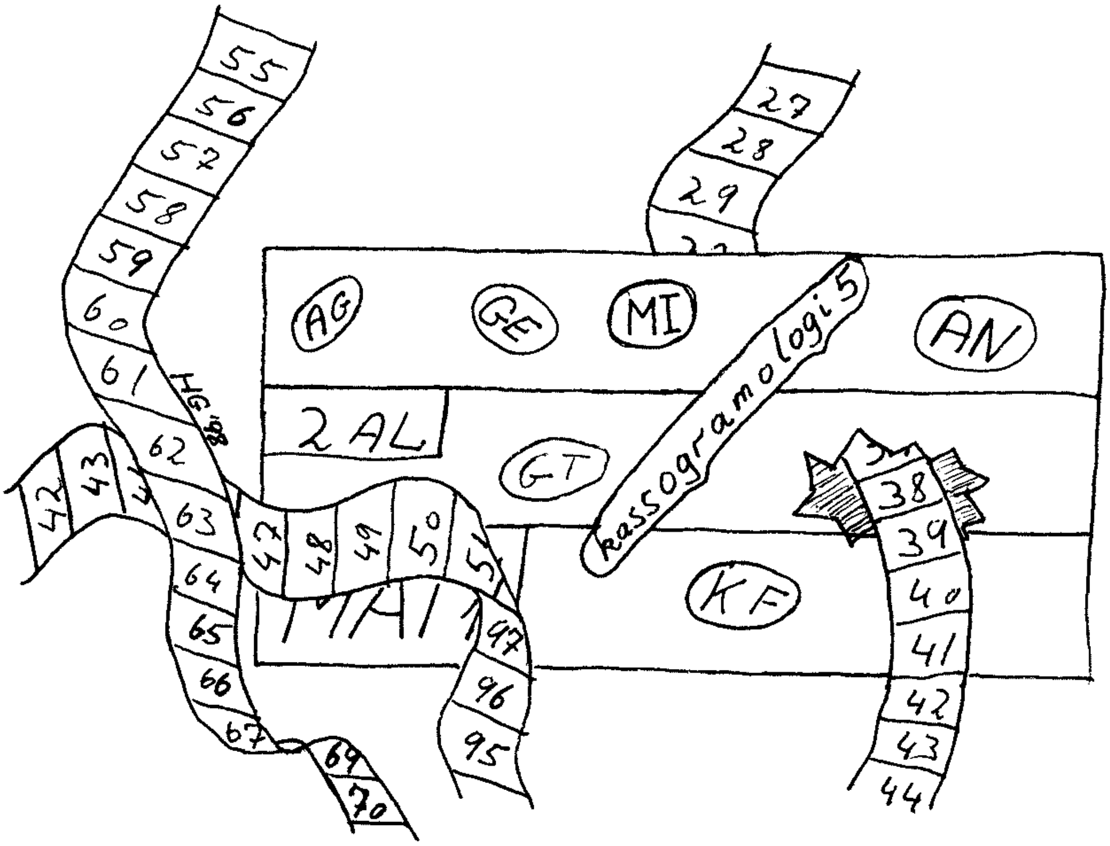
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

11. årgang, nr. 3, marts 1998



FAMØS 11.3; marts 1997.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove
Rasmus Borup Hansen (ansvh.)
René Jensen
Peter Lund

Tegner:

Henrik Christian Grove

Deadline for næste nummer:
Fredag den 24. april 1998

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX eller LaTeX 2_ε), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Eftertryk tilladt med kildeangivelse.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web adresse:
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 800 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

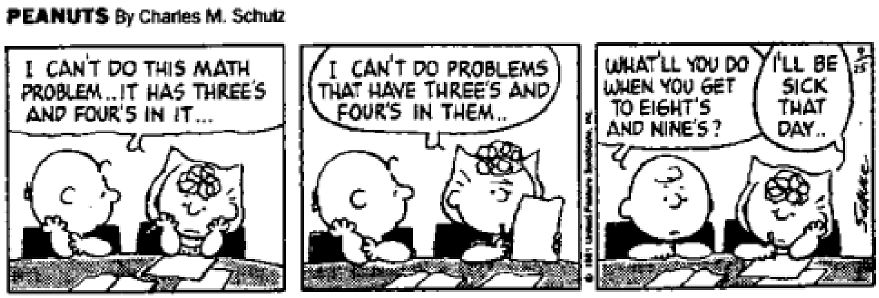
Leder

I sidste nummer havde vi et indlæg fra Niels R. Hansen og Mikkel M. Larsen om målteoriens placering på vores førstedel. Dette indlæg har fået flere af afdelingens VIP'er til at reagere med forskellige kommentarer, og derfor er dette nummer i høj grad præget af debatten om målteoriens placering.

Niels har desuden tænkt videre og foreslår i dette nummer en større omlægning af analyse- og geometriundervisningen på førstedelen.

På grund af almindelig sløvhed i redaktionen, er der desværre ingen side 9 sætning i dette nummer. For at dette ikke skal gentage sig, arbejder vi allerede på at skaffe en side 9 sætning til næste nummer. Denne kedelige situation kunne måske være undgået, hvis vi havde haft en lidt større redaktion, og derfor bør *du* hurtigst melde dig selv som redaktør!

Nu sker der noget i S01, i øjeblikket er malerne i gang med rummet, og når de er færdige, håber vi at have fået nogle penge til nogle møbler. På fagrådets sidste møde, foreslog S01-udvalget at lokalet får et navn, fra redaktionen kunne vi meddele, at da vi sidste år i maj udskrev en konkurrence om et navn til S01, modtog vi nøjagtigt ét forslag: „Jessens balsal". Vi modtager stadig gerne nye forslag!



Mat & Mad

Matematisk Afdeling holder igen *forskerdag*

mandag den 27. april.

Sæt kryds i kalenderen. Detaljer senere.

Om studiets tilrettelæggelse 1

Søren Eilers

Indledning

Niels R. Hansens og Mikkel Møllers indlæg betitlet „Målteori NU“ i FAMØS nr. 2, 11. årgang, er naturligvis blevet læst med stor interesse blandt lærerne på instituttet – vi er altid meget taknemmelige for at modtage kritik, specielt når den antager en så konstruktiv og velovervejet form. Særlig interesse har vi vist indlægget i et udvalg (bestående af Bergfinnur Durhuus, Niels Grønbæk, Ryszard Nest og undertegnede) nedsat af Matematisk Studienævn med det kommissorium at analysere førstedelens analyseforløb med henblik på at styrke sammenhængen og den almene kvalitet af kurserne Matematik 1 (Analyse), 2AN og 3AN.

Målteoriens rolle har naturligvis også været oppe i dette udvalg; „naturligvis“, fordi det desværre er lysende klart, at den model, vi benytter nu, ikke er tilfredsstillende og hæmmer tillæringen af analyseemner på både andet og tredje år.

Vi er således fuldstændig enige med NRH & MM om, at ændringer er påkrævede, men vi har i vor anbefaling til studienævnet foreslået en anden løsningsmodel, end den som NRH & MM udstikker. Kort sagt mener vi ikke, at det kan anbefales at genindføre et klassisk målteorikursus på andet år, men snarere at vi skal finde nye måder at løbende indføre grundlæggende målteoretiske metoder i Matematik 2AN og 3AN. Det er formålet med dette indlæg at redegøre for vor indstilling til studienævnet samt at beskrive ræsonnementet bag det.

Vores indstilling er hverken endelig eller på nogen måde knæsat af Studienævnet. Som det vil fremgå andetsteds i dette blad, er dette kun et enkelt indlæg i en levende debat, som alle interesserede opfordres til at deltage i.

Udvalgets problemformulering

Det skal understreges, at vi i udvalget *ikke* har diskuteret NRH & MM's forslag om at ændre på den overordnede kursusplan for andet og tredje år, simpelthen fordi dette ikke indgik i vort kommissorium fra studienævnet. Vi har altså kun tænkt over målteoriens rolle i analysekurser af størrelse 4 punkter på Matematik 2 (2AN) og Matematik 3 (3AN), og altså heller ikke set på de øvrige analysekurser 2KF, 3MI og det nye 2DD.

Historie

Det er nok på sin plads at indlede med at forklare, hvorfor man ændrede målteoriundervisningen fra den form, den havde frem til 1995. Forandringen var faktisk internationalt motiveret, i den forstand at man valgte at følge en indstilling i den *Advisory Group* der for nogle år siden gennemgik en række forhold ved Matematisk Institut. Man mente her, ud fra sammenligninger med vel især amerikanske universiteters læseplaner, at vi tog fat på dette emne før tiden, både hvad angik de studerendes specifikke faglige viden og deres opnåede faglige modenhed.

Advisory Group kunne pege på dårlige beståelsesprocenter på det daværende Matematik 2MA for at underbygge deres påstand, og uden at vi nødvendigvis mener, at noget er rigtigt, bare fordi de gør det sådan i Staterne, så er det vor opfattelse at Advisory Group havde ret på to helt specifikke punkter:

- Det er uhensigtsmæssigt at undervise i σ-algebraer, inden det nært beslægtede, men **vigtigere** og **lettere tilgængelige** begreb *et topologisk rum*, er grundigt behandlet.
- Det er urealistisk at forvente, at mere end den absolutte elite i vore populationer af andetårsstuderende kan tilegne sig en dyb forståelse af nødvendigheden af målelighedsbegrebet, og hvordan det benyttes i teoriens udvikling.

Man bedes på dette tidspunkt bide mærke i, at de to indsigelser henviser konkret til målelighedsbegrebet snarere end til lebesgueintegralet og dets egenskaber. Denne observation udgør en hjørnesten i det efterfølgende ræsonnement.

Det er også vigtigt at slå fast, at de fleste studerende på 2MA efter vor opfattelse i løbet af kurset fik en god forståelse for lebesgueintegralets brug og dermed den nødvendige ballast til deres videre studier i fx matematisk analyse og statistik. Derfor var kursusforløbet en succes i den forstand, at det bibragte de studerende den krævede indsigt, noget der i høj grad kan tilskrives det velgennemtænkte og velafprøvede notesæt, hvis rolle i øvrigt endnu ikke er udspillet ved instituttets førstedelskurser. Men vi kan tilslutte os Advisory Groups vurdering af, at prisen, i form af pladsen på vort dyrebare andetårskursusplan, var for høj i forhold til de opnåede resultater, hvad angik de umiddelbare behov for analyseundervisningen.

Analyseundervisningens målteoretiske behov

Lad os nu iføre os analysebrillerne og forsøge at opstille en prioriteret liste over, hvad vi har brug for at inddrage af målteori i analyseundervisningen på vor førstedel:

(i) Integral: Beregning, fortolkning som areal.
(ii) Grænseovergang med integraler: Lebegues sætninger om monoton og majoriseret konvergens.
(iii) Multiple integraler, ombytning af integrationsorden: Tonelli og Fubinis sætninger
(iv) Næsten overalt, L_1, L_2

En diskussion af rimeligheden af en sådan liste bør nok tage udgangspunkt i den mest kontroversielle del af den, nemlige *udeladelsen* af begreber som **mål**, **σ-algebra**, og **målelighed**. Det er vor opfattelse, at analyseundervisningen i løbet af de første 3 år kan klare sig uden en dybere indføring i disse begreber, uagtet deres indiskutable vigtighed for teoridannelsen og for undervisningen på højere faglige niveauer.

For at underbygge dette standpunkt vil vi bede den læser, der måtte være bekendt med 2MA-noterne, om at tænke på den del af dem, der leder frem til at bevis for Tonellis sætning. Broderparten af teksten er tilegnet det tekniske fokus på eksistens af produktmål og på målelighed af $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$, mens selve ombytningsprincippet følger heraf uden videre. Det er klart, at et stringent bevis ikke kan føres, uden at disse aspekter tages op, men sætningens indhold er jo uden videre forståeligt og endda intuitivt rimeligt. Vi mener at dette er et eksempel på en vigtig sætning, hvis bevis er *undværligt* på vor førstedel.

Derimod mener vi, at en forholdsvis dybtgående forståelse for de 4 egenskaber ved lebesgueintegralet, der udtrykkes i grænseværdisætningerne og Tonelli & Fubini er *uundværlig*, og at vi ikke kan være bekendt at uddanne bachelorer i matematik uden at sørge for, at de får en mulighed for at opnå den. Her er svagheden ved den nuværende model, og vor indstilling er, at der skal sættes ind specifikt mod forståelse af hovedsætningerne, snarere end mod et højteknologisk forløb i målteoriens intrikate verden.

Målteori på andet år

Punkt (i) herover tænkes som nu dækket af Matematik 1 (analyse) med udgangspunkt i gymnasieundervisningen. På andet år foreslår vi følgende:

Punkterne (ii) og (iii) tænkes taget op i et forløb på Matematik 2AN der sniger sig udenom beviser og i stedet fokuserer på:

- Konkrete færdigheder i brug af de fire hovedsætninger om integral.
- Eksempler der illustrerer grænserne for disse fire sætningers gyldighed.

Eksemplerne kan med fordel vælges i det diskrete målrum over $\mathbb{N}$ udstyret med tællemål, sådan at man kan lære at sætte pris på nødvendigheden af præmisserne for sætningerne ud fra eksempler med grænseovergang af summer og ombytning af summationsrækkefølge. Herefter skulle det gerne være klart, hvorfor det overhovedet er nødvendigt at præcisere fx sammenhængen mellem integration og grænseovergang ved hjælp af krav om positive led eller majoranter. Det er også essentielt, at man opnår erfaring i brug af sætningerne ved løsning af konkrete opgaver, fx om integration af kontinuerte funktioner over $\mathbb{R}$ og $]0,1[$ ud fra riemannintegralet på kompakte delintervaller.

Der skal lægges vægt på opgaveregning, sådan at sætningerne er så tilpas velkendte, at de eventuelt kan benyttes i eksamensopgaverne.

Der er vor opfattelse at vi, ved at indføre et sådant forløb og sidenhen dvæle ved eksempler på anvendelser i teorien, kunne nå frem til en rimelig forståelse for lebesgueintegralets egenskaber, samtidig med at den faglige stringens styrkes i resten af kurset. Der er gjort plads til forløbet ved en række andre justeringer.

Fra et fagtraditionelt standpunkt synes det næsten håbløst at tage fat på punkt (iv) uden målelighedsbegrebet i ryggen; som NRH & MM også har observeret, så volder begrebet „*næsten overalt*“ traditionelt problemer i den distinktion mellem L_2 og $\mathcal{L}_2$, som man ikke kan komme udenom i fourieranalyseforløbet. Det er imidlertid vor erfaring, at det oftere er abstraktionen indeholdt i at tale om et rum af ækvivalensklasser, snarere end konkret målteori, der er problemfyldt. Princippet illustreres jo faktisk glimrende ved de stykkevis kontinuerte funktioner, man tager op i opgavesamlingen, så vi foreslår derfor at man holder sig til en løs formulering af målelighed, og dermed L_2 etc., og lægger lidt mere vægt på at studere klassen af funktioner, hvis integral er nul (det kan fx bevises ud fra grænseværdisætningerne at $\int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{Q}}\, dm = 0$).

Målteori på tredje år

Problemerne vokser imidlertid i omfang på Matematik 3, og det skal indrømmes, at vi har været fristede af at indstille at 3MI gøres obligatorisk for deltagere i 3AN. Når vi alligevel har valgt ikke at gøre det, skyldes det især, at man derved ville fastlåse mere end halvdelen af punkterne på 3. år for den som vil følge 3AN; vi ønsker nemlig ikke, at ændre på det efter vores opfattelse meget vellykkede samspil mellem 3GT og 3AN. Vi mener ikke, at feltet som helhed kan være tjent med en sådan alt-eller-intet holdning, og vil altså hellere forsøge at tillempe 3AN til deltagere uden målteori.

Det skal indrømmes, at selv om dette blev forsøgt i planlægningen af 3AN i foråret 1997, så lykkedes det kun i ringe grad – selv om kurset, og specielt eksamen, var tilrettelagt så 3MI ikke var en teknisk forudsætning, så oplevede vi undervejs at studerende uden baggrund i 3MI eller det gamle 2MA faldt fra. Og det er åbenbart, at et kursus som 3AN ikke kan undvære rummene L_1 og L_2.

Planerne for 3AN i foråret 98 omfatter et kort forløb i målteori på en „need to know“ basis med fokus på definition af lebesgueintegralet og med bevis for, at $C_0^\infty(\mathbb{R})$ er tæt i $L_2(\mathbb{R})$ og $L_1(\mathbb{R})$. På længere sigt arbejder vi med planer for en mere radikal omlægning af 3AN, og i denne forbindelse kan et mere omfattende forløb i målteori fra et funktionalanalytisk standpunkt (mål $\leftrightsquigarrow$ funktionaler, L_2 som abstrakt fuldstændiggørelse, etc.) måske komme på tale.

Om studiets tilrettelæggelse 2

Flemming Topsøe

1. Mat Y gøres obligatorisk for alle, der tager matematik bifag. Væsentlige indhold:

- Brudstykker af Matematisk Logik
- Naiv mængdelære
- Forberedelse til matematisk teoridannelse

Omfang 2 punkter, hvis det skal køre eksakt som det igangværende Mat Y. Men man kan klare sig med mindre (stryg sidste del, fokuser snævert på de centrale dele af naiv mængdelære).

Sigte:

- Forberede til abstrakt matematik, såvel algebra som analyse

- Inspirere ved omtale gennem hele kurset af matematikkens grundlag (det er en best-seller; vi lærere bør ikke lade denne mulighed for at få de studerende til at fatte godhed for faget gå fra os!).

2. Ideelt så jeg helst en stor dyne (4 punkter) af generel topologi, metriske rum, mål-og integralteori. Hvad der i øjeblikket mistes i fleksibilitet og sammenhæng/konsistens ved opdeling i mindre enheder er for meget. Da dette forslag vel er utopi, fortsætter jeg med andre forslag uden yderligere kommentar. I forhold til nuværende studieplan, kan der spares 1–2 punkter (kun 1 punkt vel, hvis topologien også skal forberede til andet end den generelle topologi).

3. Mål- og integralteorien rykkes ned på 2. år, sidste semester (forår). Kan kun lykkes, hvis forslag 1 imødekommes, men så er den også hjemme! Se i øvrigt indslag i Famøs, hvor penneførerne Mikkel og Niels dog glemte en meget væsentlig ting: Grunden til problemer med målteorien er i meget, meget stort omfang, at de studerende ikke behersker naiv mængdelære – se forslag 1.

4. Mat 2SS *bibeholdes* som det er, dog som forårskursus eller som 3.års kursus. Væsentlig bemærkning: De studerende, der i dag plages af irritation over det ringe eksakthedsniveau, får faktisk begreberne at se i eksakt udgave på målteorien. Jamen, hvorfor så ikke basere sandsynlighedsregning- og statistik på denne teori? Det har været prøvet, og den går simpelthen ikke. Det væsentlige i S&S-teori er *ikke* teknikken via målteori, men betragtningsmåderne, elementet af matematisk modellering. Det er *det*, der skal fokuseres på.

Om studiets tilrettelæggelse 3: Ingen analyse uden målteori

Jan Philip Solovej

Jeg har med interesse fulgt debatten omkring målteoriens rolle i undervisningen på grunduddannelsen. Det var specielt med stor glæde, at jeg læste Niels R. Hansens (NRH) og Mikkel Møllers (MM) indlæg „Målteori nu“ i Famøs nr. 2, 11. årgang. Det var rart at se, at nogen af vores matematikstuderende har forstået målteoriens helt centrale rolle som hjørnestenen i moderne analyse. Artiklens påstand om, at målteorien „i vid udstrækning giver eksempelmaterialet i videregående analyse“, må vel nærmest betragtes som en underdrivelse.

Netop i lyset af målteoriens centrale rolle i analysen er det med temmelig stor bekymring, jeg ser dens rolle forsvinde i undervisningen. Jeg føler derfor, jeg må reagere på den rapport, der er blevet udfærdiget af arbejdsgruppen nedsat af matematikstudienævnet og diskuteret i artiklen af Søren Eilers (SE) i denne udgave af Famøs.

Jeg synes, udvalget har gjort et fint stykke arbejde, indenfor de rammer der var blevet stillet. Det er klart, at det ikke var deres opgave at diskutere en større omstrukturering af analyseforløbet på grunduddannelsen. En diskussion af en sådan omstrukturering, som NRH og MM lægger op til i deres indlæg, vil efter min opfattelse være meget nyttig på nuværende tidspunkt.

Det er dog ikke min hensigt her at komme ind på dette. Derfor vil jeg heller ikke komme ind på, hvorvidt målteori skal ligge på andet eller tredje år. Det er snarere et helt konkret punkt i udvalgets rapport, som jeg er fundamentalt uenig i. Det drejer sig om, ikke at kræve målteori som forudsætning for tredjeårs analysekurset 3AN, med deraf følgende konsekvenser for forløb af kurserne 2AN og 3AN. Udvalgets argument for denne beslutning diskuteres i nogen detalje i artiklen af SE.

Hovedargumentet for ikke at gøre kurset 3MI (2 punkter) obligatorisk er, at det er for meget at kræve både 3GT (2 punkter) og 3MI som forudsætning. Hvorfor 3GT er vigtigere end 3MI, forstår jeg ikke, og det diskuteres hverken af SE eller af rapporten.

Efter min opfattelse er der ingen grund til at kræve et kursus i generel topologi som forudsætning for 3AN, og specielt ikke når det er på bekostning af målteori. For at sætte tingene på spidsen er generel topologi i sammenligning med målteori et ret indholdsløst emne. Emner som adskillelsesaksiomer, tællelighedsaksiomer, net og filtre må betragtes som alt for specialiserede for studerende på grunduddannelsen. Jeg arbejder selv med analyse hver dag og bruger *aldrig* disse begreber, jeg kan dårligt nok huske deres definitioner. Jeg har meget svært ved at forstå, at det skulle være vigtigere at diskutere disse begreber end begreber som mål, målelighed, næsten overalt, L^p rum og deres fuldstændighed (det resultat der måske har haft størst betydning for analysen i dette århundrede).

Jeg går ud fra, at de studerende allerede har set de vigtige topologiske begreber som åbne og lukkede mængder, konvergens, kontinuitet og kompakthed (følgekompakthed) i tilfældet af metriske rum. Den smule, de bør vide om generalisationen af disse begreber til det mere abstrakte, rent topologiske, tilfælde, må nemt kunne inkluderes i 3AN, specielt hvis man ikke behøver diskutere de betydeligt mere fundamentale resultater fra mål- og integralteorien.

Jeg har hørt argumentet, at kurset 3GT er en stor succes og at de studerende er meget glade for det. Jeg mener på ingen måde, at man skal opgive kurset 3GT, men blot at det ikke skal være en forudsætning for 3AN. Grunden til den store succes er måske at finde i, de emner 3GT dækker udover generel topologi. Kurset indeholder nemlig også de, efter min mening, mere interessante emner: Abstrakt mængdelære og algebraisk topologi. Disse emner er dog ikke af stor relevans for funktionalanalysen i 3AN, og bør bestemt ikke være en forudsætning for dette kursus.

Det kræver ingen større omstrukturering at ændre forudsætningskravet til 3AN. Jeg vil derfor foreslå studienævnet snarest at tage sagen op.

Om studiets tilrettelæggelse 4: Lappeløsninger duer ikke

Niels Hansen

I sidste nummer af Famøs kunne man læse en artikel af Mikkel Møller Larsen og undertegnede, hvor der blev argumenteret for målteoriens tilbagevenden til MAT 2. Hovedideen bag dette forslag var ønsket om en styrkelse af matematikstudiet og i særlig grad analysedelen. Man kan andre steder i dette nummer af Famøs læse forskellige ansattes reaktion på vores forslag, men det vil jeg ikke trampe rundt i. Jeg vil i stedet i denne artikel præsentere et alternativt forslag til et forbedret studieforløb på bachelordelen af matematikstudiet.

Men hvorfor overhovedet ændre noget? MML og jeg selv argumenterede grundigt i sidste artikel for netop dette. Endvidere har man nu ca. 2 års erfaring med den omfattende studiereform, der blev sat i værk for 3 år siden. Noget har været godt, og andet er faldet mindre heldigt ud. Det er min opfattelse, at hvis man tager det bedste og forener det med lidt nytænkning, så kan vi skabe et rigtigt godt studieforløb. Ikke blot et studieforløb, der kan lade sig gøre, men et forløb der falder naturligt og giver de studerende et solidt fundament inden overbygningen.

Ved nøjere overvejelse stod det mig klart, at vores forslag var fokuseret meget på analysedelen af matematikstudiet, og det var selvfølgelig fordi, at det er her problemerne findes. Denne omfattende mængde analyse på 2. år er måske bare ikke den rigtige løsning på problemerne, men de forslag "analyseudvalget" har fremsat, og som er lappeløsninger, er ikke holdbare! Da jeg i mellemtiden også har stiftet bekendtskab med 3GE bogen og derudover har hørt forskellige reaktioner på vores artikel, var det så, at jeg fik følgende ide. 3GE er i den nuværende form på ingen måde for svært til at kunne være et kursus på 2. år, så kan det lade sig gøre at flytte dette kursus der ned? Og kan det lade sig gøre på en sådan måde, at der ikke er nogle andre områder der lider overlast? Det mener jeg, det kan, og endda sådan at mange vil komme styrket ud af omrokeringen. I tilgift øges fleksibiliteten i studiet. Det kan måske virke som om, at mine meninger ændre sig som vinden nu blæser, men det er faktisk ikke tilfældet. Den ide, jeg vil fremlægge, løser alle de problemer som MML og jeg fremsatte i sidste artikel, men den er bedre ud fra et helhedsmæssigt synspunkt. Ideen er en naturlig udvikling af den løsningmodel vi fremlagde, når man altså indrager en helhedsvurdering, og ikke fokuserer på et eller to kursers problemer.

Min hovedide er at lægge et 4-punkts kursus på 3. semester i differentialgeometri, der i vid udstrækning er identisk med det nuværende 3GE. Jeg har erfaret, at man har et tilsvarede kursus i Århus baseret på den samme bog og placeret på 2. år. Lad os i det følgende kalde dette kursus 2GE. Da der desuden er en tendens til, at man på MAT 1 bevæger sig væk fra den flerdimensionale analyse, så kan dette emne jo passende styrkes, ved at blive taget op i starten af 2GE. De to resterende punkter på 3. semester skal så være et analysekursus, som vi kalder 2A. Det behøver ikke at have noget med det gamle analysekursus 2AN at gøre, dog forestiller jeg mig en form for "metriske rum" kursus med tilføjelser, men her er der lidt spillerum. 4. semester skal forløbe som hidtil med 4 punkters 2AL og 2 punkters 2KF, da begge disse kurser synes at forløbe godt. Alt i alt bliver det et 2. år med 4 punkter indenfor hver af de tre centrale matematiske discipliner – geometri, analyse og algebra. Som nogen måske har bemærket, har jeg smidt 2SS på porten. Kurset er efter min mening ikke centralt i en matematikers uddannelse, og bør derfor slet ikke optage dyrbar plads som *obligatorisk* kursus på 2. år.

På 3. år skal vi så have et program, der kan få kabalen til at gå op. Jeg forestiller mig stadig et obligatorisk 3AL, men det vil være mest praktisk at lægge det om foråret dvs. i 6. semester. Lad os nu kigge på 5. semester. 3GT er et godt kursus og vigtigt for mange områder, og det skal vedblive med at være obligatorisk, men derudover skal der være et obligatorisk 4-punkts analysekursus, lad os kalde det 3A, der indeholder emnerne: målteori, Hilbertrum, operatorer på Hilbertrum, Fourieranalyse og differentialligninger eller noget tilsvarende. Jeg forestiller mig noget i stil med 3MI plus dele af det nuværende 2AN, men igen er der lidt spillerum. Det afgørende er bare, at dette kursus og 2GE skal være "ombyttelige". Dermed mener jeg, at man uden forudsætningsproblemer kan tage 3A på 2. år i stedet for 2GE. Pointen er at statistikere (eller fysikere – se senere) kan tage dette kursus istedet for 2GE, og dermed få dækket deres behov for "hjælpematematik". I så fald får man et forløb på 2. år, der indholdsmæssigt minder meget om det, MML og jeg præsenterede i sidste artikel. Som resterende 2-punkts kurser på 5. semester, forslår jeg de nuværende 3RE, 3AG og 3MH samt et nyt 3GE kursus. Det nye 3GE kan så tage forskellige videregående differentialgeometriske emner op – noget der fuldstændigt er forsvundet fra bacheloruddannelse. I 6. semester skal der som sagt være et 3AL kursus i sin nuværende form samt det nuværende 2-punkts kursus 3NA. Dertil kommer noget videregående analyse, der indholdsmæssigt kan overtage 3AN. Jeg foreslår to 2-punkts kurser, som vi kan kalde 3FU og 3DD. 3FU skal være en introduktion til funktionalanalysen med alt, hvad der dertil hører, og 3DD skal være et kursus i distributionsteori og differentialligninger. Igen vil jeg pointere, at det ikke er det præcise indhold af disse kurser, der skal være afgørende men derimod strukturen i studieforløbet. Endelig skal der selvfølgelig være et 3SS.

En skematisk oversigt kunne se ud på følgende måde.

3. semester		***4. semester***	
2GE	4 punkter	**2AL**	4 punkter
2A	2 punkter	**2KF**	2 punkter

5. semester		***6. semester***	
3A	4 punkter	**3AL**	4 punkter
3GT	2 punkter	3FU	2 punkter
3RE	2 punkter	3DD	2 punkter
3AG	2 punkter	3NA	2 punkter
3MH	2 punkter	3SS	2 punkter
3GE	2 punkter		

Jeg har skrevet de obligatoriske kurser med fede typer. Med obligatoriske kurser mener jeg selvfølgelig de kurser, som man skal tage i løbet af et fuldt kandidatstudium. Jeg har i diskussionen slet ikke indraget MAT 1, og det er fordi "analyseudvalget" har fremsat et godt forslag om opstramning af det første studieår. Med det MAT 1, der er blevet lagt op til, er ovenstående program en glimrende fortsættelse.

Ovenstående model er meget fleksibel og kan producere folk med en solid viden indenfor de forskellige grundlæggende matematiske områder. På mange måder vil placeringen af differentialgeometrien på andet år styrke uddannelsesforløbet, da man nu i en lang række kurser kan trække på den nye fælles baggrund i geometrien. F.eks. kunne jeg forestille mig, at analysekurset 3DD kunne udnytte den viden, når der diskuteres randbetingelser. På 3GT kunne eksempelmaterialet udvides, og på overbygningen giver det måske plads til mere videregående geometri. Analysedelen står mindst lige så stærkt som før. Der er kommet en god struktur på rækkefølgen af de forskellige emner, og man kan stadig nå samme avancerede niveau som nu. Endvidere er 3FU og 3DD ikke obligatoriske, så man kan tillade sig at være lidt mere ambitiøse, uden frygt for at de, der tager kurset "fordi det skal de jo", falder fra pga. sværhedsgraden. De obligatoriske dele kommer til at stå bedre i forhold til hinanden, forstået på den måde, at der pt. er en urimelig overvægt af analyse. De to nuværende kurser 3GE og 3AN står idag milevidt fra hinanden i niveau og repræsenterer ikke en fornuftig balance mellem analysen og geometrien. Algebraen ligger midt imellem på et ganske fornuftigt niveau. Endelig levner forslaget mere plads til egentlige 2. dels kurser, da 2. delen ikke bliver helt så overfyldt med obligatoriske 3. års kurser.

Jeg nævnte tidligere fysikernes behov for noget analyse på 2. år, og en løsning var, at de som statistikerne også kan erstatte 2GE med 3A, men der er en anden mulighed for dem, da 2GE uden tvivl ville være et godt kursus for fysikerne. Der udbydes idag 4-punkts kurset MAT F for fysikere, der ikke ønsker at læse matematik som bifag, og dette kursus er specielt rettet mod de behov fysikerne har. Jeg ser intet problem i, at fysikerne kan erstatte de 4 analysepunkter på 2. år i ovenstående forslag med MAT F i sin nuværende form, og så derudover læse 2GE og 2AL, for på 3. år at læse matematik til bifagsniveau. Der ser heller ikke ud til at være nogle problemer med de nye tiltag som f.eks. erhvervsbachelor, matematik uden bifag og lærerbachelor.

Før der kan ændres på noget som helst, skal eventuelle ændringers konsekvenser analyseres nøje, og indholdet af de forskellige kurser skal fastlægges. Men tingene bør ændres, hvis der er en løsning, som er bedre end den nuværende, og det mener jeg klart ovenstående forslag er. En anden ting, der er værd at bemærke, er, at forslaget i bund og grund blot er en anden måde at spille mange af de samme kort på. Der er få omstruktureringer af analysekurserne, men ellers drejer det sig om, at flytte kurserne derhen, hvor de niveaumæssigt hører hjemme. Det ville give et mere gnidningsløst studieforløb, uden at der bliver gået på kompromis med kvaliteten

Jeg vil på det kraftigste opfordre læseren til at overveje mit forslag, og du er meget velkommen til at kommentere det (e-mail: richard@math.ku.dk). Jeg håber meget, at vi alle (studerende såvel som ansatte) kan være med til at sikre et godt studie for alle dem, der kommer efter os, og det kan vi ved ikke blot passivt at lade stå til, men ved aktiv deltagelse og engagement i vores studie. Til sidst skal det for en god ordens skyld nævnes, at i modsætning til sidste gang står jeg alene om dette forslag – specielt er denne artikel ikke nødvendigvis udtryk for Mikkel Møller Larsens meninger.

Caspar Wessels geometriske fremstilling af de komplekse tals teori.

Christian Ivar Westergaard

Danmarks bidrag til matematikkens udvikling før det 19. århundrede har umiddelbart ikke været ret stor. Men to personer må nu siges at have gjort et betydeligt arbejde, dog uden at det skulle være del af udviklingen. I Amsterdam 1672 blev der trykt et skrift af den bekendte matematiker Georg Mohr, *Euclides Danicus*. Dette var en fuldt gennemført behandling af konstruktion med passeren alene. Forfatteren var nemlig nået til den konklusion, at alle de konstruktioner der kunne udføres med passer og lineal indenfor Euklids geometri, kunne udføres med passeren alene. Dette var ellers tillagt italieneren *Mascheroni*, som fremsatte det i sit skrift *Geometria del compasso, Pavia 1797*. Følgende skal dog ikke behandle Mohrs værk[1], men derimod den systematiske fremstilling af de komplekse tals teori, af landmåler Caspar Wessel fra 1798.

Caspar Wessel (1745–1818) var fjerde søn af Tordenskjolds brodersøn og en af den kendte digter Johan Herman Wessels tretten søskende. På trods af de formodentlig beskedne vilkår kom Caspar Wessel i latinskole i Christiania (Oslo), for derefter at studere jura på Københavns Universitet. Han blev dog imidlertid optaget af Videnskabernes Selskab som assistent for hans ældre broder Ole Christopher Wessel, der var geodæt ved den geografiske landmåling, som selskabet stod for. Først i 1778 tog Caspar Wessel latinsk juridisk eksamen med bedste karakter. Caspar blev dog næsten ved med at udføre arbejde for selskabet til hans død.

I 1796 indsendte Wessel en afhandling til Videnskabernes Selskab, hvor han, som han selv siger, forsøgte at betegne rette liniers direktion ved analytiske tegn, og anvendte disse til sphæriske og retlinede polygoners opløsning. Selv om Wessel ikke var medlem af selskabet, gav Johan Niclolai Tetens, som var formand for den matematiske sektion, en redegørelse for afhandlingen. Tetens afholdte også en forlæsning over naturen af denne regning, som skulle udkomme i selskabets skrifter. Men ligesom den af Wessel selv lovede fortsættelse af arbejdet anvendt på funktionslæren, udkom den aldrig. Wessels afhandling udkom som særtryk i 1798 og i selskabets skrifter, 2. række 5. bind fra 1799, *Om Direktionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning. Af Caspar Wessel, Landmaaler*. Der skulle dog næsten gå et århundrede, før afhandlingen igen fik den opmærksomhed, den fortjener.

Først i S. A. Christensens disputats over matematikens udvikling i Danmark og Norge i det 18de årh. fra 1895, omtales arbejdet igen[2]. Samme forfatter og C. Juel

[1] Hertil henvises eventuelt til Mathematisk Tidsskrift B, 1928

[2] Chr. Jürgensen omtaler den dog i hans Bidrag til Molbecs *Videnskabernes Selskabs Historie* fra 1843, som at være for speciel til videre at beskrives

giver i henholdvis i 1897 og 1895 en beskrivelse af afhandlingens indhold, og tillæger med rette Wessel æren for den geometriske fremstillingen af de komplekse tals teori. Sophus Lie genoptrykte Afhandlingen i *Arkiv for Matematik og Naturvidenskab* (1896), og Selskabet trykte den i en fransk oversættelse (1897). Det er dog værd at bemærke, at denne sidste genoptrykkelse mangler den sidste af de tre tilhørende figurtavler. Dette kan forklares med, at lige netop denne tavle, i modsætning til de to øvrige, var indbundet blandt de figurtavler, der hørte til den forrige afhandling i selskabets skrifter. Dette opdages nu hvis man er nået ind i den sidste trediedel af afhandlingen (hvor der henvises til den), som ikke længere beror på det væsentligste af teorien, men er lange og snørklede notationer i eksempler på teorien andvendelse.

De komplekse tal er naturligvis et emne, man støder på indenfor ligningsteori, og emnet er givetvis meget ældre end Wessels tid. Mange har uden noget egentligt grundlag regnet med dem. F.eks. har hans kollega Thomas Bugge fejlagtigt sat $\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{ab}$ (*Første Grunde til Regnekunsten og Algebraen, 1772*, p. 340).

Wessels arbejde er at udtrykke rette linier ved analytiske tegn, for derefter at vise, at disse udtryk er de komplekse tal, og til sidst fremstille den sphæriske trigonometri, herved. Definitionerne på de sædvanlige operationer for reelle tal udvides til mere almene, der også omfatter rette linier, men med bibeholdelse af de sædvanlige operationer. Resultatet skal altså være identisk med de oprindelige i specialtilfældet, hvor linierne er sammenfaldene med abscissen.

Summen af to rette linier i planen eller rummet defineres nu som at være den rette linie fra den enes begyndelse til den andens slutning, når den anden starter hvor den første slutter. Altså $ab + bc = ac$. At addendernes rækkefølge er ligegyldig ses ved at betragte endepunktets afstande fra de tre vinkelrette planer. Er summen af flere linier lig nul, bliver summen af disse tre forskellige afstande hver især lig nul.

Linerne er kun fremstillet ved deres længde og direktion. Linierne kan altså udenvidere parallelforskydes. Det antages dog ofte gennem afhandlingen, at linier har samme udgangspunkt, da det er væsentligt at tale om vinklerne mellem dem. Ved linien $-ab$ forstås linien ab, men med modsat retning.

Produktet af to rette linier formes af den ene som den anden er formet af den absolutte enhed, som betegnes med 1. Denne er givet uden nogen relation til andet. Nu tænkes de to linier udgående fra det samme punkt som linien 1. Længden af produktet må altså være de to liniers længders produkt, og dens afvigelse fra linien 1 er summen af de to liniers afvigelse fra 1.

Nu indføres betegnelserne $+1$ for den positive enhed og $+\epsilon$ for en positiv enhed vinkelret på $+1$ med samme udgangspunkt. Argumenterne er nu for $+1 = 0$ grader, for $-1 = 180$, $+\epsilon = 90$ og for $-\epsilon = 270$ grader. Følgende produkter udregnes:

$$+1+1 = +1, +1-1 = -1, -1-1 = +1, +1+\epsilon = +\epsilon, +1-\epsilon = -\epsilon,$$
$$-1+\epsilon = -\epsilon, -1-\epsilon = +\epsilon, +\epsilon+\epsilon = -1,$$
$$+\epsilon-\epsilon = +1, -\epsilon-\epsilon = -1.$$

Det er altså ϵ der er $\sqrt{-1}$, og $\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \epsilon\sqrt{a}\epsilon\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$. Den oprindelige definition på multiplikation ses at være indeholdt i den mere almene (ligesom definitionen på addition)[3].

[3]Betegnelsen i er fra et manuskript af Euler fra 1777, men dens brug som fast notation, skyldes Gauss' brug af betegnelsen i *Disquisitiones arithmeticae, 1801*

Ud fra definitionenerne på cos og sin følger, at når radius, hvorfra vi udregner vinklerne, er sammenfaldende med den positive enheds linie, så udtrykker $\sin 90°$ både i længde og retning $+\epsilon$. For en linie med afvigelsen v grader fra $+1$ er $\epsilon \sin v$ liniens sinus. Og enhver linie med længde én, kan altså udtrykkes ved $\cos v + \epsilon \sin v$.

Ifølge definitionen af multiplikation vil produktet af de to radier som afviger henholdsvis v og u grader fra $+1$, afvige med $v + u$. Altså produktet af de to rette linier $\cos v + \epsilon \sin v$ og $\cos u + \epsilon \sin u$ bliver $\cos{(v + u)} + \epsilon \sin{(v + u)}$. Igen ses, at som den almene definition indeholder den definitionen på produktet af to summer:

$$
\begin{aligned}
&(\cos v + \epsilon \sin v)(\cos u + \epsilon \sin u) \\
&\qquad\qquad\qquad = \cos v \cos u - \sin v \sin u + \epsilon(\cos v \sin u + \cos u \sin v),
\end{aligned}
$$

men ifølge formlerne $\cos{(v + u)} = \cos v \cos u - \sin v \sin u$ og $\sin{(v + u)} = \cos v \sin u + \cos u \sin v$, er det sidste udtryk netop $\cos{(v + u)} + \epsilon \sin{(v + u)}$.

Udtrykket $\cos v + \epsilon \sin v$ er udtryk for en radius, med længden 1. En radius med længden r er $r \cos v + r\epsilon \sin v$. For når en retvinklet trekants kateder bliver r gange større bliver hypotenusen ligeledes r gange større: $r \cos v + r\epsilon \sin v = r(\cos v + \epsilon \sin v)$.

Linier som er givet ved forlængelser af den absolutte enhed kaldes direkte, og de linier der ligger i samme plan som 1 og ϵ, men ikke er direkte kaldes indirekte. Hvis a, b, c, d betegner direkte linier, og $a + \epsilon b$ og $c + \epsilon d$ betegner de indirekte linier med henholdsvis længden A og C som afviger fra 1 med vinklerne v og u, så udtrykkes produktet

$$(a + \epsilon b)(a + \epsilon b) = ac - bd + \epsilon(ad + bc).$$

Bevis: Ifølge det lige indførte udtryk er $a + \epsilon b = A \cos v + A\epsilon \sin v$, $c + \epsilon d = C \cos u + C\epsilon \sin u$, men af definitionen på multiplikation er

$$(a + \epsilon b)(a + \epsilon b) = AC(\cos{(v + u)} + \epsilon \sin{(v + u)}$$

De trigonometriske formler giver

$$\cos v \cos u - \sin v \sin u + \epsilon(\cos v \sin u + \cos u \sin v).$$

Erstattes $AC \cos v \cos u$ med ac og $AC \sin v \sin u$ med bd, osv. fås $ac - bd + \epsilon(ad + bc)$.

Kvotienten af $A(\cos v + \epsilon \sin v)$ og $B(\cos u + \epsilon \sin u)$ er $\frac{A}{B}(\cos{(v - u)} + \epsilon \sin{(v - u)}$ fordi $B(\cos u + \epsilon \sin u) \times \frac{A}{B}(\cos{(v - u)} + \epsilon \sin{(v - u)} = A(\cos v + \epsilon \sin v)$.

Er m hel frembringer $\cos \frac{v}{m} + \epsilon \sin \frac{v}{m}$ multipliceret med sig selv m gange $\cos v + \epsilon \sin v$. Så $(\cos v + \epsilon \sin v)^{\frac{1}{m}} = \cos \frac{v}{m} + \epsilon \sin \frac{v}{m}$. Men da

$$
\begin{aligned}
\cos -\frac{v}{m} + \epsilon - \sin \frac{v}{m} &= \frac{1}{(\cos \frac{v}{m} + \epsilon \sin \frac{v}{m})} \\
= \frac{1}{(\cos v + \epsilon \sin v)^{\frac{1}{m}}} &= (\cos \frac{v}{m} + \epsilon \sin \frac{v}{m})^{-\frac{1}{m}},
\end{aligned}
$$

altså om m er positiv eller negativ er

$$\cos \frac{v}{m} + \epsilon \sin \frac{v}{m} = (\cos v + \epsilon \sin v)^{\frac{1}{m}},$$

Vi har altså

$$(\cos v + \epsilon \sin v)^{\frac{n}{m}} = \cos \frac{n}{m} v + \epsilon \sin \frac{n}{m} v.$$

Da differensen mellem to vinkler, med samme cosinus og samme sinus enten er 0, ± 4 rette vinkler eller et multiplum heraf, har $(\cos v + \epsilon \sin v)^{\frac{1}{m}}$ de forskellige løsninger:

$$\cos \frac{v}{m} + \epsilon \sin \frac{v}{m},\ \cos \frac{\pi + v}{m} + \epsilon \sin \frac{\pi + v}{m},\ \cos \frac{2\pi + v}{m} + \epsilon \sin \frac{2\pi + v}{m}, \ldots$$
$$\ldots, \cos \frac{(m-1)\pi + v}{m} + \epsilon \sin \frac{(m-1)\pi + v}{m},\ \text{hvor } \pi = 360 \text{ grader.}$$

Nu da regnereglerne for rette linier i planen (eller komplekse tal) er fremstillet, går Wessel videre til næste kapitel, som omhandler nogle andvendelser af teorien. Men lige inden antyder han dens muligheder indenfor funktionslæren (som han lover en fortsættelse af). Anvendelserne går hovedsageligt ud på at bestemme visse sider i plane polygoner, når andre er givet. Der er også et meget elegant bevis for Cotes's sætning.

Næste kapitel beskæftiger sig med de rette linier når de ikke ligger i samme plan. Wessel udvider nu hans koordinatsystem til også at indbefatte en tredie akse. Den nye akses enhed kalder han η. Denne enhed udgør en ret vinkel både med 1 og ϵ, og det ses ligesom med ϵ^2 at η^2 er -1.

Wessel betragter nu en kugle med centrum i koordinatsystemets begyndelsespunkt og radius r. De tre vinkelrette radier betegnes med $r, r\epsilon$ og $r\eta$, hvor r og $r\epsilon$ ligger i den horisontal plan og $r\eta$ står lodret på denne. Ligesom en linie i planen udtrykkes ved $x + \epsilon y$, udtrykkes linien i rummet ved $x + \eta y + \epsilon z$. Nu ses multiplikation af linier i den horisontale plan $(x + \epsilon z)(a + \epsilon b)$ også at gælde for linier i den vertikale plan $(x + \eta y)(a + \eta b)$. En drejning på kuglens overflade parallel med den horisontale plan, vil kunne udtrykkes som et produkt $(x + \epsilon z)(\cos v + \epsilon \sin v)$, hvor v er vinklen mellem den oprindelige linie og den, der fremkommer efter drejningen. Der er altså ikke nogen ændring af $r\eta$. Og ligeledes ses en drejning parallel med den vertikale plan at være udtrykt ved $(x + \eta y)(\cos u + \eta \sin u)$. Wessel indfører nu betegnelserne $(x + \eta y + \epsilon z), , (\cos v + \epsilon \sin v)$ og $(x + \eta y)(\cos u + \eta \sin u)$ for de to drejninger. Dette nye tegn , , repræsenterer blot en operation der er analog med multiplikation af de komplekse tal. Det mærketal der ikke er til stede (ϵ eller η) skal altså multipliceres, men de øvrige på sædvanlig måde. Udføres nu to drejninger på en linie, begge parallelle med samme plan, ses, at

$$\begin{gathered}
(x + \eta y + \epsilon z), , (\cos v + \epsilon \sin v), , (\cos u + \epsilon \sin u) \\
= (x + \eta y + \epsilon z), , (\cos (v + u) + \epsilon \sin (v + u)), \\
(x + \eta y + \epsilon z), , (\cos v + \eta \sin v), , (\cos u + \eta \sin u) \\
= (x + \eta y + \epsilon z), , (\cos (v + u) + \eta \sin (v + u)).
\end{gathered}$$

Det viser, at operationen , , i dette tilfælde er identisk med den sædvanlige multiplikation. Men er de to drejninger parallelle med hvert sit plan $(x + \eta y + \epsilon z), , (\cos v + \epsilon \sin v), , (\cos u + \eta \sin u)$ ses at den ikke er algebraisk.

Til sidst kunne man godt have tænkt sig en undersøgelse af den drejning, der holder x uforandret, men dette kræver en fjerde akse. For at kunne betragte denne drejning analytisk

$$(x + \eta y + \epsilon z), , (\epsilon \cos v + \eta \sin v) \quad \text{eller} \quad (x + \eta y + \epsilon z), , (\eta \cos v - \epsilon \sin v),$$

er det nødvændigt at se på produktet $\epsilon\eta$. Den nye akse ζ har egenskaberne $\zeta^2 = -1$ og $\zeta = \epsilon\eta = -\eta\epsilon$ og er således en fortsættelse af ternionerne til kvaternionerne.

Men Wessels hensigt med afhandlingen er de sphæriske polygoner, og de halvthundrede sider, som afhandlingen herefter fylder, er blandt de store for den tids afhandlinger fra Selskabet, som Wessel ikke engang var medlem af. Efter Wessels egne bemærkninger var Johan Tetens engageret i afhandlingen og hjalp med udarbejdelsen, hvilket også antageligt er grunden til at dette ikke-medlem fik optaget afhandlingen. Men som nævnt skabte afhandlingen ingen yderlig opmærksomhed, og at både Tetens' og Wessels fortsættelser på arbejdet aldrig udkom eller overhovedet blev udarbejdet, kan man kun undre sig over, for Tetens har uden tvivl indset dens betydning. At matematikere som C. F. Degen, der virkede samtidigt, og den senere Christian Jürgensen, der begge har haft med afhandlingen at gøre, ikke har været opmærksomme, er ligeledes besynderligt.

Tidligere tillagde man Argand æren for den geometriske fremstilling af de komplekse tal, med hensyn til hans *Essai sur une maniére de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions algébriques*, 1803. Afhandlingen blev dog helt upåagtet af den lærde verden, da den udkom. Først da I. F. Français i 1813 i *Gergonne annales de math.* offentliggjorde en artikel, der indeholdte den samme fremstilling. Han skriver dog at det ikke er hans ideer, men at han har fundet dem i et brev til hans afdøde broder fra Legendre, der omtaler den som en meddelelse som han har modtaget. Français beder den første forfatter at offentliggøre hans arbejde, hvilket Argand gør. Dette giver nu anledning til en diskussion af teorien i *Gergonne annales de math.* Men stadigvæk synes den ikke at have trængt ind. I Cauchys arbejde *Sur les quantités géométriques* fra 1847 bliver fremstillingen benyttet til nogle vigtige anvendelser, og først da synes den at være respekteret. Wessels arbejde bliver først genopdaget i den omtalte disputats fra 1895 af S. A. Christensen, som bevirker dens genoptrykkelse og den rette tillæggelse af æren.

Litteraturliste

[1] Caspar Wessel: *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning.* Videnskabernes Selskabs Skrifter 2. række 5. bind, 1799.

[2] S. A. Christensen: *Matematikkens Udvikling i Danmark og Norge i det 18de Aarh.*, 1894.

[3] S. A. Christensen: *Caspar Wessel og de komplekse Tals Teori.* Odense Katedralskoles Program, 1896.

[4] C. Juel: *Redegørelse for en Afhandling af Landmaaler Caspar Wessel fra 1799.* Nyt Tidsskrift for Matematik. Afd. B, 1895.

Det kosmologiske argument

Rasmus Borup Hansen

Denne lille artikel går ud på at beskrive en af udvalgsaksiomets utallige anvendelser: Vi vil bruge det til at bevise eksistensen af Gud!

Lad S være mængden af alle væsener, der nogensinde har eksisteret, eller som vil komme til at eksistere. Definér nu en ordensrelation $\geq$ på S, sådan at $x \geq y$, netop hvis x er en årsag til y. Vi vil her benytte konventionen, at $x \geq x$ for alle $x \in S$. Man kan godt gennemføre argumentet uden denne konvention, men det vil da blive lidt mere indviklet – og det er da heller ikke helt tosset at sige, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for eksistensen af x er eksistensen af x. Der er klart, at hvis $x \geq y$ og $y \geq z$, må $x \geq z$, så vores relation er transitiv. Desuden kan der ikke være nogen „cirkel-årsager“, så der må gælde, at hvis $x \geq y$ og $y \geq x$, må $x = y$. Alt i alt har vi, at vores relation $\geq$ definerer en partiel ordning af mængden S.

Vi vil gøre følgende to antagelser:

Antagelse 1. *Mængden S er en mængde i et univers, hvor udvalgsaksiomet gælder.*

Antagelse 2. *Mængden S er induktivt ordnet.*

Vi definerer nu en *Gud* til at være et element $G \in S$, sådan at hvis x er et vilkårligt andet element i S, hvor $x \geq G$, så er $x = G$. Med andre ord: En Gud er et væsen, der ikke har andre årsager end sig selv. Hvis G er en Gud i S, og hvis x er et element i S, så $G \geq x$, vil vi sige, at G er en *guddommelig skaber* af x. (Man ser nemt, at enhver Gud er en guddommelig skaber af sig selv.)

Det er velkendt, at Zorns Lemma er ækvivalent med udvalgsaksiomet:

Zorns Lemma. *Enhver induktivt ordnet mængde ($\neq \emptyset$) har et maksimalt element.*

Vi får nu følgende:

Hovedsætning. *Der findes en Gud, og ethvert væsen har en guddommelig skaber.*

Bevis. Brug Zorns Lemma. □

Bemærk, at vores sætning ikke udtaler sig entydigheden af en Gud, og at det er muligt for to forskellige væsener at have forskellige guddommelige skabere.

Lad os kigge lidt mere på de antagelser, vi har gjort.

Det er væsentligt, at vi har defineret S som en mængde af væsener, som har eksisteret, eller som vil eksistere (*ens realis*). For hvis vi havde tilladt potentielle væsener, dvs. væsener, som kunne tænkes at eksistere (*ens mentalis*), behøver S slet ikke at være en mængde! Hvis enhver mængde er et potentielt væsen, ville S jo være en mængde, der indeholdt alle mængder og dermed også sig selv; men så skulle S have strengt større kardinalitet end sig selv, hvilket er umuligt.

Det er imidlertid stadig ikke helt klart, at S er en mængde, men det sikrer vi med første halvdel af antagelse 1. Den anden halvdel af antagelse 1, at udvalgsaksiomet gælder i det univers, vi arbejder i, er essentiel, hvis vores mængde S er uendelig. Læsere, der vil vide mere om udvalgsaksiomet, kan evt. læse artiklen „Hvor stor er en ret linje?“ i sidste nummer af FAMØS.

Antagelse 2 har et betydeligt metafysisk indhold. Lad os betragte en delmængde T af S, der opfylder, at hvis x og y er forskellige elementer i T, så er enten $x \geq y$ eller $y \geq x$ (dvs. T er totalt ordnet af årsagsrelationen). At S er induktivt ordnet betyder, at hver gang vi har en sådan delmængde $T \subseteq S$, findes der et element $x \in S$, så $x \geq y$ for alle $y \in T$ (dvs. T har en majorant). Antagelse 2 er altså et ganske stærkt udsagn om årsagsbegrebet. For hvis man tænker sig en sådan kæde af årsager $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ (bemærk, at relationssymbolet er blevet vendt), er det ikke intuitivt klart, at denne kæde „har en grænseårsag“, altså at der findes et x, så $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x$.

Til sidst kan vi bemærke, at hvis der gælder,

$$(y \geq x \wedge z \geq x) \;\Rightarrow\; (y \geq z \vee z \geq y)$$

(hvis både y og z er årsag til x, er enten y årsag til z eller z årsag til y), behøver vi ikke at anvende udvalgsaksiomet. For hvis vi har et element $x \in S$, kan vi betragte den totalt ordnede(!) mængde T af alle årsager til x. Antagelse 2 sikrer nu, at der er et element $G \in T$, der er årsag til alle de øvrige elementer i T. Da vi har antaget, at der ikke er nogen „cirkelårsager“, kan der ikke findes noget andet element H i T, så $H \geq G$ (for G er årsag til alle elementerne i T). Vi ser nu, at G er en Gud, og at G specielt er en guddommelig skaber af x.

Opgaver

Sammen med sine opgaveløsninger sendte Asger Grunnet et par andre opgaver, som hermed videregives til læserne.

Til sidst vil jeg stille et par (lidt svære) opgaver, der er inspireret af henholdsvis opgave 1 og opgave 17 fra sidste nummer af FAMØS:

Opgave Lad p være et komplekst polynomium i to variable. Antag at en kompleks funktion f opfylder :

$$f(x)f(y) = f(p(x,y)), x, y \in \mathbb{C}$$

Vis at der findes et komplekst tal $c \in \mathbb{C}$, så funktionen $g(x) = f(x - c)$ opfylder enten :

$$g(x)g(y) = g(\alpha xy)$$

for et $\alpha \in \mathbb{C}$, eller

$$g(x)g(y) = g(x + y)$$

Vink: Del op i to tilfælde efter om f har et nulpunkt eller ej.

Opgave Lad a være et helt positivt tal forskellig fra 1,2 og 4. Find samtlige tal $n \in \mathbb{N}$, så $n(n+a)$ er et kvadrattal.

Vink: (*Advarsel.* Hvis du læser dette vink, bliver opgaven en hel del lettere!) Skriv $a = bcd$ med $c > d$ og $c - d$ lige. Vis at $n = b(\frac{c-d}{2})^2$ er en løsning, og at alle løsninger er på denne form.

I sidste nummer omtalte vi, at Jonas Kongslund, havde løst opgaven fra septembernummeret, sammen med sin løsning sendte han følgende opgave:

Hvis man differentierer x^2 ved vi alle, at man får $2x$; men hvad sker der så her?

$$\left(x^2\right)' = (x \cdot x)' = \left(\sum_{i=1}^{x} x\right)' = \sum_{i=1}^{x} (x)' = \sum_{i=1}^{x} 1 = x \cdot 1 = x$$

Hvad ph.d.-studiet fører til...

A mathematics student had just finished his Ph.D. in Princeton, and he was looking for jobs. After a year with no success, he finally landed a job with the zoo as a zookeeper. One day, the bear in the zoo died. The zoo was facing the same financial crisis as the universities, so they could not afford to buy another bear. So they asked the student to dress up in a bear costume and pretend that he was a bear. Well, the salary they offered was definitely an increase, so he took this job. He was put into a cage, and with time he became very good at imitating a bear. But he had one worry. The bars between his cage and the next cage were loose. And in the next cage was a very ferocious looking lion. One day, his worst fears were realized, and the bar broke loose. The lion jumped through the bars, and ran up to the student. Extending his paw, the lion exclaimed, "Hi, I'm Phil, a physics major from Stanford."

Opgaveløsninger

Nedenfor følger opgaveløsningerne til de opgaver, vi stillede i sidste nummer, og som blev stillet ved Baltic Way 1997-konkurrencen:

1. Da $f \neq 0$, findes et x_0, så $f(x_0) \neq 0$. Da $f(x_0)f(0) = f(x_0 - 0) = f(x_o)$, må $f(0) = 1$. Da $f(x)^2 = f(x)f(x) = f(x - x) = f(0) = 1$, er specielt $f(x) \neq 0$ for alle x. Men så må $f(x)f(\frac{x}{2}) = f(x - \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})$, så $f(x) = 1$ for alle x.
2. Lad ℓ være det mindste indeks, hvor $a_\ell > a_1$. Så er $2a_\ell - a_1$ et naturligt tal større end a_1, så det må forekomme et sted i følgen efter a_ℓ. Med andre ord findes det et $m > \ell$, så $a_m = 2a_\ell - a_1$.
3. Hvis vi for et fast n skriver $x_n = an + b$ med $0 \leq b < n$, er $x_{n+1} = x_n + a + 2 = a(n+1) + b + 2$. Hvis $x_N = AN$, er $x_{N+i} = A(N+i) + 2i$ for $0 \leq i \leq N$, og $X_{2N} = (A+1) \cdot 2N$. For $N = 1$ svarer dette til $A = 1$, og for $N = 2^k$, fås $A = k + 1$. Betragtes $N = 2^{10} = 1024$, er $A = 11$ og $X_{N+i} = A(N+i) + 2i$, som for $i = 973$ giver $x_{1997} = 11 \cdot 1997 + 2 \cdot 973 = 23913$.
4. Sæt $y_i = x_i - a$. Så er $y_1 + \cdots + y_n = 0$, og vi kan antage, at $y_1 \leq \cdots \leq y_k \leq 0 \leq y_{k+1} \leq \cdots \leq y_n$. Sæt $z = y_{k+1} + \cdots + y_n$. Så er
$$\begin{aligned} y_1^2 + \cdots + y_n^2 &= y_1^2 + \cdots + y_k^2 + y_{k+1}^2 + \cdots + y_n \\ &\leq (y_1 + \cdots + y_k)^2 + (y_{k+1} + \cdots + y_n)^2 \\ &= 2z^2 \\ &= \frac{1}{2}(2z)^2 \\ &= \frac{1}{2}(|y_1| + \cdots + |y_n|)^2. \end{aligned}$$
5. Da antallet af naturlige tal $u_n \leq a$ er endeligt, og da disse forekommer uendeligt ofte(!), må der findes naturlige tal n og m med $n > m$, så $u_n = u_m$. Fra trin m, vil følgen være periodisk med periode $n - m$.
6. Man får umiddelbart, at $a^3 + 9b^2 + 9c = 1990$, og da $1990 \equiv 1 \pmod 9$, er $a^3 \equiv 1 \pmod 9$. Man ser nemt, at så må $a \equiv 1 \pmod 3$, og da $13^3 = 2197 > 1990$, må $a \in \{1, 4, 7, 10\}$. Hvis $a \leq 7$, er $a^3 + 9b^2 + 9c \leq 7^3 + 9 \cdot 7^2 + 9 \cdot 7 = 847 < 1990$, så $a = 10$, og dermed må også b og c være lig 10.
7. Antag, b er et heltal, så $Q(P(b)) = 1$. Da a og $a + 1997$ er rødder i P, er $P(x) = (x-a)(x-a-1997)W(x)$, hvor W er et polynomium med heltalskoefficienter. Da $Q(1998) = 2000$, er $Q(x) = (x - 1998)T(x) + 2000$, hvor T er et polynomium med heltalskoefficienter. Heraf fås, at
$$1 = Q(P(b)) = ((b-a)(b-a-1997)W(b) - 1998)T(P(b)) + 2000,$$
og tallet $(b-a)(b-a-1997)$ er altid lige, så udtrykket på højresiden er altid lige, mens venstresiden er ulige.

8. Det er nok at vise, at der findes et tal k, så $3993 \cdot k$ består af lutter nitaller (for et sådant tal kan ikke fremkomme ved addition af to naturlige tal, uden der opstår menter). Betragt de 3994 forskellige tal 9, 99, ..., $9\dots9$ (hvor det sidste består af 3994 nitaller). Skuffeprincippet giver, at to af disse tal må give den samme rest ved division med 3993, så også deres differens er delelig med 3993. Men denne differens må være på formen $9\dots90\dots0$, og da 10 og 3993 er indbyrdes primiske, er tallet, hvor vi har fjernet alle nullerne også deleligt med 3993, og det må bestå af lutter nitaller.
9. Det er nok at vise, at ligegyldigt hvor vi starter, kan vi nå til 1. For at indse dette, er det nok at vise, at vi kan nå til et lavere nummer (hvis ikke vi er i 1). Vi ser, at
$$3n \longrightarrow 9n+1 \longrightarrow 36n+4 \longrightarrow 12n+1 \longrightarrow 4n \longrightarrow 2n,$$
$$3n+1 \longrightarrow n, \quad \text{og}$$
$$3n+2 \longrightarrow 6n+4 \longrightarrow 2n+1.$$
10. Betragt en følge af 79 på hinanden følgende naturlige tal. Blandt de første 40 er 4 delelige med 10, og mindst et af disse tal har et tal mindre end eller lig 6 som det næst-sidste ciffer. Lad dette tal være x, og lad dets tværsum være y. Da er
$$x, x+1, \dots, x+19, x+29, x+39$$
alle tal fra vores følge, og deres tværsummer er
$$y, y+1, \dots, y+12,$$
og et af disse tal må være deleligt med 13.
11. Lad $C_1, C_2, \dots$ være punkter på linjen med B'erne, så $|C_iC_{i+1}| = 1$ og $C_{2i} = B_i$, $i = 1, 2, \dots$. Da er $\angle A_iB_iA_{i+1} = \angle A_iC_{2i}A_{i+1} = \angle A_1C_{i+1}A_2 = \angle C_{i+1}A_2C_{i+2}$, og $\sum_{i=1}^{\infty} \angle A_iB_iA_{i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \angle C_{i+1}A_2C_{i+2} = \angle C_2A_2A_4 = \pi - \alpha$.
12. Der gælder, at $\angle YAX = \angle YAP = \angle YQP = \angle ZQP = \angle ZBP = \angle ZBX$, og da $|AX| = |BX|$, er $\triangle YAX \cong \triangle ZBX$, hvorfor $|YX| = |ZX|$.
13. Lad O, H' og G' betegne centrene for de omskrevne cirkler til $\triangle BDF$, $\triangle BCF$ og $\triangle CDF$. Punkterne O, G og G' ligger på medianen for DF, mens O, H og H' ligger på medianen for BF. Da G og H' ligger på medianen for BC, da O ligger på medianen for BD, da H og G' ligger på medianen for CD, og da C er midtpunktet for BD, får vi, at H' og G' fremkommer ved rotation af H og G 180° omkring O. Følgelig er $\triangle OGH'$ og $\triangle OG'H$ kongruente, og $GHG'H'$ er et parallelogram. Da CF er en fælles side for $\triangle BCF$ og $\triangle CDF$, er linjen $G'H'$, der forbinder centrene for deres omskrevne trekanter, vinkelret på deres fælles side. Derfor er GH vinkelret på CF.
14. Vi bemærker, at $B \leq \max\{A, C\}$, så $0 < \cot B < \infty$. Efter antagelse er $2b^2 = a^2 + c^2$. Cosinus-formlerne giver, at $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ og $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Sinus-formlerne giver, at $\sin A = ka$, $\sin B = kb$, $\sin C = kc$, så $\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2kabc}$, $\cot B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2kabc}$ og $\cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2kabc}$. Altså er $\cot A + \cot C = \frac{2b^2}{2abck} = \frac{2b^2-2(a^2+c^2-2b^2)}{2abck} = 2\frac{a^2+c^2-b^2}{2abck} = 2\cot B$. Af uligheden for aritmetisk og geometrisk gennemsnit fås $\cot^2 B \geq \cot A \cot C$. Hvis A eller C er stump, holder konklusionen stadig.

15. Lad I betegne centrum for den indskrevne cirkel, lad Q betegne skæringspunktet mellem AA_1 og B_1C_1, og lad Y betegne skæringspunktet mellem AC og B_1C_1. Da er $\angle AQC_1 = \frac{1}{2}(\smile AC_1 + \smile A_1CB_1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} \smile AB + \frac{1}{2} \smile BC + \frac{1}{2}CA) = 90°$. Da $\angle AC_1B_1 = \angle B_1C_1C$, er C_1B_1 vinkelhalveringslinje for AC_1I, og da $AI \perp C_1B_1$, er MB_1 vinkelhavleringslinje for $\angle AMI$. Tilsvarende er YC_1 vinkelhalveringslinje for AYI. I firkanten $AMIY$, er diagonalerne vinkelrette og lig vinkelhalveringslinjerne. Altså er det en rhombe, og $MI \| AC$. Tilsvarende er $NI \| AC$, so M, N og I ligger på en ret linje.
16. Med følgende strategi er den første spiller sikker på at vinde: Den første spiller sætter hesten på feltet mærket 0 i figuren nedenfor. Hver gang modspilleren har flyttet hesten, skal den første spiller blot flytte til feltet med samme nummer.

0	12	8	3	11
5	3	11	1	7
12	8	6	10	4
2	5	9	7	1
9	6	2	4	10

17. Lad $ab = n$ og $cd = n + 76$, hvor a, b, c og d er antallet af felter i hver retning. Da er $ad = bc$, og vi kan skrive $a = ux$, $b = uy$, $c = vx$ og $d = vy$. Dette giver, at $cd - ab = xy(v^2 - u^2) = xy(v-u)(v+u) = 76 = 2^2 \cdot 19$. Da $v + u$ og $v - u$ er naturlige tal, der enten begge er lige eller begge er ulige, er den eneste mulighed, for at produktet kan gå op i 76, at $v - u = 1$ og $v + u = 19$. Altså er $u = 9$, $v = 10$ og $xy = 4$, så $n = u^2xy = 324$.
18. Lad A være mængden af naturlige tal, hvor det kun er på de lige pladser (i titalssystemet, talt fra højre), hvor der er cifre forskellige fra nul. Lad B være være mængden af naturlige tal, hvor det kun er på de ulige pladser (i titalssystemet, talt fra højre), hvor er er cifre forskellige fra nul. Det er klart, at (A, B) har den ønskede egenskab.
Der gælder, at $0 \in A \cap B$. Betragt nu det mindste $k \notin A$. Der må gælder, at $k \in B$. Betragt opdelingen af A i foreningen $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ af maksimale mængder $A_1, A_2, \ldots$ af på hinanden følgende tal, skrevet i stigende orden. Specielt er $A_1 = \{0, \ldots, k-1\}$. De naturlige tal må kunne skrives som en disjunkt forening af mængderne $A_n + y = \{x + y \mid x \in A_n\}$ med $y \in B$. Ved induktion følger, at A_n må have længde k: For hvis A_m er den første mængde med længde $l \neq k$, må vi have $l < k$ for ikke at få overlap mellem $A_m + 0$ og $A_m + k$, og da må der være et $A_n + y$ mellem $A_m + 0$ og $A_m + k$, hvilket er umuligt, da $n < m$. De naturlige tal er således en disjunkt forening af mængderne $A_n + y$, der alle har længde k, $y \in B$. Det første tal i en sådan mængde er et multiplum af k, og da hvert $y \in B$ er det første tal i $A_1 + y$, følger det, at hvert y er et multiplum af k.
19. Da hvert kampagneførende dyr bruger præcis n stier, og da det totale antal af stier er $\frac{n(n-1)}{2}$, kan det totale antal af kampagneførende dyr ikke overstige $\frac{n-1}{2}$. Benævn hulerne med tallene $0, 1, \ldots, n-1$. Vi kan da konstruere $\frac{n-1}{2}$ ikke

overlappende ruter som følger:

$$\begin{gathered}
0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n \to 0 \\
0 \to 2 \to 4 \to 6 \to \cdots \to n-1 \to 0 \\
0 \to 3 \to 6 \to 9 \to \cdots \to n-2 \to 0 \\
\vdots \\
0 \to \tfrac{n-1}{2} \to n-1 \to \cdots \to \tfrac{n+1}{2} \to 0.
\end{gathered}$$

Vi har set, at der ikke kan være mere end $\frac{9-1}{2} = 4$ kampagneførende dyr, men dette antal er også opnåeligt:

$$\begin{gathered}
0 \to 1 \to 2 \to 8 \to 3 \to 7 \to 4 \to 6 \to 5 \to 0 \\
0 \to 2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 8 \to 5 \to 7 \to 6 \to 0 \\
0 \to 3 \to 4 \to 2 \to 5 \to 1 \to 6 \to 8 \to 7 \to 0 \\
0 \to 4 \to 5 \to 3 \to 6 \to 2 \to 7 \to 1 \to 8 \to 0
\end{gathered}$$

20. Vi inddeler kortene i følgende fire typer:

	Farve til at begynde med	
Type	**opad**	**nedad**
A	sort	hvid
B	hvid	sort
C	hvid	hvid
D	sort	sort

Blandt kortene 1–6 må der være fem af type A og et af type C eller D. Til sidst har vi, at der blandt kort 7–12 må der være fire af type A, og de to øvrige må svare til en af følgende kombinationer:

(a) et af type A og et af type B,
(b) et af type C og et af type D,
(c) to af type C,
(d) to af type D.

Derfor kan de to ukendte kort blandt kort 1–6 ikke være af type D, da der så vil blive for mange sorte kort til at starte med. Tilsvarende er mulighederne a, b og d umulige. Alt i alt må der have været ni kort af type A og tre kort af type C.