare alting"?

Og hermed er vi tilbage hos Sue Lockwood. Og jeg nævner hendes navn, fordi hun ikke er - og aldrig vil kunne opfatte sig selv som - én ud af en lang række identisk gentagne patienter.

Det som gør forskellen mellem de forskellige fortolkninger af sandsynlighedsbegrebet så afgørende, er netop forskellen mellem de mange gentagelige terningkast og det enkelte enestående menneskes liv. Hvordan kan man på fornuftig vis knytte et objektivt sandsynlighedsbegreb til noget som hverken er symmetrisk som terningen eller kan gentages som fysiske eksperimenter? Netop når man afventer en enestående begivenhed, bryder de klassiske fortolkninger af sandsynlighedsbegrebet da også sammen. Behovet for en nytolkning af sandsynlighedsbegrebet bliver dermed særligt tydeligt, når man skal forholde sig til sandsynligheder for væsentlige hændelser i ens eget liv. Og vil man samtidig forsøge at beholde et objektivt og realistisk verdensbillede, må man forkaste alle subjektivistiske fortolkninger af sandsynlighedsbegrebet

For Popper var muligheden for en bedre fortolkning af sandsynlighedsbegrebet den væsentligste grund til at forkaste doktrinen om verdens deterministiske struktur. Han indførte et nyt sandsynlighedsbegreb kaldet propensity-begrebet, hvis væsentligste ingrediens er, at sandsynlighed beskrives som en uobserverbar tendens eller tilbøjelighed i den fysiske verden. Han beskrev selv udviklingen i sin opfattelse af sandsynlighedsbegrebet som "formodentlig den mest betydningsfulde ændring i mit verdenssyn siden 1934". Han havde arbejdet med idéen gennem flere årtier og fortsatte at arbejde med den næsten helt frem til sin død.

Men kommer al denne filosofi-snak Sue ved?

Jeg spekulerede over det om natten, mens jeg kæmpede med mit jet-lag: Måske har "breast-cancer survivors"vigtigere ting at tænke på? Jeg blev til slut enig med mig selv om at lade hende selv afgøre det. Næste dag fandt jeg Sue i en af pauserne. Jeg refererede hendes udsagn for hende, og spurgte om det var korrekt forståët. Det var det. - Så hvad er tilfældighed?
- Ifølge Sue fandtes sådan noget ikke - tilfældighed fandtes ikke: hendes skæbne var bestemt.
- Jeg spurgte, hvornår den var bestemt. På diagnosetidspunktet? Ved hendes fødsel?
- Hun var ikke sikker. Men den var i hvert fald fastlagt.

Jeg fortalte hende, at jeg var statistiker, og at forståelse af tilfældighedsbegrebet var (eller burde være) et af de centrale problemer i den anvendte statistik. Det var ikke noget statistikere beskæftigede sig meget med; men lige så snart man var i en situation som hendes, var forståelsen af begrebet altafgørende vigtig. Derfor ville jeg gerne diskutere det med hende. Hun indvilgede i at høre mit syn på sagen.

Jeg sagde, at jeg ikke mente, at hendes skæbne var fastlagt. At jeg snarere ville sige at lykkens gudinde var med hende; at der altid var et element af tilfældighed i alt hvad der sker. At for hver morgen hun vågnede, fik hun en ny chance: Lykkens gudinde ville trække et lod, og hvis hun var heldig, levede hun til dagens ende. Jeg vidste ikke hvorfra lykkens gudinde trak disse lodder, og jeg vidste heller ikke hvad hendes odds var. Men det var klart, at hendes odds formodentlig ikke var lige så gode som mine. På den anden side var jeg heller ikke garanteret at leve ugen ud. Jeg kunne gå ud på gaden og blive kørt ned imorgen. Samtidig var det heller ikke engang givet, at de urner, hvorfra vore lodder blev trukket, ville forblive uforandrede. En ny behandlingsmetode kunne tænkes at gøre hendes odds bedre. Hun var ikke sikker på, at en sådan ny og effektiv behandling ville dukke op - men det kom i og for sig ikke den meta-fysiske diskussion ved.

Vi nåede ikke frem til nogen konklusion. Vi takkede hinanden for en interessant meningsudveksling og skiltes.

Så hvad er tilfældighed? Og er det noget der er værd at tænke over?

Ovenstående tekst bygger for den teoretiske dels vedkommende på mit kapitel i bogen:
Olsen O. Probabilistic Causality in Epidemiology. In: Faye J, Urchs M, Scheffler, U, eds. Logic and Causal Reasoning. Berlin: Akademie Verlag, 1994: 255-76.
Der kan den interesserede læser også finde litteraturhenvisninger.

Sue Lockwood mødte jeg på Cochrane-samarbejdets VI colloquium i Baltimore. For mere information om Cochrane-samarbejdet: se `www.cochrane.dk`.

Minkowski rummets rand

Bergfinnur Durhuus

Ved en kompaktifikation af et topologisk rum X forstås et kompakt topologisk rum K og en afbildning $\varphi : X \to K$, således at $\varphi(X)$ er tæt i K, og således at φ er en homeomorfi på sit billede, hvorved X kan identificeres med $\varphi(X)$ som topologisk rum.

Et simpelt eksempel er *et-punktskompaktifikationen* af $\mathbb{R}$, som er cirklen S^1 sammen med den *stereografiske projektion* $\varphi : \mathbb{R} \to S^1$, se Fig.1. Her føjes netop et punkt n til $\varphi(X)$ for at få det kompakte rum S^1.

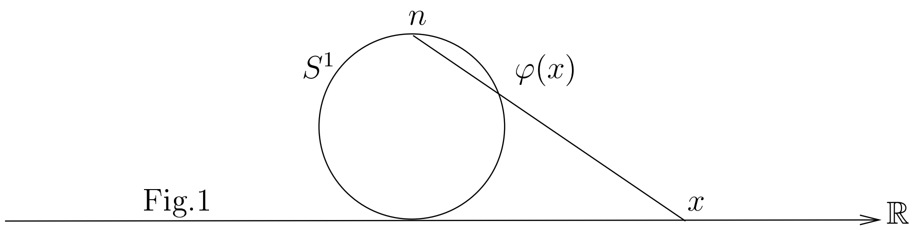


Fig.1

Den stereografiske projektion generaliseres umiddelbart til højere dimensioner som en afbildning fra $\mathbb{R}^n$ ind i den n-dimensionale kugleflade $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$, som derved er en et-punktskompaktifikation af $\mathbb{R}^n$.

En to-punktskompaktifikation af $\mathbb{R}$ fås f.eks. ved at betragte afbildningen $\mathrm{Arctg} : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$, se Fig.2. Her skal der føjes to punkter $\pm\pi/2$ til $\mathrm{Arctg}(\mathbb{R})$ for at få det kompakte rum $[-\pi/2, \pi/2]$. Denne kompaktifikation er ordensbevarende i modsætning til den første, hvor S^1 ikke har nogen naturlig ordning.

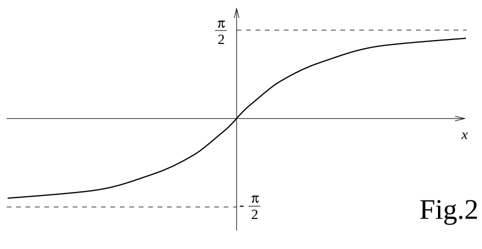


Fig.2

En vigtig anvendelse af kompaktifikationer er i forbindelse med karakterisering af asymptotisk opførsel af funktioner på det givne rum. Eksempelvis kan funktioner på $\mathbb{R}$, hvis grænseværdier for $x \to \pm\infty$ eksisterer, identificeres med kontinuerte funktioner på to-punktskompaktifikationen, og de af disse funktioner, for hvilke grænseværdierne er ens, kan identificeres med kontinuerte funktioner på et-punktskompaktifikationen.

Vi skal i det følgende betragte en kompaktifikation af Minkowski rummet, d.v.s. af $\mathbb{R}^4$ udstyret med den kvadratiske form

$$q(x_0, x_1, x_2, x_3) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \; ,$$

hvorved den såkaldte kausale struktur, eller lyskeglestrukturen bevares. Dette forklares nærmere nedenfor. Som det vil være nogle bekendt, er den specielle relativitetsteori baseret på dette rum, hvor $t = x_0/c$ er tidskoordinaten (c er lyshastigheden) og de andre tre koordinater er rumkoordinater. Kendskab hertil er dog ikke en forudsætning for det følgende. Vi behøver blot at vide, at bevægelse af materielle partikler altid foregår ved hastigheder mindre end lysets. Beskrives bevægelsen ved en rumtids kurve $s \to \lambda(s) = (\lambda_0(s), \dots \lambda_3(s))$ udtrykkes dette ved at $q(\lambda'(s)) < 0$ for alle s, og vi siger, at kurven er *tidslig*. Her er $\lambda'(s) = (\lambda'_0(s), \dots, \lambda'_3(s))$ tangentvektoren til λ i s. Lys, derimod, bevæger sig med konstant fart c, således at den tilsvarende rum-tids kurve opfylder $q(\lambda'(s)) = 0$ for alle s. Sådanne kurver kaldes *null-kurver* og ligger på rette linier $s \to a + sv$, hvor $a, v \in \mathbb{R}^4$ og retningsvektoren v er en null-vektor, d.v.s. $q(v) = 0$. Mængden af null-kurver, der går igennem et givet punkt x, udgør randen af en kegle givet ved

$$C_x = \{x + v \mid q(v) \leq 0\} ,$$

og som naturligt nok kaldes *lyskeglen* i x. Fig.3 viser en to-dimensional udgave af lyskeglen i x og en tidslig kurve igennem x.

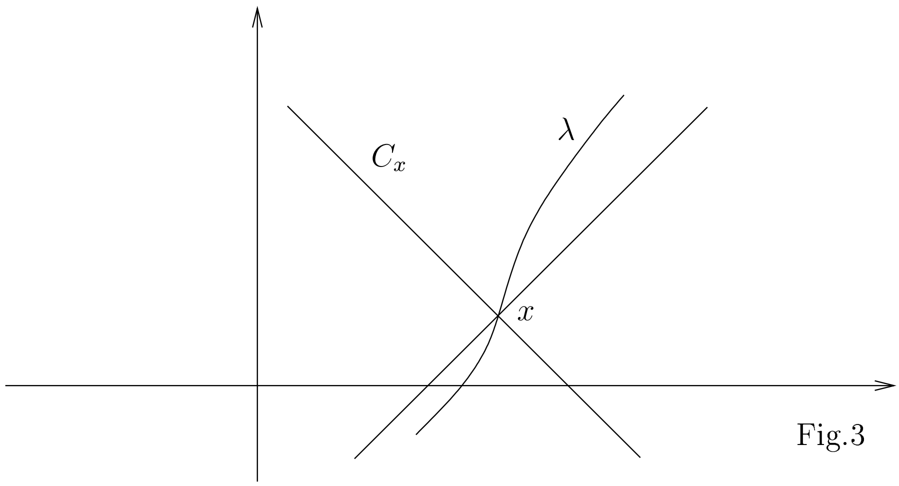


Fig.3

Det er vigtigt at bemærke, at vi ovenfor ikke har anvendt q på punkter i $\mathbb{R}^4$, men snarere på tangentvektorer til kurver i $\mathbb{R}^4$. Vi skal således betragte q som knyttende en kvadratisk form q_x til hvert punkt $x \in \mathbb{R}^4$, hvor q_x er defineret på mængden $T_x\mathbb{R}^4$ af tangentvektorer i x til kurver, der går igennem x. Rummet $T_x\mathbb{R}^4$ er oplagt et vektorrum, der på naturlig måde kan identificeres med $\mathbb{R}^4$. Det kaldes *tangentrummet* til $\mathbb{R}^4$ i x. En sådan angivelse af en kvadratisk form på tangentrummet i hvert punkt af $\mathbb{R}^4$ med den egenskab, at den ved diagonalisering repræsenteres af en matrix med et negativt diagonalelement og de resterende positive, kaldes en *Lorentz metrik* på $\mathbb{R}^4$. Kaldes matricen, der repræsenterer den kvadratiske form i x m.h.t. den naturlige basis, for $g_{ij}(x)$, skrives Lorentz metrikken

$$ds^2 = \sum_{i,j=0}^{3} g_{ij}(x) dx_i dx_j, \tag{1}$$

Specielt er Lorentz metrikken på Minkowski rummet, også kaldt Minkowski metrikken, repræsenteret ved den konstante diagonalmatrix $\Delta(-1, 1, 1, 1,)$ og er derfor givet ved

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Årsagen til denne notation er, at vi opfatter q_x som et mål for kvadratet på "længden"af den infinitesimale forskydning langs en kurve igennem x, repræsenteret ved dens tangentvektor i x. Her er "længden"sat i anførselstegn, fordi q jo ikke er positiv definit. For tidslige kurver er denne størrelse lig med minus kvadratet på tilvæksten i partiklens såkaldte egentid, hvilket er tiden målt af en iagttager, der følger med partiklen.

En udtalt fordel ved notationen er, at man ved skift af koordinater kan regne med dx_i'erne som differentialer og gøre brug af kædereglen. Vælger vi nemlig at parametrisere $\mathbb{R}^4$ med nye koordinater givet ved en injektiv differentiabel afbildning $\tilde{x} = (\tilde{x}_0, \ldots, \tilde{x}_3) \to x(\tilde{x}_0, \ldots, \tilde{x}_3)$, da er den nye koordinatrepræsentation $\tilde{\lambda}(s)$ for en kurve $s \to \lambda(s)$ givet ved $\lambda(s) = x \circ \tilde{\lambda}(s)$, hvorefter kædereglen giver $\lambda'(s) = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}(\tilde{\lambda}(s))\tilde{\lambda}'(s)$, hvor $\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}$ betegner Jacobimatricen for koordinatskiftet. Indsættes dette i den kvadratiske form (1) fås

$$ds^2 = \sum_{i,j=0}^{3} \tilde{g}_{ij}(\tilde{x}) d\tilde{x}_i d\tilde{x}_j,$$

hvor

$$\tilde{g}_{ij}(\tilde{x}) = \sum_{k,l=0}^{3} g_{kl}(x(\tilde{x})) \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial x_l}{\partial \tilde{x}_j} \ . \tag{2}$$

Det er her naturligvis antaget, at matrixelementerne g_{ij} er differentiable funktioner af x, hvilket antages overalt i det følgende.

Vi har ovenfor defineret begrebet Lorentz metrik på rummet $\mathbb{R}^4$. Dette kan imidlertid generaliseres til visse andre rum. Da vi kun har brug for et enkelt eksempel, nøjes vi med at se på det. Det drejer sig om det såkaldte *Einsteins statiske univers* E, der kaldes sådan af historiske grunde, som jeg ikke skal komme nærmere ind på, og er defineret som delmængden af det 5-dimensionale Minkowski rum bestående af punkter $(x_0, \ldots, x_4)$, der tilfredsstiller ligningen

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \ ,$$

d.v.s. $E = \mathbb{R} \times S^3$. Lorentz metrikken $\bar{q}$ på E er givet ved restriktionen af Minkowski metrikken $ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_4^2$ til tangentvektorer til kurver i E, d.v.s. $\bar{q}_x$ er defineret på tangentrummet $T_xE \subset T_x\mathbb{R}^5$. Indføres cylindriske koordinater (X_0, R, θ, ϕ) på E, givet ved

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (X_0, \sin R, \cos R \sin\theta, \cos R \cos\theta \sin\phi, \cos R \cos\theta \cos\phi) \ , \tag{3}$$

hvor $0 < R, \theta < \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$, fås ved brug af samme fremgangsmåde, som førte til (2), at vi for $\bar{q}$ kan skrive

$$d\bar{s}^2 = -dX_0^2 + dR^2 + \sin^2 R(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \ . \tag{4}$$

Det ses umiddelbart, at dette faktisk er en Lorentz metrik, d.v.s. at den tilhørende matrix har en negativ og tre positive egenværdier. Bemærk dog, at man for at dække hele S^3 skulle medtage $R = 0, \pi$ og $\theta = 0, \pi$, hvor imidlertid de cylindriske koordinater er singulære, d.v.s. afbildningen givet ved (3) er ikke invertibel, hvis disse punkter medtages. Dette kan dog klares ved at supplere med andre cylindriske koordinater opnået ved passende ombytning af x_1, x_2, x_3, x_4, og lades ude af betragtning i det følgende.

Lyskeglen $\bar{C}_x$ i punktet $x \in E$ defineres som

$$\bar{C}_x = \{v \in T_x E \mid \bar{q}(v) \leq 0\} .$$

Tilsvarende er en kurve $s \to \lambda(s)$ i E tidslig, h.h.v. en null-kurve, hvis $\bar{q}(\lambda'(s)) < 0$ for alle s, h.h.v. $\bar{q}(\lambda'(s)) = 0$ for alle s. Vendes ulighedstegnet i definitionen af en tidslig kurve fås en *rumlig* kurve.

Vi er nu rede til at formulere og vise følgende sætning.

. *Der findes en differentiabel afbildning $\varphi : \mathbb{R}^4 \to E$ med følgende egenskaber:*

i) $\overline{\varphi(\mathbb{R}^4)}$ *er kompakt.*
ii) φ *er en homeomorfi på billedet* $\varphi(\mathbb{R}^4)$.
iii) φ *afbilder tidslige kurver, h.h.v. null-kurver, i* $\mathbb{R}^4$ *i tidslige kurver, h.h.v. null-kurver, i* E*, hvilket også udtrykkes ved at sige, at* φ *afbilder lyskeglen* C_x *på lyskeglen* $\bar{C}_{\varphi(x)}$ *for alle* $x \in \mathbb{R}^4$.

For at vise dette resultat bemærkes først, at lyskeglen i et givet punkt x ikke ændres ved, at Lorentz metrikken multipliceres med et posivivt tal $\Omega^2(x)$. Specielt giver Lorentz metrikken

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2(-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) , \tag{5}$$

hvor Ω^2 er en positiv funktion, anledning til samme lyskegler som Minkowski metrikken.

Det er fordelagtigt at begynde med at betragte det to-dimensionale Minkowski rum, hvor vi blot udelader de to sidste koordinater x_2, x_3 fra det foregående. I dette tilfælde er konstruktionen af φ ganske simpel. I stedet for (x_0, x_1) benytter vi *lyskeglekoordinaterne*

$$u = x_0 + x_1 \ , \quad v = x_0 - x_1$$

og finder ved brug af (2)

$$ds^2 = -du dv .$$

Fordelen ved at skrive ds^2 på denne form er, at man ved et yderligere koordinatskift af formen

$$U = U(u) \ , \quad V = V(v)$$

får

$$ds^2 = -\frac{1}{U'(u)V'(v)} dU dV .$$

Hvis derfor $U', V' > 0$, giver ds^2 anledning til samme lyskegler som

$$d\tilde{s}^2 = -dU dV .$$

Vi kan f.eks. vælge $U = V = \text{Arctg}$ (jvf. to-punktskompaktifikationen af $\mathbb{R}$ ovenfor), hvorved

$$ds^2 = -(\cos U \cos V)^{-2} dU dV \ ,$$

og

$$(U, V) \in] - \pi/2, \pi/2[\times] - \pi/2, \pi/2[\ .$$

For at opnå en diagonal form af metrikken sættes

$$X_0 = U + V \ , \quad X_1 = U - V$$

og vi finder

$$ds^2 = \frac{1}{4}(\cos\frac{1}{2}(X_0 + X_1)\cos\frac{1}{2}(X_0 - X_1))^{-2}(-dX_0^2 + dX_1^2)\ .$$

Her genkender vi

$$d\bar{s}^2 = -dX_0^2 + dX_1^2$$

som Minkowski metrikken på det åbne kvadrat

$$-\pi < X_0 + X_1 < \pi \ , \quad -\pi < X_0 - X_1 < \pi \ . \tag{6}$$

Vi kan derfor formulere det fundne som visende, at afbildningen

$$(x_0, x_1) \to (\text{Arctg}(x_0 + x_1) + \text{Arctg}(x_0 - x_1), \text{Arctg}(x_0 + x_1) - \text{Arctg}(x_0 - x_1)) \tag{7}$$

afbilder det to-dimensionale Minkowski rum på det åbne kvadrat (6) i det to-dimensionale Minkowski rum hvorved tidslige kurver, h.h.v. null-kurver, afbildes i tidslige kurver, h.h.v. null-kurver. Endvidere er det oplagt, at afbildningen er en homeomorfi på sit billede.

Går vi nu tilbage til det 4-dimensionale tilfælde og vælger "rumlige"polære koordinater (x_0, r, θ, ϕ) givet ved

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, r\cos\theta, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi)\ , \tag{8}$$

hvor

$$0 < r \ , \quad 0 < \theta < \pi \ , \quad 0 \le \phi < 2\pi \ ,$$

findes ved brug af kædereglen

$$ds^2 = -dx_0^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\ .$$

Da θ og ϕ allerede er begrænset til et kompakt område kan vi nøjes med at kompaktificere de to koordinater x_0 og r. Hertil kan vi gøre brug af det 2-dimensionale tilfælde, idet de to første led på højre side af den sidste ligning netop har samme form som den 2-dimensionale Minkowski metrik på halvrummet $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Benyttes betegnelsen R for X_1 ovenfor, fås derfor

$$ds^2 = \frac{1}{4}(\cos\frac{1}{2}(X_0 + R)\cos\frac{1}{2}(X_0 - R))^{-2}(-dX_0^2 + dR^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\ .$$

Udnyttes endelig, at

$$r = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\frac{1}{2}(X_0 + R) - \operatorname{tg}\frac{1}{2}(X_0 - R))$$

iflg. (7) fås ved brug af additionsformler for cos og sin, at

$$r \cos\frac{1}{2}(X_0 + R) \cos\frac{1}{2}(X_0 - R) = \sin R \ ,$$

og dermed

$$ds^2 = \Omega^{-2}(X_0, R)(-dX_0^2 + dR^2 + \sin^2 R(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \ , \tag{9}$$

hvor

$$\Omega(X_0, R) = 2\cos\frac{1}{2}(X_0 + R)\cos\frac{1}{2}(X_0 - R) \ . \tag{10}$$

Pånær faktoren Ω^{-2} ses (9) at være identisk med Lorentz metrikken (4) på E, såfremt (X_0, R, θ, ϕ) betragtes som koordinater på E. Vi definerer derfor afbildningen φ ved at den sender punktet (8) i $\mathbb{R}^4$ i punktet (3) i E, hvor

$$X_0 = \operatorname{Arctg}(x_0 + r) + \operatorname{Arctg}(x_0 - r) \ , \quad R = \operatorname{Arctg}(x_0 + r) - \operatorname{Arctg}(x_0 - r) \ . \tag{11}$$

Det bemærkes, at denne afbildning er veldefineret på hele $\mathbb{R}^4$, d.v.s. også for $r = 0$, og man indser let, at den er en homeomorfi på sit billede, der er bestemt ved

$$-\pi < X_0 + R < \pi \ , \quad -\pi < X_0 - R < \pi \ , \quad 0 \leq R \ . \tag{12}$$

Da Ω givet ved (10) er $\neq 0$ i dette område, følger sætningen nu af (9).

Området (1) angives tit ved et såkaldt *Penrose diagram* som vist på Fig.4, i hvilket hvert punkt repræsenterer en 2-dimensional kugleflade, og den stiplede linie antyder, at de polære koordinater er singulære for $r = 0$. En 2-dimensional udgave af billedet af Minkowski rummet i cylinderen $\mathbb{R} \times S^1$ er givet i Fig.5. Randen af dette billede kan da betragtes som randen af Minkowski rummet. Den består af punkterne $i^{\pm}$, der er endepunkter for tidslige kurver, mængderne $\mathcal{I}^{\pm}$, hvis punkter er endepunkter for null-kurver og endelig punktet i^0, der er endepunkt for rumlige kurver.

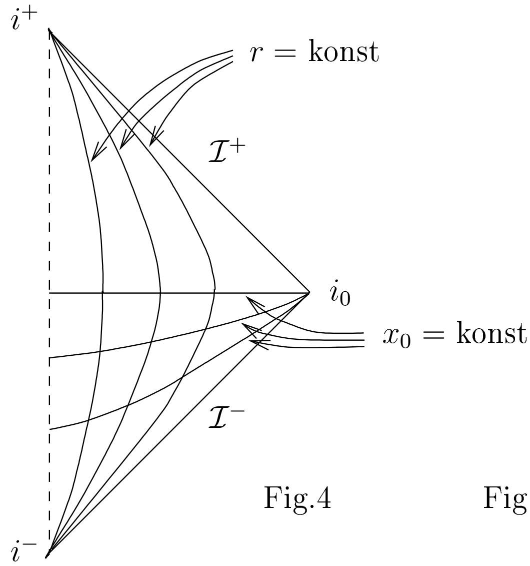


Fig.4

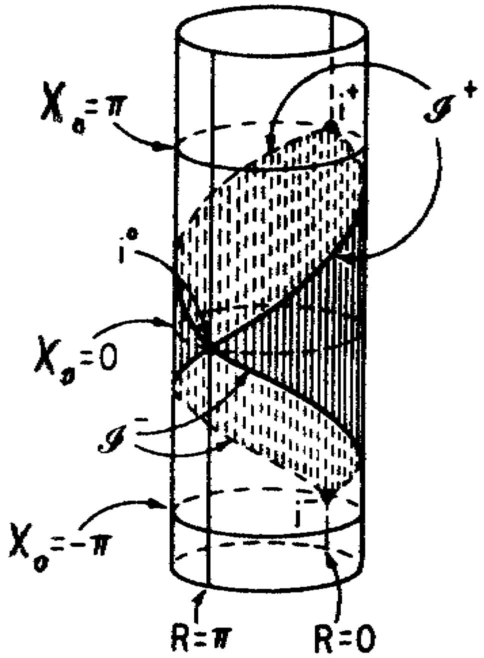


Fig.5

Konstruktionen af kompaktifikationen af Minkowski rummet kan gennemføres for en stor klasse af rum med tilhørende Penrose diagrammer, og har talrige anvendelser i relativitetsteori. Vi nøjes her med at nævne en anvendelse af mere matematisk karakter.

Lad os se på bølgeligningen i $\mathbb{R}^4$, d.v.s. den partielle differentialligning

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial {x_0}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_3}^2} = 0 \, . \tag{13}$$

Den 2-dimensionale udgave af denne er omtalt i Mat2AN noterne. Bl.a. vises eksistens og entydighed af løsninger for givne tilstrækkelig regulære begyndelsesdata. Det tilsvarende resultat gælder også for det 4-dimensionale tilfælde. Mere præcist gælder, at der for givne funktioner $u_0, v_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, d.v.s. vilkårligt ofte differentiable funktioner med kompakt støtte på $\mathbb{R}^3$, findes netop en løsning u til (13), således at der for $x_0 = 0$ gælder, at $u = u_0$ og $\frac{\partial u}{\partial x_0} = v_0$ på $\mathbb{R}^3$.

Som det fremgår af bølgeligningens form, er den tæt knyttet til Minkowski metrikken på $\mathbb{R}^4$. Uden at gå nærmere ind på denne sammenhæng nævnes, at der på ethvert rum udstyret med en Lorentz metrik findes en naturlig bølgeligning, der generaliserer (13). Dette gælder specielt for Einsteins statiske univers E, og man viser tilsvarende, at der til givne tilstrækkelig regulære begyndelsesdata $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0$ defineret på S^3 findes en entydig løsning $\tilde{u}$ defineret på hele E, således at $\tilde{u}$ og $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_0}$ for $X_0 = 0$ er lig med henholdsvis $\tilde{u}_0$ og $\tilde{v}_0$.

I modsætning til det 2-dimensionale tilfælde, findes der for (13) ikke en simpel formel, der udtrykker u ved u_0, v_0. Specielt er det ikke umiddelbart klart hvordan u's asymptotiske opførsel er for store afstande eller lange tider, hvilket er af stor betydning i konkrete anvendelser. Benyttes imidlertid ovennævnte fakta kan følgende resultat vises.

. *Lad u_0, v_0 være vilkårligt ofte differentiable funktioner med kompakt støtte på $\mathbb{R}^3$.*

Da gælder om løsningen u til (13) *for givne $a, v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$, at*

$$|u(a+sv)| \leq \begin{cases} c/s^2 & \text{hvis} \quad q(v) < 0 \\ c/s & \text{hvis} \quad q(v) = 0 \end{cases}$$

hvor c er en konstant.

For at indse dette betragtes funktionen

$$\tilde{u}(y) = \Omega^{-1}(y) u(\varphi^{-1}(y)) \ , \quad y \in E \ , \tag{14}$$

hvor $\Omega(y)$ er givet ved (10) som funktion af de cylindriske koordinater til y. Ved udregning finder man, at $\tilde{u}$ tilfredsstiller bølgeligningen på E, hvis detaljerede form vi ikke her skal gengive. Men $\tilde{u}$ er kun defineret på $\varphi(\mathbb{R}^4)$. Betragtes imidlertid funktionerne $\tilde{u}_0$ og $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_0}$ for $X_0 = 0$ ses let, at disse kan udvides til uendelig ofte differentiable funktioner (af de cylindriske koordinater) på hele $\{0\} \times S^3$ ved at sætte dem til 0 i punktet i^0 (se Fig.5). Af eksistens og entydighedssætningen med disse begyndelsesdata følger da, at løsningen er en to gange differentiabel udvidelse af $\tilde{u}$ til hele E, som vi også kalder $\tilde{u}$. Specielt er $\tilde{u}$ kontinuert på randen af Minkowski rummet.

Vi bemærker nu, at $\varphi(a+sv)$ går imod et punkt på randen af Minkowski rummet for $s \to \infty$, nærmere bestemt imod i^+ eller i^- i første tilfælde og imod et punkt i $\mathcal{I}^\pm$ i det andet tilfælde. Af (14) følger derfor, at den asymptotiske opførsel af $u(a+sv)$ er bestemt af den asymptotiske opførsel af $\Omega(\varphi(a+sv)$, som er lige til at udregne fra formlerne (10) og (11), og giver det ønskede resultat.

Til slut bemærkes, at der i tilfældet $q(v) > 0$ gælder, at $u(a+sv) = 0$ for s tilstrækkelig stor som følge af, at bølgeudbredelsen beskrevet ved (13) i overensstemmelse med relativitetsteoriens principper foregår ved hastigheder mindre end eller lig med c.

Litteraturliste

[1] S.W.Hawking and G.F.R.Ellis: The large scale structure of space-time. Cambridge University press, 1973.

[2] R.Wald: General Relativity. University of Chicago press, 1984.

[3] R.Penrose and W.Rindler: Spinors and space-time. Cambridge University press, 1986.

Jul i det gamle koordinatsystem

Peter Olsen, studerende ved Odense Universitet

Julen nærmede sig i det gode gamle koordinatsystem, overalt på koordinatakserne hang der gran, julepynten dannede de smukkeste sinuskurver, og ind imellem var der en gammel vinkel, der kiggede på de unge vinklers muntre leg og tænkte: "Ak ja, hvem der bare var 20 grader igen."

Også X havde bemærket det, men han kunne ikke deltage i de andres juleglæde. Gennem snart mange år havde hans indkomst været en monotont aftagende funktion, og i stuen ved siden af sad hans elskede Y med fem uforsørgede geometriske figurer ved sit bryst; der var den ældste, hypotenusen, der snart skulle ud og danne sin egen vinkel med tilværelsen; der var de to uartige kateter, der altid skændtes om, hvem der var mest vinkelret på den anden; der var tangenten, der levede i sin egen lille verden; og så var der andengradsligningen, der var så lille at den slet ikke kunne løses endnu. Og denne morgen var $a = 24$, altså juleaftensdags morgen. Men ak, tænkte X, hvordan skulle det ikke gå i aften, mens alle andre spiser julemad og giver hinanden gaver, mens han selv end ikke havde råd til at få sig en ny 1. koordinat? X's juleglæde var i sandhed en ægte delmængde af de negative tal.

For at jage de dystre tanker lidt på flugt, gik han ind på vektorrummet ved siden af og fandt en gammel matematikbog, som pantefogeden havde overset sidste gang, han havde været der, og som X ikke havde åbnet siden juleglæden havde været positiv. Han åbnede bogen—men nej—hvad var dog det? Ud fra de gulnede sider sprang—ja, minsandten, det var selveste Pythagoras, som X havde kendt for længe siden i begyndelsespunktet for sit definitionsinterval. Pythagoras spurgte X om, hvorfor han dog så så tungsindig ud. Så forklarede X om sin elskede Y med de fem uforsørgede geometriske figurer, om hypotenusen, der snart skulle ud og danne sin egen vinkel med tilværelsen, om de to kateder, der altid skændtes om hvem der var mest vinkelret på den anden, om tangenten, der levede i sin egen lille verden, og om den nye, andengradsligningen, der var så lille at den slet ikke kunne løses endnu og han fortalte om sin indkomst, der gennem snart mange år havde været en monotont aftagende funktion og om den tilstundende juleaften, der jo ikke tegnede lyst for familien.

"Hvad skal jeg dog gøre?", sluttede X sin beretning. Pythagoras, der under X's fortælling havde lagt hovedet i stadigt dybere folder, lyste pludselig op, og gav ham tre ligninger. "Løs nu disse tre ligninger," sagde han til X, "så skal du se, så løser det sig nok." Og inden X kunne nå at nævne tre naturlige tal, var Pythagoras gået mod uendelig.

I mellemtiden havde Y sendt de fem uforsørgede geometriske figurer til bageren efter noget tørt brød, for at de dog skulle have noget at spise denne aften. Forrest gik hypotenusen, der jo alligevel snart skulle ud og danne sin egen vinkel med tilværelsen, bagefter gik kateterne og skændtes om, hvem der var mest vinkelret på den anden, og bagerst gik tangenten med den nye, andengradsligningen, der jo var så lille at den slet ikke kunne løses endnu.

X gik ind til sin elskede Y og fortalte om hændelsen med Pythagoras, og han viste Y de tre ligninger, han havde fået. Og de blev enige om, at der da ikke kunne ske noget ved at prøve at løse de tre ligninger.

Og så gik de i gang. Først skulle de oprejse den vinkelrette på stuegulvet; og se; da de oprejste den vinkelrette på stuegulvet foldede den sig straks ud og blev til det dejligste juletræ. Derefter skulle de finde parallelplanen til loftet, og parallelplanen til loftet blev straks til et fuldt dækket julebord, med den dejligste julemad. Til sidst skulle de danne et diskret udfaldsrum, og det diskrete udfaldsrum blev øjeblikkelig til de herligste julegaver til hele familien.

Da X og Y var færdige kom de fem uforsørgede geometriske figurer tilbage fra bageren—tomhændede og bedrøvede, fordi bageren ikke gav kredit til figurer eller andre geometriske størrelser uden kendskab til rentesregning.

Denne juleaften blev den juleaften, hvor glædesfunktionen antog sit maksimum for alle i familien. Først spiste de al den dejlige julemad, så gik de i cirkel med det smukt pyntede juletræ i centrum, og endelig pakkede de gaverne ud. Hypotenusen fik en vinkelmåler, da den jo alligevel snart skulle ud og danne sin egen vinkel med tilværelsen; tvillingerne, de to uartige kateter, fik hver sin vinkelsliber, så de kunne blive lige vinkelrette på hinanden (ret skal være ret), tangenten fik et atlas så den nemmere kunne leve i sin egen lille verden, og endelig fik den lille andengradsligning en funklende ny løsning med helt ægte irrationale tal.

Og sådan blev det alligevel jul i det gode, gamle koordinatsystem.

Studenternes egen fagforening

De studerende der er ansat som instruktorer, hjælpelærere eller studievejledere på de videregående uddannelser i Hovedstadsområdet har deres egen fagforening, Instruktorfagforeningen (IFF). IFF-København forhandler med uddannelsesinstitutionerne om blandt andet arbejdsforhold, forberedelsestid og uddannelse af instruktorer og studievejledere.

IFF-København og vores søsterorganisationer FIF-Århus og IFF-Odense udgør til sammen SUL - Studenterundervisernes Landsforbund. SUL forhandler overenskomsten for instruktorer, hjælpelærere, præparatfremstillere, demonstratorer og studenterstudievejledere med Finansministeriet. Ved overenskomstforhandlingerne samarbejder SUL med FADL Foreningen af Danske Lægestuderende.

Et godt netværk

Der er flere årsager til at studenterunderviserne og studenterstudievejlederne i Danmark har deres egen fagforening.

Først og fremmest er den et netværk til at udveksle informationer og erfaringer og til at støtte nyansatte. IFF holder medlemsmøder om relevante emner og til den årlige generalforsamling kan man møde kolleger fra andre fag og institutioner. Vi taler om de lokale arbejdsforhold og ressourcer og hjælper hinanden til at få de bedst mulige vilkår i vores arbejde. Desuden drøfter vi de udfordringer vi møder og hvordan man bedst håndterer de svære situationer i undervisningen og på studievejledningerne. Endelig finder vi fælles fodslag udadtil i sager der vedrører medlemmernes arbejde. Det kan f.eks. dreje sig om optagelsessystemet, SU eller udbudet af kurser.

Løn med mere

Som nævnt står IFF via SUL for at forhandle overenskomst for studerende der er ansat som undervisere og studievejledere. Det er således IFF der har sikret den lønforhøjelse som disse studerende lige har fået.

Udover lønnen indgår der en række andre ting i overenskomsten. Der er regler for forberedelsestid, arbejdsbeskrivelser, ansættelser, afskedigelser, barsel og meget mere. Disse regler er uddannelsesinstitutionerne tvunget til at følge og skal der laves lokale undtagelser eller afvigelser fra de regler, skal de godkendes af IFF. Lokalaftaler drejer sig for det meste om omfanget af den forberedelsestid, man får løn for.

Der er to andre områder under overenskomsten der er meget vigtige for IFF. For det første er der uddannelse af medlemmerne til det arbejde, de skal udføre. Studievejlederne får tilbudt et grundkursus på 5 dage, hvor man introduceres til vejledningsteknikker og vejledningsetik mm. Instruktorer får intet centralt tilbud om uddannelse overhovedet. Dette arbejder IFF for at forbedre, så alle får tilbudt uddannelse så hurtigt som muligt efter deres ansættelse - og gerne inden de begynder deres arbejde. Vi forholder os løbende til kvaliteten og indholdet af studievejlederkurserne for at sikre at de er så gode som muligt. Desuden hjælper IFF de lokale arbejdsgivere (institutter og fakulteter) med lave kurser såsom den nystartede studievejlederuddannelse på KUA og de påtænkte instruktorkurser på naturvidenskab på KU.

Det andet væsentlige område er ordningen med "talsmænd"for studenterundervisere og studievejledere. Der er i overenskomsten regler om at studenterundervisere og studievejledere alle steder, hvor der er mindst 5 ansatte kan vælge en repræsentant. Denne talsmand har så ret til en plads i det lokale samarbejdsudvalg og skal orienteres om alle ansættelser mm. Det er altså en slags tillidsmand, men ikke helt.

Hvad koster det?

Et års medlemsskab koster 150 kr. hvis man er ansat til under 10 timers arbejde om ugen og 300 kr. hvis man arbejder mere end 10 timer.

Kontingentet er fradragsberettiget og hvis man oplyser sit cpr.nr. ved indmeldelsen så meddeler IFF det automatisk til skattevæsenet.

Hvem er vi?

IFF ledes i det daglige af et forretningsudvalg på 6 personer, der alle er studerende og naturligvis medlemmer af fagforeningen. Formanden, Gyrd Foss, er ansat på KUA og de andre medlemmer af forretningsudvalget er ansat som studievejledere rundt omkring. Pt. er der altså desværre ingen instruktorer i forretningsudvalget.

Hvor er de?

Du kan kontakte IFF via sekretariatet:
Instruktorfagforeningen
C/o Forenede Studenterråd
Fiolstræde 10
1171 København K
Du kan også ringe på tlf. 21 78 90 85 eller e-mail'e til formanden, Gyrd Foss: `gef@adm.ku.dk`.

Opgaver

Opgave 1

Instititutlederen, Numismatov, på det lille eksklusive matematiske institut Urkutžxk i Murmansk har fået til opgave at opdele det videnskabelige personale i grupper, som skal forske sammen. Grupperne skal indeholde færre end 5 personer. Ingen må forske alene. Alle forskere skal tilknyttes en og kun en gruppe for at sikre at al forskning bliver opfattet som første prioritet. Erfaringer fra tidligere har vist at Vulonlar og Ruparov ikke er særligt produktive når de arbejder sammen. Det samme gælder Ruparov og Kowansky. Grupperne skal sammensættes så der kommer mest muligt ud af det. Rinturbar deltager ugentligt i konferencer som kun kan forliges med enten Ruparov eller Kowanskys kalendre. Rinturbar skal være i en gruppe med nøjagtigt 3 forskere i alt. Johannow foretrækker at forske i ren matematik. Hvis Borpritzsky og Kowansky er de eneste medlemmer af en af grupperne, hvordan kan alle 7 forskere så tildeles grupperne? (hint: der er kun 2 muligheder.)

Opgave 2

Hvor stor en procentdel af alle heltal indeholder mindst et 3-tal?

Opgave 3

x og y har den følgende konversation:
x: Jeg har glemt, hvor gamle dine børn.
y: Produktet af deres alder er 36.
x: Jeg ved det stadig ikke.
y: Summen af deres aldre er det samme som dit husnummer.
x: Jeg ved det stadig ikke.
y: Den ældste har rødt hår.
x: Nu ved jeg, hvor gamle de er!
Hvor gamle er børnene?

Opgave 4

Lad $x1 = x$.
For i større end 1 lad:
x_{i+1} være lig x^{x_i}

Lad $\lim_{x \to \infty} = 2$
Hvad er x?

Opgave 5

Der er en gratis gave i hver af mine cornflakes bokse. Producenten oplyser, at der er 4 forskellige farver og opfordrer til at man skal samle alle 4 farver. Antag at der er lige chancer for at få hver af farverne. Hvad er da det forventede antal bokse jeg kommer til at spise, hvis jeg vil samle alle fire farver?

Opgave 6

Opgaveløsninger

Opgave 1

Opgaven var at udregne denne lille sum, hvor vi desværre ikke ved ret meget om halvdelen af leddene:

$$\sum_{j=2}^{\infty}(\zeta(j)-1)$$

Hvis vi starter med at indsætte definitionen af ζ, får vi følgende dobbeltsum:

$$\sum_{j=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^j}-1\Big)=\sum_{j=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^j}\Big)$$

Her har vi også udnyttet at $1^j=1$. Nu har vi ikke længere én, men to uendelige summer, det går fremad? Nu finder vi så et velkendt trick frem, vi bytter om på summationsrækkefølgen. Da j og k er fuldstændigt uafhængige, er det en ganske enkel operation:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{k^j}\Big)$$

Nu er den indre sum lige pludselig blevet til noget meget velkendt, nemlig en kvotient-/geometrisk række, som vi kender værdien af:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{\frac{1}{k^2}}{1-\frac{1}{k}}\Big)=\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{k-1}{k}}\Big)=\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{k^2}\frac{k}{k-1}\Big)=\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{k(k-1)}\Big)$$

Denne sum vil nogen genkende, men lad os alligevel regen den ud:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{k(k-1)}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{k+1-k}{k(k+1)}\Big)=$$

Nu kan man se at tælleren er differensen af de to led i nævneren, og får derfor lyst til at dele brøken op i to:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$$

Vi kan nu se, at den „frygtelige“ sum vi startede med giver 1.

Opgave 2

Opgaven lød som følger: *En kasse indeholder to mønter. Den ene er ganske normal, men den anden krone på begge sider. En mønt tages fra kassen, og man ser hvad der er på den ene side. Hvis den side man ser er krone, hvad er så sandsynligheden for at der også er krone på bagsiden?*

Vi har helt klart at gøre med betingede sandsynligheder her, så lad os gribe fat i den mest kendte formel på området:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Her dækker A over hændelsen „der er krone på begge sider af mønten", og B er hændelsen „den valgte side er krone". $P(AB)$ er så sandsynligheden for at den side vi kigger på er krone, og at mønten har to kroner. Sandsynligheden for at begge disse hændelser indtræffer er $1/2$, for hver mønt har sandsynligheden en halv, for at være udtrukket, og for to-krone mønten er sandsynligheden for at vi har valgt krone 100%. Sandsynligheden for B er $3/4$, for der er 4 sider i kassen, og tre af dem af krone. Alt i alt bliver den søgte sandsynlighed $\frac{1/2}{3/4} = 2/3$.

Opgave 3

Opgaven gik ud på at finde ud af hvordan en flok uendeligt grådige, uendeligt logisk og uendeligt blodtørstige pirater skulle dele en skat. Kald den højest rangerende pirat for A, den næste for B, osv. Lad $(x, y, z, \ldots)$ betyde at pirat 5 får x guldmønter, pirat 4 får y, osv.

Hvis kun pirat E er tilbage, får han det hele.

Hvis kun pirat D og E er tilbage, har D intet håb. Lige meget hvad han foreslår stemmer pirat 5 nej, simder ham overbord og får det hele.

Hvis kun pirat C, D og E er tilbage, kan C regne med Ds støtte, så længe D får mindst én mønt, for hvis C må gå planken ud, ved 4 at han heller ikke får noget. Så pirat C skal foreslå fordelingen $(0, 1, 999)$. Bemærk at D vil stemme nej til $(0, 0, 1000)$, selv om et ja ville rede hans eget liv, er fornøjelsen ved at lade C gå planken ud større.

Hvis kun piraterne B, C, D og E er tilbage, kan pirat B regne med at C stemmer nej, med mindre han får mere end 999 mønter, hvilket ville efterlade alle andre med 0, hvilket ikke går igennem. B kan altså ikke regne med Cs støtte og skal derfor ikke bruger mønter på ham. B ved at hvis han går planken ud, bliver fordelingen $(0, 1, 999)$, så han kan regne med E støtte for 1 mønt for Ds for 2 mønter, og skal altså foreslå fordelingen $(1, 2, 0, 997)$, hvilket B, D og E stemmer ja.

Når alle 5 pirater er tilbage, kan A regne med at B stemmer nej, fordi han kan få 997 mønter ua af at lade A gå planken ud. A skal altså ikke spilde mønter på B, men koncentrere sig om at skaffe 2 stemmer fra de sidste 3. A ved at hvis han går planken ud bliver fordelingen $(1, 2, 0, 997)$. Es stemme vil altså koste 2 mønter, Ds vil koste 3 og Cs 1 mønt, han skal altså vælge E og C, fordi de er „billgst", og foreslå fordelingen $(2, 0, 1, 0, 997)$.

En „gammel“ opgave

I sidste nummer bragte vi løsningen på følgende opgave:

Tre personer A, B og C skal over en bro. A, der er i dårlig form, kan komme over broen på 10 minutter, B kan komme over på 5 minutter, mens C, kun skal bruge 2 minutter. De har også mulighed for at bruge en cykel, og ligegyldigt hvilken person, der cykler, skal han kun bruge 1 minut på at komme over. Hvad er den korteste tid, der skal til, for at alle kan komme over broen?

Vi skrev under henvisning til „opgavestillerens[1] løsning“, at det hurtigste løsning tog 2,92 sekund.

Vi har siden fået en besvarelse fra Mikael Rørdam.

Lad d_A, d_B og d_C betegne den distance (regnet med fortegn), henholdsvis A, B og C skal tilbagelægge på cykel, og lad t_A, t_B og t_C angiver den tid de bruger på at krydse broen. Da er

$$d_A + d_B + d_C \leq 1, \quad d_A, d_B, d_C \in [-1, 1],$$
$$t_A = 10(1 - d_A) + |d_A|, \quad t_B = 5(1 - d_B) + |d_B|, \quad t_C = 2(1 - d_C) + |d_C|.$$

Den teoretiske hurtigste tid, hvor alle kommer over broen, er således

$$t_{optimal} = \inf\{\max\{t_A, t_B, t_C\} \mid d_A + d_B + d_C \leq 1,\ d_A, d_B, d_C \in [-1, 1]\}.$$

For at løse dette optimeringsproblem, starter vi med at konstatere, at et kompakthedsargument giver, at der er en løsning.

Hvis (d_A, d_B, d_C) er punktet hvor, hvor $max(t_A, t_B, t_c)$ minimere, så er $d_A + d_B + d_C = 1$, fordi t_A, t_B og t_C er aftagende i henholdsvis d_A, d_B og d_C.

Videre må $t_A = t_B = t_C$, for hvis f.eks. $t_A < \max\{t_A, t_B, t_C\}$, da kan $\max\{t_A, t_B, t_C\}$ gøres skarpt mindre, ved at erstatte (d_A, d_B, d_C), med $(d_A + 2s, d_B - s, d_C - s)$, hvor $s > 0$ (og s ikke for stor.

Man skal nu bare løse ligningen $t_A = t_B = t_C$ i det $d_A + d_B + d_C = 1$ (man kan evt. overveje forskellige fortegnsmuligheder for d_A, d_B og d_C).

Hvis man løser dette problem får man

$$d_A = \frac{177}{225}, \quad d_B = \frac{117}{225}, \quad d_C = -\frac{69}{225}$$

og

$$t_{optimal} = t_A = t_B = t_C = \frac{73}{25} = 2,92.$$

At denne teoretiske optimale løsning, lader sig realisere så vi i sidste nummer af Famøs.

[1] hvilket dækker over et sted på nettet, vi ikke ønsker at afsløre, da vi stadig bruger opgaver derfra

Om værdien af π

HUNTSVILLE, Ala.-NASA engineers and mathematicians in this high-tech city are stunned and infuriated after the Alabama state legistature narrowly passed a law yesterday redefining π, a mathematical constant. The bill to change the value of π to exactly three was introduced without fanfare by Leonard Lee Lawson (D, Crossville), and rapidly gained support after a letter-writing campaign by members of the Solomon Society, a traditional values group. Governor Fob James says he will sign it into law on Wednesday.

The law took the state's engineering community by surprise. „It would have been nice if they had consulted with someone who actually uses π,“ said Marshall Bergman, a manager at the Ballistic Missile Defense Organization. According to Bergman, π is a Greek letter that signifies the ratio of the circumference of a circle to its diameter. It is often used by engineers to calculate missile trajectories.

Prof. Kim Johanson, a mathematician from University of Alabama, said that π is a universal constant, and cannot arbitrarily be changed by lawmakers. Johanson explained that π is an irrational number, which means that it has an infinite number of digits after the decimal point and can never be known exactly. Nevertheless, she said, π is precisely defined by mathematics to be „3.14159, plus as many more digits as you have time to calculate“.

„I think that it is the mathematicians that are being irrational, and it is time for them to admit it,“ said Lawson. „The Bible very clearly says in I Kings 7:23 that the alter font of Solomon's Temple was ten cubits across and thirty cubits in diameter, and that it was round in compass.“

Lawson called into question the usefulness of any number that cannot be calculated exactly, and suggested that never knowing the exact answer could harm students' self-esteem. „We need to return to some absolutes in our society,“ he said, „the Bible does not say that the font was thirty-something cubits. Plain reading says thirty cubits. Period.“

Science supports Lawson, explains Russell Humbleys, a propulsion technician at the Marshall Spaceflight Center who testified in support of the bill before the legislature in Montgomery on Monday. „Π is merely an artifact of Euclidean geometry.“ Humbleys is working on a theory which he says will prove that π is determined by the geometry of three-dimensional space, which is assumed by physicists to be „isotropic“, in or the same all directions.

„There are other geometries, and π is different in every one of them,“ says Humbleys. Scientists have arbitrarily assumed that space is Euclidean, he says. He points out that a circle drawn on a spherical surface has a different value for the ratio of circumfence to diameter. „Anyone with a compass, flexible ruler, and globe can see for themselves,“ suggests Humbleys, „its not exactly rocket science.“

Roger Learned, a Solomon Society member who was in Montgomery to support the bill, agrees. He said that π is nothing more than an assumption by the mathematicians and engineers who were there to argue against the bill. „These nabobs waltzed into the capital with an arrogance that was breathtaking," Learned said. „Their prefatorial deficit resulted in a polemical stance at absolute contraposition to the legislature's puissance."

Some education experts believe that the legislation will affect the way math is taught to Alabama's children. One member of the state school board, Lily Ponja, is anxious to get the new value of π into the state's math textbooks, but thinks that the old value should be retained as an alternative. She said, „As far as I am concerned, the value of π is only a theory, and we should be open to all interpretations." She looks forward to students having the freedom to decide for themselves what value π should have.

Robert S. Dietz, a professor at Arizona State University who has followed the controversy, wrote that this is not the first time a state legislature has attempted to redifine the value of π. A legislator in the state of Indiana unsuccessfully attempted to have that state set the value of π to three. According to Dietz, the lawmaker was exasperated by the calculations of a mathematician who carried π to four hundred decimal places and still could not achieve a rational number.

Many experts are warning that this is just the beginning of a national battle over π between traditional values supporters and the technical elite. Solomon Society member Lawson agrees. „We just want to return π to its traditional value," he said, „which, according to the Bible, is three."